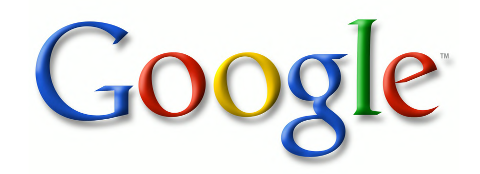


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

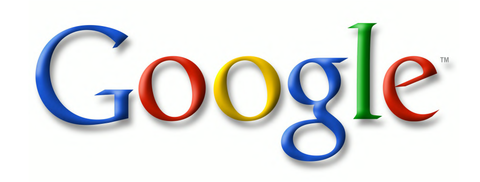
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`





1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE



LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE
ANCIENNE ET MODERNE
EMILE BLANCHARD
O, Rue de la Sorbonne, PARIS
VENTE, ACHAT, ÉCHANGE
de LIVRES Neufs et d'Occasion
COMMISSION·EXPORTATION·RELIURE

LA MESURE
DES SURFACES
ET
DES SOLIDES,
PAR L'ARITHMETIQUE
DES INFINIS
ET LES CENTRES DE GRAVITÉ.

102926
3957 1907

LA MESURE DES SURFACES ET DES SOLIDES, PAR L'ARITHMETIQUE DES INFINIS ET LES CENTRES DE GRAVITÉ.

Par M. l'Abbé DEIDIER. 1696-1746



A PARIS, RUE SAINT JACQUES,

Chez CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Libraire du Roy pour l'Artillerie & pour le Génie, à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. XL.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.



A MONSEIGNEUR
LOUIS-FERDINAND-JOSEPH,
DE CROŸ,
DUC D'HAVRÉ,
PRINCE DU SAINT-EMPIRE,
ET
GRAND D'ESPAGNE
DE LA PREMIERE CLASSE,
COLONEL DU REGIMENT DE LA COURONNE, &c.



ONSEIGNEUR,

L'Ouvrage que j'ai l'honneur de vous présenter est un Tribut qu'une infinité de titres exigent de moi. Ce n'est

0788

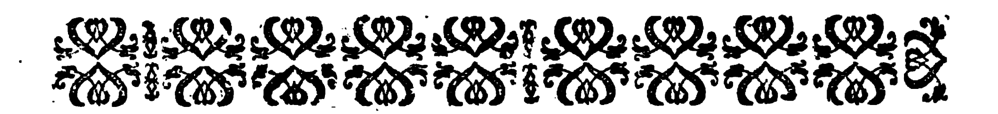
qu'à vous que je dois l'étude de la Geometrie, *&* les progrès *que j'y ai faits depuis quelques années. Les heureuses dispositions que je trouvai dans Votre illustre Personne, lorsque j'eus l'honneur d'être chargé de Votre* Education, *me firent connoître qu'il me falloit un grand acquit pour ne pas succomber sous un si noble poids. D'ailleurs j'avois à répondre à la confiance que Votre Auguste* Famille *me témoignoit en me remettant un Dépôt si précieux. Je m'attachai donc à toutes les* Sciences *dont un jeune Seigneur doit être instruit, & surtout aux Mathematiques, comme étant les plus propres à donner de la justesse à l'Esprit. La pénétration que vous faisiez paroître dans toutes sortes de sujets m'animoit à redoubler mes recherches, & malgré mon application, j'avois souvent le plaisir de voir, que la Nature seule faisoit plus dans Vous, qu'une profonde Etude ne pouvoit faire dans moi.*

La fin de Votre Education *m'ayant laissé tout le loisir de cultiver les mêmes Sciences; J'ai déja mis au jour quelques Ouvrages, que je n'ai point osé Vous offrir, dans la crainte que le Jugement du Public ne fût pas assez favorable pour les rendre dignes de Vous être présentés. Aujourd'hui l'Approbation générale, & surtout celle de la célébre Académie des Sciences, m'enhardissent à Vous faire un hommage de celui-ci; Trop heureux, si vous daignez l'honorer d'une protection, dont je connois tout le prix. Digne descendant du* GRAND CROY DE CHIEVRES, *Gouverneur*

& Parent de l'Empereur Charles Quint, Vous avez hérité de ses vertus comme de ses grandeurs : Ce n'est point ici le lieu de faire le détail de tant de belles qualités qu'on admire dans Vous. Elles sont si généralement reconnues, qu'il ne me reste qu'à Vous supplier d'accepter cet Ouvrage comme une marque de la vive reconnoissance & du respectueux attachement avec lequel j'ai l'honneur d'être,

MONSEIGNEUR,

Votre très-humble & très-obéissant Serviteur, DEIDIER.



PREFACE.

L'ESPRIT humain étant naturellement borné, on ne doit le mener à la connoiſſance de ce qu'il ignore que par des voyes proportionnées à ſa foibleſſe, & qui ſans fatiguer ſon attention, le faſſent monter inſenſiblement aux dégrés les plus élevés.

Il ne faut d'abord lui préſenter que des principes ſimples & évidens, & des détails qui lui faſſent enviſager peu à peu toutes les parties de ſon objet; les ſiſtêmes & les méthodes de généralization ne ſçauroient lui convenir. Ce ſeroit vouloir l'ébloüir au lieu de l'éclairer, que de prétendre lui faire prendre ces ſentiers. Il en eſt des lumieres de l'eſprit comme de celles du corps. Un homme qui ſort des profondes ténébres ne ſupporte qu'avec peine la moindre clarté, il lui faut du tems pour ſe faire au grand jour, & l'on court riſque de l'aveugler pour jamais ſi l'on veut qu'il s'y accoutume trop tôt. Or de toutes les Sciences, les Mathématiques étant les plus abſtraites, il n'en eſt point auſſi où l'on doive ménager avec plus de ſoin les forces de l'eſprit. Un diſcours dont preſque tous les mots demandent une nouvelle réflexion, des figures la plûpart compliquées & avec leſquelles on n'eſt point familier, partagent extrémement l'attention, & la fatiguent juſqu'à l'excès, ſi l'on ſe preſſe d'y joindre le calcul. J'ai déja dit ceci quelqu'autre part, mais je ne crains point de le répéter. L'expérience fait voir que bien des perſonnes qui avoient d'ailleurs de grandes

diſpoſitions

dispositions, se sont rebutées de la Géometrie, & si l'on veut sans prévention en rechercher la cause, on trouvera facilement que ce n'est que la précipitation & le peu d'ordre avec lequel on a voulu les faire marcher.

C'est pour éviter cet inconvénient que j'ai composé le cours de Mathématiques dont j'ai donné le projet au commencement de l'année 1739. Les deux premiers volumes de ce Cours ont paru dans le courant de la même année sous le titre d'*Arithmétique des Géometres*, & de *Science du Géometre*. Dans le premier, j'ai donné les regles de l'Arithmétique ordinaire dans toute leur étenduë, les Elemens de l'Algebre ordinaire, l'Analyse ou la Méthode de résoudre les Problêmes, les proportions & progressions arithmétiques & géometriques, les logarithmes, & généralement tout ce qu'on peut renfermer sous le nom d'Elemens de Mathématiques; j'y ai mis par-tout grand nombre d'exemples familiers & instructifs, mais qui ne roulent que sur les nombres, parce que j'ai supposé que les Commençans ignoroient la Géometrie & les proprietés de l'étenduë. Le second contient non-seulement tout ce qu'Euclide a enseigné dans ses Elemens, mais encore la Trigonometrie, la Longimetrie, l'Altimetrie, le Nivellement, la Planimetrie, la Géodesie, l'Esoperimetrie, les Sections coniques, la Stereometrie, la Mesure des corps à aretes courbes & concaves, des Corps annullaires, des Onglets, des Conoïdes, & enfin tout ce qui peut concerner la mesure des trois dimensions de l'étenduë. J'ai traité cet Ouvrage d'une maniere toute synthetique, afin que les Commençans s'accoutument à envisager les figures & à découvrir leurs proprietés, & je me suis abstenu du calcul de peur de partager leur attention.

Ces deux volumes comprennent tout le détail dont l'eſprit a beſoin pour s'élever plus haut dans les Sciences Mathématiques, & j'oſe me flater que ceux qui ſe ſeront donné la peine de les lire concevront aiſément les méthodes de generalization que j'enſeigne dans les deux volumes ſuivans. Or quoique dans les différentes méthodes que les Modernes ont inventées, celle du Calcul différentiel & du Calcul intégral ſoit la meilleure de l'aveu des Sçavans, il faut cependant avouer qu'elle eſt un peu trop abſtraite & métaphyſique pour des perſonnes accoutumées à la ſyntheſe, & que malgré la certitude du calcul elle laiſſe toujours après elle une obſcurité & des doutes que les ſeules démonſtrations géometriques ſont capables de diſſiper. Dans cette vuë, j'avois d'abord projetté de traiter cette matiere en y mettant par-tout les démonſtrations néceſſaires, mais comme les Lemnes fréquens qu'il m'auroit fallu y introduire auroient pû diſtraire le Lecteur & l'empêcher de ſuivre le fil de la Méthode, & que d'ailleurs je n'ai point encore traité des lieux géometriques ni de la conſtruction des Equations, ce qu'il eſt pourtant bon de ſçavoir pour entendre plus aiſément ces calculs, j'ai cru qu'il valoit mieux m'attacher dans ce troiſiéme volume à d'autres méthodes plus faciles, où ſans abandonner totalement la ſyntheſe, je puſſe enſeigner aux Commençans à faire l'application de la plus ſimple algebre aux parties même les plus relevées de la Géometrie . & les mener par-là ſans beaucoup de peine à la connoiſſance des Calculs modernes qui feront le ſujet du quatriéme Volume de ce cours.

Ce que je traite donc ici c'eſt la Meſure des Surfaces & des Solides par l'Arithmétique des Infinis & les centres de gravité. L'Arithmétique des Infinis eſt de l'invention

de Wallis célebre Anglois qui malgré ſon antipathie pour la Nation Françoiſe, mérite bien qu'on lui rende l'Eloge qui lui eſt dû. Le principe ſur lequel il ſe fonde peut ſe démontrer aiſément ſoit par la ſimple induction, comme on verra au commencement de cet Ouvrage, ſoit dans l'exacte rigueur, ainſi que j'ai fait dans l'Arithmétique des Géometres; & de ce principe découlent une infinité de conſéquences très intéreſſantes pour la Géométrie, & qui à la faveur d'un calcul extrémement ſimple peuvent ſe déduire avec beaucoup de facilité. Il eſt vrai que l'Auteur employe par-tout la Méthode des Indiviſibles de *Cavallerius*, & que cette Methode déplaît à la plûpart des Modernes par la raiſon, diſent-ils, que les Elemens d'une ligne doivent être des lignes & non pas des points, que ceux d'une ſurface doivent être des ſurfaces & non pas des lignes, & qu'enfin ceux d'un ſolide doivent être des ſolides & non pas des ſurfaces; mais pour peu qu'on veuille y faire attention, on comprendra aiſément que ce n'eſt ici qu'une diſpute de mots. *Cavallerius* n'a jamais prétendu que ſes points fuſſent abſolument indiviſibles, que ſes lignes n'euſſent aucune largeur, ni ſes ſurfaces aucune profondeur. Il lui ſuffit que ces grandeurs puiſſent être conſidérées comme étant telles qu'il les définit, ce qu'on ne ſçauroit lui conteſter, à cauſe de l'indéfinie petiteſſe des dimenſions qu'il regarde comme nulles, & ſa méthode conſerve toute ſa vigueur. Or ſur ce pied rien n'empêche qu'on ne puiſſe donner à ſes points le nom de lignes infiniment petites, à ſes lignes celui de ſurfaces dont la hauteur eſt inſenſible, & à ſes ſurfaces celui de ſolides dont la profondeur eſt moindre que tout ce qu'on peut exprimer. Dèſlors la diſpute tombera d'elle-même, & *Cavallerius* & ſes An-

tagoniſtes ſeront parfaitement d'accord.

Quant au principe que l'on tire du centre de gravité des figures pour trouver la Meſure des Surfaces & des Solides, le P. Guldon Jeſuite en a parlé le premier ſans le démontrer ; le P. Tacquet en a donné la démonſtration & s'en eſt ſervi utilement dans ſon cinquiéme Livre *De Annularibus & Cylindricis*. Après eux, MM. Paſcal, Wallis, Wolfius, & grand nombre d'autres Auteurs en ont traité, mais la plûpart en ſuivant des routes différentes. Je me ſuis attaché à Wallis, parce qu'il employe preſque par-tout l'Arithmétique des Infinis, & que dans les endroits où il ne peut en faire uſage, il ne ſe ſert que de l'Algebre ordinaire, ce qui convient parfaitement à mon deſſein. Au reſte quoique je ſuive cet Auteur dans les deux parties de mon Ouvrage, ce n'eſt rien moins qu'une traduction que je prétens en donner. J'en ai pris les principes & beaucoup de choſes très-curieuſes qu'on ne ſera pas fâché de trouver en notre Langue, mais j'en ai retranché qui me paroiſſent inutiles ; j'en ai ajoûté grand nombre d'autres que j'ai crû capables d'éclairer le Lecteur, & j'ai tâché de mettre par-tout un ordre & une clarté conformes à l'eſprit de notre Nation. On pourra obſerver qu'outre la Meſure des Surfaces & des Solides qui eſt le principal but de ce Traité, il s'y trouve grand nombre de belles proprietés des figures très-propres pour étendre les lumieres de l'eſprit, & pour le diſſiper en même-tems de la ſechereſſe du ſujet.

Pour ne pas allonger cette Préface, je n'entrerai point dans le détail des avantages que les Commençans peuvent tirer de la lecture de cet Ouvrage, non-ſeulement pour leur avancement dans la Géometrie, mais encore pour ſe former à la maniere d'appliquer le calcul aux

Sciences Mathematiques. Un Auteur rempli de ſon ſujet peut quelquefois en être prevenu, & le Lecteur n'en juge pas toujours de la même façon. Je laiſſe donc au Public le ſoin d'en décider, mais en agiſſant ainſi à mon égard, je n'aurois garde d'en uſer ainſi à l'égard de Meſſieurs de l'Académie Royale des Sciences qui ont eu la bonté de m'honorer de leur Approbation.

Meſſieurs de Gamaches & de Moliere qui ont bien voulu ſe charger d'examiner ce Traité & d'en faire le rapport, ſont ſi célebres par leurs Ecrits & ſi recommandables par leur merite perſonnel, qu'il me ſuffit de les nommer pour rendre au Public un témoignage autentique de la reconnoiſſance dont je me ſens redevable envers eux. J'eſpere qu'un ſuffrage ſi glorieux attirera facilement celui des Lecteurs, & qu'il encouragera les Commençans à étudier avec ſoin une matiere que je n'ai traitée avec tant d'exactitude que pour leur être de quelque utilité.

Il m'eſt arrivé par inadvertance dans deux ou trois endroits de cet Ouvrage de nommer *tangente* à la parabole le côté du rectangle circonſcrit à cette figure, lequel eſt parallele à l'axe. Or comme cela n'eſt vrai que lorſque la parabole eſt infiniment grande, parce qu'alors la tangente à l'extremité de ſa baſe ne rencontrant l'axe qu'après un eſpace infini, peut être regardée comme étant parallele à l'axe, je ſuis bien aiſe de prevenir les Commençans qui pourroient être embarraſſés de cette expreſſion, & je les prie de ſuppléer le terme de *coté du rectangle circonſcrit* au lieu de celui de *tangente* dans les occaſions où la ſuite du diſcours & la figure que je cite font voir que je parle uniquement du côté du rectangle circonſcrit.

Quelque ſoin qu'un Auteur prenne pour donner toute

l'exactitude possible à ses Ouvrages, il est bien difficile qu'il ne s'y glisse des fautes ou d'inadvertance ou d'impression. Les Connoisseurs jugent ordinairement bien de la chose & n'y sont point embarrassés, mais tout le monde n'est pas connoisseur, & parmi le grand nombre des Lecteurs, il s'en trouve toujours que ces sortes de fautes arrêtent, c'est ce qui m'oblige de corriger ici un endroit de la quatriéme partie de l'Arithmétique des Geometres *page* 273. Il s'y agit des progressions géometriques, & cependant dans la Question 6e, je dis: *Une personne a dépensé* 278 *liv. dans six jours, en augmentant de trois par jour*, &c. Or il est visible qu'en augmentant de trois par jour, la progression seroit arithmétique & non pas géometrique, & qu'ainsi j'ai dû dire, *en augmentant de trois fois plus par jour*, au lieu de *trois par jour*. C'est donc une faute ou d'inadvertance ou d'impression que je prie le Lecteur d'excuser, en faisant attention que les Auteurs malgré leurs soins, ne peuvent se mettre au-dessus de la condition des autres hommes, dont le partage est de pouvoir quelquefois se tromper.

Extrait des Registres de l'Académie Royale des Sciences.

Du 18. Mars 1740.

MESSIEURS l'Abbé de Molieres & de Gamaches, qui avoient été nommés pour examiner un Ouvrage de M. Deidier, sur *la Mesure des Surfaces & des Solides par l'Arithmetique des Infinis, & par les Centres de Gravité*, en ayant fait leur rapport ; La Compagnie a jugé que l'Auteur avoit rempli avec beaucoup de netteté & d'exactitude le dessein qu'il paroît avoir eu de mener pas à pas les Commençans à la connoissance de ce qu'il y a de plus sublime dans la Geometrie, en n'y employant que la Synthese jointe au Calcul ordinaire, pour les conduire ensuite aux nouveaux Calculs, dont il se propose de donner un Traité, qui suivra de près celui-ci. En foi de quoi j'ai signé le present Certificat ; à Paris ce 27. Mars 1740.

FONTENELLE. S. P. de l'Académie Royale des Sc.

APPROBATION.

J'Ai lû par ordre de Monseigneur le Chancelier un Manuscrit intitulé. *La Mesure des Surfaces par les Centres de Gravité & l'Arithmetique des Infinis*, dont j'ai crû l'impression utile. Fait à Paris ce 4 du mois de Décembre 1739.

MONTCARVILLE.

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS par la grace de Dieu Roy de France & de Navarre, à nos Amés & Feaux Conseillers les Gens tenant nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils & autres nos Justiciers qu'il appartiendra : SALUT, Notre bien amé CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Libraire de notre Artillerie & du Génie, & Libraire à Paris, Nous ayant fait remontrer qu'il lui auroit été mis en main, *La Mesure des Surfaces & des Solides par les Centres de Gravité, & l'Arithmetique des Infinis* ; par le sieur Deidier, qu'il souhaiteroit faire imprimer & donner au Public, s'il nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Privilege sur ce nécessaires ; offrant pour cet effet de les faire imprimer en bon papier & beaux caracteres, suivant la feuille imprimée & attachée pour modéle sous le contre-scel des Présentes. A CES CAUSES, voulant traiter favorablement ledit Exposant, Nous lui avons permis & permettons par ces Présentes de faire imprimer lesdits Ouvrages ci-dessus specifiés, en un ou plusieurs volumes, conjointement ou séparement, & autant de fois que bon lui sem-

blera, & de les vendre, faire vendre & debiter par tout notre Royaume pendant le tems de neuf années consecutives, à compter du jour de la date desdites présentes : Faisons défenses à toutes sortes de personnes de quelque qualité & condition, qu'elles soient d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéïssance ; comme aussi à tous Libraires Imprimeurs & autres d'imprimer ou faire imprimer, vendre, faire vendre, debiter ni contrefaire lesdits Ouvrages ci-dessus exposés en tout ni en partie, ni d'en faire aucuns extraits sous quelque prétexte que ce soit d'augmentation, correction, changement de titre ou autrement, sans la permission expresse & par écrit dudit Exposant ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des exemplaires contrefaits, de six mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à nous, un tiers à l'Hôtel Dieu de Paris, l'autre tiers audit Exposant, & de tous dépens, dommages & interêts ; A la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Régistre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris dans trois mois de la date d'icelles ; Que l'impression desdits Ouvrages sera faite dans notre Royaume & non ailleurs, & que l'Impetrant se conformera en tout aux Reglemens de la Librairie, & notamment à celui du dix Avril 1725. & qu'avant que de les exposer en vente, les Manuscrits ou Imprimés qui auront servi de copie à l'impression desdits Ouvrages, seront remis dans le même état où les Approbations y auront été données ès mains de notre très-cher & feal Chevalier le Sieur Daguesseau, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres ; & qu'il en sera ensuite remis deux exemplaires de chacun dans notre Bibliotheque Publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre très-chèr & feal Chevalier le Sieur Daguesseau, Chancelier de France, Commandeur de nos ordres ; le tout à peine de nullité des Présentes : Du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir l'Exposant ou ses ayans cause pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empechement : Voulons que la copie desdites Présentes, qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin desdits Ouvrages, soit tenue pour duement signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & feaux Conseillers Secretaires, foi soit ajoûtée comme à l'original : Commandons au premier notre Huissier ou Sergent de faire pour l'exécution d'icelles tous Actes requis & néceffaires, sans demander autre permission, & nonobstant Clameur de Haro, Chartre Normande & Lettres à ce contraires ; Car tel est notre plaisir. Donné à Paris le trentiéme jour de Décembre, l'an de grace mil sept cens trente-neuf, & de notre regne le vingt-cinquiéme. Par le Roy en son Conseil,

SAINSON.

Registré sur le Registre dix de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 349. fol. 339. conformement aux anciens Reglemens, confirmés par celui du 28. Février 1723. A Paris le premier Février 1740.

SAUGRAIN, Sindic.



LA MESURE DES SURFACES ET DES SOLIDES, PAR L'ARITHMETIQUE DES INFINIS, ET LES CENTRES DE GRAVITE'.

LIVRE PREMIER.

Où l'on applique aux Surfaces & aux Solides les Principes de l'Arithmetique des Infinis.

CHAPITRE PREMIER.

Définitions & Principes.

DEFINITION PREMIERE.

1°. ON appelle *Puissances* d'une grandeur, les différens dégrés ausquels cette grandeur s'éleve en se multipliant elle-même successivement une fois, deux fois, trois fois, &c.... Soit, par exemple une grandeur que nous appellons *a*, sa premiere puissance est *a*, ou la grandeur elle-même; sa seconde puissance ou son quarré est *aa*, c'est-à-

dire la grandeur a multipliée par elle-même ; ſa troiſiéme puiſſance ou ſon cube eſt aaa, ou la grandeur a multipliée deux fois ſucceſſivement par elle-même ; ſa quatriéme puiſſance eſt $aaaa$; ſa cinquiéme $aaaaa$, & ainſi de ſuite à l'infini.

Pour exprimer ces Puiſſances d'une maniere plus courte, au lieu d'écrire aa, aaa, $aaaa$, &c. on écrit a^2, a^3, a^4, a^5, &c. en mettant un petit chiffre à droite, qui marque les différens dégrés auſquels la grandeur s'éleve.

Ces chiffres s'appellent *Expoſans* des puiſſances ; ainſi en commençant par la premiere puiſſance qu'on marque par a, ou par a^1, le chiffre 1 marque la premiere puiſſance ; le chiffre 2 marque la ſeconde ; le chiffre 3 la troiſiéme, & ainſi de ſuite juſqu'à la puiſſance infinie dont l'expoſant ſe marque de ce caractere ∞, de ſorte que a^∞ ſignifie la puiſſance infinie de la grandeur a.

Les Expoſans ont donné lieu à un calcul très-commode, lorſqu'il s'agit de multiplier ou de diviſer les puiſſances d'une grandeur les unes par les autres, de les élever à des dégrés plus hauts, ou d'en extraire les racines, ainſi qu'on va voir dans les regles que je vais en donner.

REGLES DU CALCUL DES EXPOSANS.

2°. *Pour multiplier une puiſſance d'une grandeur par une autre puiſſance de la même grandeur, il faut ajoûter les deux expoſans enſemble, & leur ſomme eſt l'expoſant du produit.*

Pour multiplier a^2 par a^3, on ajoûte l'expoſant 2 à l'expoſant 3, ce qui fait $2+3$ ou 5, & l'on écrit a^5 pour le produit. Car puiſque a^2 & a^3 ſont la même choſe que aa, & aaa, & que ſelon les regles du calcul algebrique, pour multiplier aa par aaa, il faut écrire $aaaaa$ qui eſt la même choſe que a^5, dont l'expoſant eſt $2+3$ ou 5, il s'enſuit que la puiſſance a^5 dont l'expoſant eſt la ſomme 5, des deux expoſans 2 & 3, eſt le produit des deux puiſſances a^2, a^3 ; par la même raiſon le produit de a^4 par a^3, eſt a^{4+3}, ou a^7 ; & ainſi des autres.

3°. *Pour diviſer une puiſſance d'une grandeur par une autre puiſſance de la même grandeur, il faut retrancher l'expoſant du diviſeur de l'expoſant du dividende, & le reſte eſt l'expoſant du quotient.*

Pour diviſer a^5 par a^3, on retranche l'expoſant 3 de l'expoſant 5, & le reſte $5-3$ ou 2, eſt l'expoſant du quotient qui par conſéquent eſt a^2. De même le quotient de a^7 diviſé par

a^4, est a^{7-4}, ou a^3, & ainsi des autres ; ce qui est évident, car a^5 divisé par a^3, est la même chose que *aaaaa* divisé par *aaa*, qui donne pour quotient *aa* ou a^2, &c.

4°. *Pour élever une puissance à une autre puissance, on multiplie l'exposant de la puissance par l'exposant de la puissance à laquelle elle doit être élevée, & le produit est la puissance qu'on cherche.*

Pour élever la puissance a^2 au quarré, ou à la seconde puissance dont l'exposant est 2, on multiplie l'exposant 2 par l'exposant 2, & le produit 4 est l'exposant de la puissance a^2 élevée à sa seconde puissance ; ainsi cette puissance élevée est a^4. Car a^2 est la même chose que *aa*, mais pour élever *aa* à sa seconde puissance, il faut multiplier *aa* par *aa*, ce qui fait *aaaa*, qui est la même chose que a^4 ; donc a^4 est la puissance a^2 élevée au quarré. De même pour élever a^3 à la quatriéme puissance, dont l'exposant est 4, il faut multiplier l'exposant 3 par l'exposant 4, & le produit 12 est l'exposant de la puissance a^3 élevée à sa quatriéme puissance, & par conséquent cette puissance élevée est a^{12}, & ainsi des autres.

DEFINITION II.

5°. On appelle *Racine* d'une puissance la grandeur, qui se multipliant elle-même, a produit cette puissance. La racine de a^2 est *a*, parce que *a* multiplié par *a* produit a^2. De même la racine cubique de a^3 est encore *a*, parce que *a* multiplié par *a*, donne a^2, & a^2 multiplié encore par *a* donne a^3, & ainsi des autres.

De même qu'on peut élever une grandeur à une suite infinie de puissances, de même aussi on peut en tirer une suite infinie de racines. Car cette grandeur pouvant être considérée comme un quarré, comme un cube, comme une quatriéme puissance, &c. il est indubitable que selon ces différentes manieres de la considerer, elle aura une racine cubique, une racine quatriéme, &c. . . . .

Les racines se distinguent en racines *rationnelles*, ou qu'on peut exprimer, comme la racine quarrée de 4 qui est 2, la racine cubique de a^3 qui est *a*, &c. & en racines *sourdes* & *irrationnelles* qu'on ne peut exprimer que par quelques signes, comme la racine quarrée de 3, la racine troisiéme de *a* qu'on exprime ordinairement en mettant le signe radical $\sqrt{}$ devant la grandeur dont on veut extraire la racine, & un petit chiffre

ſur le ſigne qui eſt l'expoſant de la racine qu'on veut tirer. Ainſi pour exprimer la racine troiſiéme de a, on écrit $\sqrt[3]{a}$, pour exprimer la racine quatriéme de 5 on écrit $\sqrt[4]{5}$, & de même des autres juſqu'à la racine infinie, qui ſe marque ainſi $\sqrt[\infty]{}$.

Quand on écrit ſimplement $\sqrt{}$, ce ſigne marque la racine quarrée qu'on peut exprimer auſſi en écrivant $\sqrt[2]{}$.

Comme les ſignes radicaux ſont extremément embarraſſans dans le calcul, on peut exprimer les racines d'une autre façon par le calcul des expoſans, ainſi qu'on va voir.

6°. *Pour extraire une racine d'une puiſſance, il faut diviſer l'expoſant de la puiſſance par l'expoſant de la racine, & le quotient eſt l'expoſant de la racine cherchée.*

Pour extraire la racine ſeconde ou quarrée de a^6, on diviſe l'expoſant 6 par l'expoſant 2, & le quotient $\frac{6}{2}$ ou 3 eſt l'expoſant de la racine cherchée, laquelle eſt par conſéquent $a^{\frac{6}{2}}$, ou a^3. Car puiſque pour élever a^3 à la ſeconde puiſſance, il faut multiplier l'expoſant 3 par l'expoſant 2, ce qui donne l'expoſant 6, il s'enſuit néceſſairement que pour tirer la racine quarrée de la puiſſance a^6 conſidérée comme une ſeconde puiſſance, on doit diviſer l'expoſant 6 par l'expoſant 2 pour avoir l'expoſant 3 de la racine a^3.

Pour tirer la racine troiſiéme de la puiſſance a^{12}, on écrit $a^{\frac{12}{3}}$ ou a^4, parce que l'expoſant 12 diviſé par l'expoſant 3, donne au quotient 4. Pour tirer la racine quatriéme de a ou de a^1, on écrit $a^{\frac{1}{4}}$, parce que l'expoſant 1 diviſé par l'expoſant 4 donne $\frac{1}{4}$ au quotient, & ainſi des autres.

D'où il ſuit, qu'au lieu d'exprimer les racines ſecondes, troiſiémes, quatriémes, &c. d'une grandeur a en écrivant $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$, &c. on peut écrire $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{4}}$, &c. & ſe paſſer par conſéquent des ſignes radicaux. De même au lieu de $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[2]{a^5}$, $\sqrt[4]{a^3}$, &c. on peut écrire $a^{\frac{2}{3}}$, $a^{\frac{5}{2}}$, $a^{\frac{3}{4}}$, &c. & ainſi des autres.

Des Expoſans négatifs, & de l'Expoſant 0.

7°. Les expoſans négatifs, c'eſt-à-dire, précédés du ſigne moins, viennent de la diviſion d'une puiſſance d'un dégré inférieur par une puiſſance d'un dégré ſupérieur. La puiſſance a^2 diviſée par la puiſſance a^3 ſelon les regles que nous venons d'établir donne a^{2-3}, ou a^{-1}, qui eſt une puiſſance dont l'expoſant

eſt négatif. De même a^1 diviſé par a^3 donne a^{1-3}, ou a^{-2}, dont l'expoſant eſt négatif, & ainſi des autres à l'infini.

Entre les expoſans négatifs, & les expoſans poſitifs, ſe trouve l'expoſant o qui vient de la diviſion d'une puiſſance par elle-même. a^1 diviſé par a^1 donne a^{1-1} ou a^0. De même a^2 diviſé par a^2, donne a^{2-2}, ou a^0 &c. Or cet expoſant × vaut toujours 1, car a diviſé par a donne un au quotient, de même que a^2 diviſé par a^2, ou a^3 diviſé par a^3, &c. parce qu'une puiſſance ne peut ſe contenir elle-même qu'une fois, & qu'ainſi a n'eſt qu'une fois dans a, non plus que a^2 dans a^2, &c.

× ce n'est pas l'exposant mais bien l'expression entière a^0 qui vaut 1.

Une même grandeur peut donc avoir une infinité de puiſſances avec l'expoſant poſitif, & une infinité de puiſſances avec l'expoſant négatif, & leur ordre eſt tel qu'on le voit ici.

$a^{-\infty}$, &c. $a^{-6}, a^{-5}, a^{-4}, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}$. a^0. $a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6$, &c. a^{∞}.

Les puiſſances dont l'expoſant eſt poſitif ſont des grandeurs qui vont en augmentant depuis a^0 juſqu'à a^{∞}, & celles dont l'expoſant eſt negatif, ſont des grandeurs qui vont en diminuant depuis a^0 juſqu'à $a^{-\infty}$. Pour en être convaincu, il n'y a qu'à ſuppoſer $a = 2$ & mettre par-tout ſa valeur, & alors on verra que les puiſſances a^0, a^1, a^2, a^3, &c. ſont 1. 2. 4. 8. &c. & vont en augmentant, & que les puiſſances a^0, a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, &c. ſont 1 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, &c. & vont en diminuant. Car ſi l'on diviſe a^0 par a^1, on aura a^{0-1}, ou a^{-1}, or a^0 ou 1 diviſé par a^1 ou 2, donne $\frac{1}{2}$; de même ſi l'on diviſe a^0 par a^2, on aura a^{0-2} ou a^{-2}, or a^0 ou 1 diviſé par a^2 ou 4 donne $\frac{1}{4}$, & ainſi des autres. De façon que cette ſuite exprimée en chiffres ſera

$a^{-\infty}$, &c. $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16, 32, &c. a^{∞}.

Où l'on voit que les puiſſances dont l'expoſant eſt négatif, ſont des fractions qui ont toutes l'unité pour numérateur, & dont les dénominateurs ſont la ſuite des puiſſances dont l'expoſant eſt poſitif. Ainſi au lieu d'exprimer les puiſſances dont l'expoſant eſt négatif en écrivant a^{-6}, a^{-5}, a^{-4}, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, on peut les exprimer de cette façon $\frac{1}{a^6}$, $\frac{1}{a^5}$, $\frac{1}{a^4}$, $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^1}$.

Donc les deux ſuites qu'on voit ici quoiqu'exprimées de différente maniere, ſont réellement la même ſuite.

$a^{-\infty}$, &c. $a^{-6}, a^{-5}, a^{-4}, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6$, &c. a^{∞}

$\frac{1}{a^{\infty}}$, &c. $\frac{1}{a^6}, \frac{1}{a^5}, \frac{1}{a^4}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^1}, a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6$, &c. a^{∞}

Dans la premiere les expoſans $a^{-\infty}$ &c. a^{-6}, a^{-5}, juſqu'à a^0 ſont négatifs; dans la ſeconde ces mêmes expoſans deviennent

positifs, mais les puissances à qui ils appartiennent deviennent les dénominateurs d'une fraction dont le numérateur est un.

De même les deux suites suivantes quoique differemment exprimées ne sont qu'une même suite qui exprime les racines de la grandeur *a*.

$\sqrt[\infty]{a}$, &c. $\sqrt[8]{a}$, $\sqrt[7]{a}$, $\sqrt[6]{a}$, $\sqrt[5]{a}$, $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[2]{a}$, a.

$a^{\frac{1}{\infty}}$, &c. $a^{\frac{1}{8}}$, $a^{\frac{1}{7}}$, $a^{\frac{1}{6}}$, $a^{\frac{1}{5}}$, $a^{\frac{1}{4}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{2}}$, a.

Dans la premiere l'exposant des racines est au-dessus du signe radical, & dans la seconde où le signe radical disparoît l'exposant de la racine divise l'exposant de la grandeur *a*.

Où il faut observer qu'il n'y a point de racine premiere, parce que de même que la premiere puissance de *a* n'est pas différente de la grandeur *a*, de même la premiere racine de cette grandeur n'est pas différente de cette grandeur.

DEFINITION III.

8°. La suite infinie des nombres naturels 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7, &c. qui commence par zero, & finit à l'infini, étant donnée, si l'on éleve chacun de ses termes au quarré, ou au cube, ou à la quatriéme puissance, &c. on aura autant de nouvelles suites qui seront la suite 0. 1. 4. 9. 16. 25. &c. des quarrés si chaque terme est élevé au quarré; la suite 0. 1. 8. 27. 64. 125. &c. des cubes, si chaque terme est élevé au cube; la suite 0. 1. 16. 81. &c. des quatriémes puissances, si chaque terme est élevé à la quatriéme puissance, & ainsi des autres à l'infini.

De même si on tire la racine 2e, ou 3e, ou 4e, &c. de chaque terme de la suite 0. 1. 2. 3. 4. 5. &c. on aura d'autres suites qui seront la suite $\sqrt[2]{0}$. $\sqrt[2]{1}$. $\sqrt[2]{2}$. $\sqrt[2]{3}$. $\sqrt[2]{4}$. &c. des racines quarrées des nombres naturels si on tire la racine quarrée de chaque terme; la suite $\sqrt[3]{0}$. $\sqrt[3]{1}$. $\sqrt[3]{2}$. $\sqrt[3]{4}$. &c. des racines cubiques si on tire les racines cubiques de chaque terme, & ainsi des autres.

De même si on tire la racine 3e, 4e, 5e, 6e &c. de chaque terme de la suite 0. 1. 4. 9. &c. des quarrés, on formera des nouvelles suites, qui seront la suite des racines troisiémes des quarrés; la suite des racines quatriémes, des racines cinquiémes, &c. & on peut faire la même chose à l'égard de la suite des cubes, de la suite des quatriémes puissances, &c.

De plus, ſi l'on ajoute chaque terme d'une ſuite à chaque terme d'une autre, ou qu'on retranche chaque terme de l'une de chaque terme de l'autre, ou qu'on multiplie les termes de l'une par les termes de l'autre, ou enfin qu'on diviſe les termes de l'une par les termes de l'autre, on formera autant d'autres ſuites, qui à leur tour en formeront d'autres, ſi on éleve leurs termes au quarré, au cube, à la quatriéme puiſſance, &c. ou ſi l'on tire les racines 2ᵉ, ou 3ᵉ, ou 4ᵉ, &c. de chacun de leur termes. Ce qui comme on voit peut ſe combiner en une infinité d'autres façons. Car on peut, par exemple, après avoir ajouté les termes d'une ſuite aux termes d'une autre, multiplier ou diviſer les ſommes par les termes d'une autre ſuite, &c.

Or ſi nous appellons o. *a*. *b*. *c*. *d*. *e*, &c. la ſuite o. 1. 2. 3. 4. 5, &c. l'expoſant des termes de cette ſuite ſera 1; car chacun de ſes termes eſt une premiere puiſſance. La ſuite des quarrés ſera o. a^2. b^2. c^2. d^2, e^2, &c. & l'expoſant de ſes termes ſera 2; la ſuite des cubes ſera o. a^3. b^3. c^3. d^3. e^3, &c. & l'expoſant de ſes termes ſera 3. & ainſi des autres ſuites des puiſſances de la premiere, & ſi on diviſe chaque terme de la premiere ſuite par lui-même, on aura $\frac{o}{o}$. $\frac{a}{a}$. $\frac{b}{b}$. $\frac{c}{c}$. $\frac{d}{d}$. $\frac{e}{e}$. &c. qui eſt la ſuite des unités, ou des grandeurs égales 1. 1. 1. 1. 1. 1, &c. dont l'expoſant ſera zero. Car a^1 diviſé par a^1 donne a^{1-1} ou a^0, de même que b^1 diviſé par b^1 donne b^{1-1} ou b^0, &c.

De même la ſuite des racines ſecondes ſera o. $a^{\frac{1}{2}}$. $b^{\frac{1}{2}}$. $c^{\frac{1}{2}}$. $d^{\frac{1}{2}}$. $e^{\frac{1}{2}}$, &c. dont l'expoſant eſt $\frac{1}{2}$, la ſuite des racines troiſiémes ſera o. $a^{\frac{1}{3}}$. $b^{\frac{1}{3}}$. $c^{\frac{1}{3}}$. $d^{\frac{1}{3}}$. $e^{\frac{1}{3}}$. &c. dont l'expoſant eſt $\frac{1}{3}$, & ainſi des autres.

De même encore les racines troiſiémes de la ſuite des quarrés ſera o. $a^{\frac{2}{3}}$. $b^{\frac{2}{3}}$. $c^{\frac{2}{3}}$. $d^{\frac{2}{3}}$. $e^{\frac{2}{3}}$. &c. dont l'expoſant eſt $\frac{2}{3}$; celles des racines quatriémes de la ſuite des quarrés ſera o. $a^{\frac{2}{4}}$. $b^{\frac{2}{4}}$. $c^{\frac{2}{4}}$. $d^{\frac{2}{4}}$. &c. dont l'expoſant eſt $\frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}$, & ainſi des autres racines des ſuites.

DEFINITION IV.

9°. L'objet de l'Arithmetique des Infinis eſt de trouver quel eſt le rapport de telle de ces ſuites que l'on voudra à ſon dernier ou plus grand terme multiplié par la ſomme des termes

Pour donner quelque ordre à une matiere aussi étendue, nous considererons d'abord les suites prises en elles-mêmes, de-là nous passerons aux suites composées, c'est-à-dire, qui se multiplient où se divisent les unes par les autres, ou qui sont les sommes, ou les restes de deux autres, &c. & par-tout nous ferons l'application des principes à des exemples de Géometrie, afin qu'on voye quelle est la fécondité de cette science, par laquelle seule il n'est presque point de surfaces ni de solides qu'on ne vienne à bout de mesurer.

CHAPITRE II.

Des Rapports des Suites simples, ou considérées en elles-mêmes.

PROPOSITION PREMIERE.

10. *LA Suite infinie des égaux* 1. 1. 1. 1. &c. *est à son dernier terme multiplié par le nombre des termes comme* 1 *à* 1. *La suite infinie* 0. 1. 2. 3. 4. &c. *est à son dernier terme multiplié par le nombre des termes comme* 1. *à* 2. *La suite des quarrés* 0. 1. 4. 9. 16. &c. *est à son dernier terme multiplié de la même façon comme* 1. *à* 3. *Celle des cubes* 0. 1. 8. 27. 64. &c. *comme* 1. *à* 4; *celle des quatriémes puissances comme* 1. *à* 5. *& ainsi de suite à l'infini.*

Nous avons démontré cette proposition directement par le moyen de l'Algébre dans l'*Arithmetique des Géométres*, qui se vend à Paris chez Jombert Libraire, ruë S. Jacques. Mais comme la longueur & la difficulté du calcul pourroit ici dégouter les Commençans en faveur desquels je me fais toujours un plaisir d'écrire, je vais employer la voye de l'induction qui porte avec elle sa clarté.

Premierement donc, la suite infinie des égaux 1. 1. 1. 1. 1. &c. est à son dernier terme multiplié par le nombre des termes comme 1 à 1, ce qui est évident; car le dernier terme de cette suite est 1, & 1 multiplié par le nombre des termes, est la même chose que 1 pris autant de fois qu'il y a de termes; or 1 pris autant de fois qu'il y a de termes, est la même chose que la suite 1, 1, 1, 1, &c. donc la suite est égale au dernier

nier terme multiplié par le nombre des termes, & par conséquent le rapport de l'un à l'autre est comme 1 à 1.

En second lieu, la suite infinie 0. 1. 2. 3. 4. 5. &c. est au dernier terme multiplié par le nombre des termes comme 1 à 2. Car la somme des deux premiers termes 0 + 1 est 1, & le dernier terme 1 multiplié par le nombre des termes qui est 2 donne 2, donc la somme 1, est au dernier terme multiplié par le nombre des termes comme 1 à 2.

$$\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+2}{2+2+2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+2+3}{3+3+3+3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+2+3+4}{4+4+4+4+4} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

Prenons de même les trois premiers termes 0, 1, 2, leur somme est 3, & le dernier terme 2 multiplié par le nombre des termes 3 est 6; ainsi le rapport de l'un à l'autre est comme 3 à 6, ou comme 1 à 2.

Prenons les quatre premiers termes 0. 1. 2. 3. leur somme est 6, & le dernier terme 3 multiplié par le nombre des termes 4, est 12; donc le rapport de l'un à l'autre est comme 6 à 12, ou comme 1 à 2.

Et continuant ainsi de prendre un plus grand nombre de termes, vous trouverez toujours que la somme est au dernier terme multiplié par le nombre de termes comme 1 à 2; donc puisqu'en avançant toujours ce rapport ne varie jamais, il s'ensuit que la suite étant devenuë infinie, sera encore au dernier terme multiplié par le nombre des termes comme 1 à 2.

En troisiéme lieu, la suite infinie 0. 1. 4. 9. 16. 25, &c. des quarrés est au plus grand & dernier terme, &c. comme 1 à 3. Prenons d'abord les deux premiers termes 0. 1, leur somme est 1, & le dernier terme pris autant de fois qu'il y a de terme est 2; ainsi leur rapport est $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$, donc il y a un $\frac{1}{6}$ au-dessus du tiers.

$$\frac{0.\ 1}{1,\ 1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{0.\ 1.\ 4.}{4,\ 4,\ 4,} = \frac{5}{12} = \frac{4}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$$

$$\frac{0.\ 1.\ 4.\ 9.}{9\ 9\ 9\ 9} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18} = \frac{6}{18} + \frac{1}{18} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$$

$$\frac{0.\ 1.\ 4.\ 9.\ 16}{16.\ 16.\ 16.\ 16.\ 16} = \frac{30}{80} = \frac{3}{8} = \frac{9}{24} = \frac{8}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{3} + \frac{1}{24}$$

Prenons de même les trois premiers termes 0. 1. 4, leur somme est 5, & le dernier terme 4 pris trois fois est 12, donc

le rapport est $\frac{5}{12}$ ou $\frac{4}{12} + \frac{1}{12}$, c'est-à-dire un tiers plus $\frac{1}{12}$; ainsi il y a un douziéme au-dessus du tiers, mais ce douziéme est moins que $\frac{1}{6}$ que nous avons trouvé en ne prenant que deux termes.

Prenons les quatre premiers o. 1. 4. 9, leur somme est 14, & le dernier terme pris quatre fois est 36. Le rapport est donc $\frac{14}{36}$, ou $\frac{7}{18}$, ou $\frac{6}{18} + \frac{1}{18}$, c'est-à-dire $\frac{1}{3}$ plus $\frac{1}{18}$. Ainsi il y a $\frac{1}{18}$ au-dessus du tiers, mais ce $\frac{1}{18}$ est moindre que le douziéme que nous avons trouvé en ne prenant que trois termes, & continuant à prendre un plus grand nombre de termes, on trouvera toujours que l'excès au-dessus d'un tiers sera une fraction qui ira en diminuant, c'est-à-dire que le dénominateur de la fraction augmentant toujours de 6, cette fraction sera $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{36}$, $\frac{1}{42}$, $\frac{1}{48}$, &c. de sorte que quand le nombre des termes sera infini, la fraction sera $\frac{1}{\infty}$ ou un infinitiéme, c'est-à-dire un infiniment petit lequel doit être regardé comme zéro, & par conséquent le rapport de la somme des termes au plus grand multiplié par le nombre des termes sera $\frac{1}{3}$, ou comme 1 à 3.

En quatriéme lieu, la suite infinie o. 1. 8. 27. 64, &c. des troisiémes puissances, est au plus grand & dernier terme multiplié par le nombre des termes comme 1 à 4.

Prenons d'abord les deux premiers termes o. 1. leur somme est 1, & le dernier terme pris autant de fois qu'il y a de termes est 2;

$$\frac{0.\ 1}{1.\ 1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{0.\ 1.\ 8}{8.\ 8.\ 8} = \frac{9}{24} = \frac{6}{24} + \frac{3}{24} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

$$\frac{0.\ 1.\ 8.\ 27}{27.\ 27.\ 27.\ 27} = \frac{36}{108} = \frac{4}{12} = \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$$

$$\frac{0.\ 1.\ 8.\ 27.\ 64}{64.\ 64.\ 64.\ 64.\ 64} = \frac{100}{320} = \frac{5}{16} = \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$$

le rapport est donc $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$, de sorte que l'excès au-dessus du quart est un quart.

Prenons les trois premiers termes o. 1. 8, leur somme est 9, & le dernier terme 8 pris trois fois fait 24. Le rapport est donc $\frac{9}{24}$ ou $\frac{6}{24} + \frac{3}{24}$, c'est-à-dire $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$; ainsi l'excès au-dessus du quart est un huitiéme, & cet excès est moindre que l'excès un quart que nous avons trouvé en ne prenant que deux termes.

Prenons les quatre premiers termes o. 1. 8. 27, leur somme est 36, & le dernier terme 27 pris quatre fois est 108. Le rap-

port est donc $\frac{36}{108}$, ou $\frac{4}{12}$, ou $\frac{3}{12} + \frac{1}{12}$, c'est-à-dire $\frac{1}{4}$ plus $\frac{1}{12}$, & l'excès au-dessus du quart est $\frac{1}{12}$, lequel est moindre que l'excès $\frac{1}{8}$ que nous avons trouvé en ne prenant que trois termes, & continuant ainsi à prendre un plus grand nombre de termes, on trouvera que l'excès au-dessus du quart deviendra moindre & sera $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{20}$, &c. le dénominateur augmentant toujours de 4; de façon que quand le nombre des termes sera infini, l'excès au-dessus du quart sera $\frac{1}{\infty}$, ou un infiniment petit, & que par conséquent le rapport sera précisément $\frac{1}{4}$ ou comme 1 à 4.

En cinquiéme lieu, la suite infinie 0. 1. 16. 81. 256, &c. des quatriémes puissances est au dernier terme multiplié par le nombre des termes comme 1 à 5.

Prenons les deux premiers termes 0. 1. leur somme est 1, & le dernier terme multiplié par 2 fait 2. Le rapport est donc $\frac{1}{2}$ ou $\frac{5}{10}$, c'est-à-dire $\frac{2}{10} + \frac{3}{10}$, ou $\frac{1}{5} + \frac{3}{10}$, & l'excès au-dessus du $\frac{1}{5}$ est $\frac{3}{10}$.

$$\frac{0.\ 1}{1.\ 1} = \frac{1}{2} = \frac{5}{10} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10} = \frac{1}{5} + \frac{3}{10}$$

$$\frac{0.\ 1.\ 16}{16.\ 16.\ 16} = \frac{17}{48} = \frac{85}{240} = \frac{48}{240} + \frac{37}{240} = \frac{1}{5} + \frac{37}{240}$$

$$\frac{0.\ 1.\ 16.\ 81}{81.\ 81.\ 81.\ 81} = \frac{98}{324} = \frac{49}{162} = \frac{245}{810} = \frac{162}{810} + \frac{83}{810} = \frac{1}{5} + \frac{83}{810}$$

$$\frac{0.\ 1.\ 16.\ 81.\ 256}{256.\ 256.\ 256.\ 256.\ 256} = \frac{354}{1280} = \frac{177}{640} = \frac{885}{3200} = \frac{640}{3200} + \frac{245}{3200} = \frac{1}{5} + \frac{245}{3200}$$

Prenons les trois premiers termes 0. 1. 16, leur somme est 17, & le dernier terme multiplié par 3 est 48, le rapport est donc $\frac{17}{48}$, ou bien en multipliant toute la fraction par 5, $\frac{85}{240}$, c'est-à-dire $\frac{48}{240} + \frac{37}{240}$, ou $\frac{1}{5} + \frac{37}{240}$, & l'excès au-dessus de $\frac{1}{5}$ est $\frac{37}{240}$, ou environ $\frac{1}{6}$, qui est moindre que l'excès $\frac{3}{10}$ que nous avons trouvé en ne prenant que deux termes.

Prenons les quatre premiers 0. 1. 16. 81. leur somme est 98, & le dernier terme multiplié par le nombre des termes est 324. Le rapport est donc $\frac{98}{324}$, ou $\frac{49}{162}$, ou en multipliant tout par 5, $\frac{245}{810}$, c'est-à-dire $\frac{162}{810} + \frac{83}{810}$, ou $\frac{1}{5} + \frac{83}{810}$, & l'excès au-dessus de $\frac{1}{5}$ est $\frac{83}{810}$, ou environ $\frac{1}{10}$, lequel est moindre que l'excès $\frac{37}{240}$ que nous avons trouvé en ne prenant que trois termes; & continuant à prendre un plus grand nombre de ter-

mes; on trouvera toujours que l'excès au-dessus de $\frac{1}{5}$ ira en diminuant, & que par conséquent lorsque le nombre des termes sera infini le rapport sera précisément $\frac{1}{5}$.

En faisant la même induction, on trouvera que la suite infinie des cinquiémes puissances est au dernier terme multiplié par le nombre des termes comme 1 à 6, que celle des sixiémes puissances est à son dernier terme comme 1 à 7, & ainsi de suite à l'infini.

REMARQUE.

11°. On doit observer en passant que lorsque nous avons fait l'induction pour la suite infinie des quarrés, nous avons trouvé que les excès au-dessus du tiers étoient $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{24}$, &c. & que les dénominateurs 6, 12, 18, 24, &c. de ces excès sont toujours égaux à la racine quarrée du dernier terme correspondant multipliée par 6. Par exemple, quand l'excès est $\frac{1}{6}$ le dernier terme est 1, dont la racine est 1, laquelle multipliée par 6, donne 6 qui est le dénominateur de l'excès $\frac{1}{6}$. De même quand l'excès est $\frac{1}{12}$, le dernier terme est 4, dont la racine est 2, laquelle multipliée par 6 donne 12 qui est le dénominateur de l'excès $\frac{1}{12}$, &c. ainsi des autres.

De la même façon, lorsque nous avons fait l'induction pour la suite infinie des cubes, nous avons trouvé que les excès au-dessus du quart étoient $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{16}$, &c. dont les dénominateurs sont toujours égaux à la racine cubique du dernier terme correspondant multipliée par 4; par exemple quand l'excès est $\frac{1}{4}$, le dernier terme est 1, dont la racine cubique est 1, & cette racine multipliée par 4 donne 4 qui est le dénominateur de l'excès $\frac{1}{4}$. De même quand l'excès est $\frac{1}{8}$, le dernier terme est 8, dont la racine cubique est 2, laquelle multipliée par 4, donne 8 qui est le dénominateur de l'excès $\frac{1}{8}$, & ainsi des autres. Cette remarque nous servira dans la suite.

Quand aux suites des puissances plus élevées, il n'est pas si facile de trouver ce que c'est que l'excès que l'on trouve en faisant l'induction; mais ce qui nous suffit ici, c'est que cet excès diminue toujours, de sorte qu'il doit absolument disparoître de même que les précedens lorsque la suite devient infinie.

COROLLAIRE I.

12°. Les rapports de la suite des égaux, de celle des nombres

o. 1. 2. 3. 4, &c. de celle de leurs quarrés, ou de leurs cubes, &c. à leur plus grand terme multiplié par le nombre des termes sont donc $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, &c. & par conséquent leurs dénominateurs sont dans la progression arithmetique des nombres naturels 1. 2. 3. 4. 5. 6, &c. Or les puissances de ces différentes suites sont en progression géometrique, car a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, &c. forment une progression géométrique, dont l'exposant est a; donc quand les puissances des suites sont dans cette progression géometrique, les rapports de ces suites à leurs plus grand termes multipliés par le nombre des termes ont pour dénominateurs la progression arithmetique des nombres 1. 2. 3. 4, &c. & delà on tire une regle facile de trouver quel est le rapport d'une suite de quelques puissances que ce soit. Car si on veut sçavoir par exemple quel est le rapport de la suite infinie des sixiémes puissances des nombres o. 1. 2. 3. 4, &c. on examine par exemple quel rang la puissance a^6 tient dans la progression géométrique a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, & comme c'est le septiéme à cause que a^0 occupe la premiere place, on prend le septiéme terme de la progression arithmetique 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7, &c. lequel est 7, & l'on dit que le rapport de la suite infinie des sixiémes puissances au dernier terme multiplié par le nombre des termes est $\frac{1}{7}$, ou comme 1 à 7, & ainsi des autres.

COROLLAIRE. II.

13°. Les dénominateurs des rapports ci-dessus surpassent toujours d'une unité l'exposant des suites à qui ils appartiennent. Ainsi l'exposant de la suite des égaux étant zero, le dénominateur du rapport de cette suite à son dernier terme multiplié par le nombre de termes est o+1 ou 1. De même l'exposant de la suite des nombres o. 1. 2. 3, &c. étant 1, le dénominateur de son rapport est 1+1 ou 2, & ainsi des autres. D'où l'on tire une regle encore plus facile que la précedente de trouver le rapport d'une suite infinie de quelques puissances que ce soient. Car si l'on demande par exemple quel est le rapport de la suite infinie des huitiémes puissances des nombres o. 1. 2. 3. 4, &c. comme l'exposant de la huitiéme puissance est 8, on ajoute 1 à 8, ce qui fait 9, & l'on dit que le rapport de cette suite à son plus grand terme multiplié par le nombre des termes est $\frac{1}{9}$, ou comme 1 à 9, & ainsi des autres.

PROPOSITION II.

14°. *Le rapport d'une suite infinie de racines quarrées à son dernier terme multiplié par le nombre des termes, a pour dénominateur un nombre moyen arithmetique entre le dénominateur 1 du rapport $\frac{1}{1}$ des égaux, & le dénominateur du rapport de la suite dont cette racine est extraite.*

Le rapport d'une suite infinie de racines cubes a pour dénominateur le premier de deux moyens arithmetiques entre le dénominateur 1, & le dénominateur du rapport de la suite dont on extrait la racine.

Le rapport d'une suite infinie de racines quatriémes a pour dénominateur le premier de trois moyens arithmetiques entre le dénominateur 1, & le dénominateur du rapport de la suite dont on extrait la racine, & ainsi de suite augmentant toujours le nombre des moyens arithmetiques, à mesure que l'exposant des racines augmente.

Cette proposition est une suite de la précedente. Car les racines quarrées de la suite infinie des quarrés 0. 1. 4. 9. 16, &c. composent la suite infinie 0. 1. 2. 3. 4, &c. or le dénominateur du rapport des quarrés est 3, & celui de la suite infinie 0. 1. 2. 3, &c. est 2 lequel est moyen arithmetique entre le dénominateur 1 & le dénominateur 3. Donc, &c.

De même les racines cubiques de la suite infinie des cubes 0. 1. 8. 27. 64, &c. composent la même suite 0. 1. 2. 3. 4, &c. or le dénominateur du rapport des cubes est 4, & celui de la suite 0. 1. 2. 3. 4, &c. est 2, lequel est le premier des deux moyens arithmetiques 2, 3, qui sont entre le dénominateur 1 & le dénominateur 4. Donc, &c.

De même encore les racines quatriémes de la suite infinie 0. 1. 16. 81, &c. des quatriémes puissances composent la suite 0. 1. 2. 3. 4, &c. Or le dénominateur du rapport des quatriémes puissances est 5, & le dénominateur du rapport de la suite 0. 1. 2. 3. 4, &c. est 2, lequel est le premier des trois moyens arithmetiques 2, 3, 4 qui se trouvent entre le dénominateur 1 & le dénominateur 5, donc, &c. & ainsi des autres.

COROLLAIRE I.

15°. Donc pour trouver le rapport de la suite des racines $\sqrt[3]{0}$. $\sqrt[3]{1}$. $\sqrt[3]{2}$. $\sqrt[3]{3}$. $\sqrt[3]{4}$, &c. des nombres 0. 1. 2. 3. 4, &c. il faut prendre un autre moyen arithmetique entre le dénominateur 1 du rapport $\frac{1}{1}$ des égaux, & le dénominateur 2 du rapport $\frac{1}{2}$ des nombres 0. 1. 2. 3. 4, &c. & ce moyen arithme-

tique qui est $\frac{3}{2}$ sera le dénominateur du rapport des racines. Ainsi la suite infinie des racines $\sqrt{0}.\ \sqrt{1}.\ \sqrt{2}.\ \sqrt{3}.\ \sqrt{4}$, &c. sera à la derniere multipliée par le nombre des termes comme 1 à $\frac{3}{2}$, ou comme $\frac{2}{2}$ à $\frac{3}{2}$, ou comme 2 à 3.

De même pour trouver le rapport de la suite infinie des racines troisiémes $\sqrt[3]{0}.\ \sqrt[3]{1}.\ \sqrt[3]{2}$, &c. des nombres 0. 1. 2. 3, &c. il faut prendre deux moyens arithmetiques entre le dénominateur 1 & le dénominateur 2, lesquels sont $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, & le premier $\frac{4}{3}$ sera le dénominateur du rapport des racines cubiques des nombres 0. 1. 2. 3, &c. Donc la suite de ces racines sera à la derniere multipliée par le nombre des termes comme 1 à $\frac{4}{3}$, ou comme $\frac{3}{3}$ à $\frac{4}{3}$, ou comme 3 à 4.

De même pour trouver le rapport de la suite des racines quatriémes des cubes 0. 1. 8. 27, &c. il faut prendre trois moyens arithmetiques $\frac{7}{4}$, $\frac{10}{4}$, $\frac{13}{4}$, entre le dénominateur 1 & le dénominateur 4 du rapport des cubes, & le premier de ces moyens $\frac{7}{4}$ sera le dénominateur du rapport des racines quatriémes des cubes 0. 1. 8. 27, &c. Ainsi la suite de ces racines sera à la plus grande multipliée par le nombre des termes comme 1 à $\frac{7}{4}$, ou comme $\frac{4}{4}$ à $\frac{7}{4}$, ou comme 4 à 7, & ainsi des autres.

J'ai enseigné dans l'*Arithmétique des Géometres* la maniere de prendre entre deux nombres tant de moyens arithmetiques qu'on voudra, ainsi je n'en dirai rien pour le present d'autant plus qu'on peut s'en passer par le moyen du Corollaire suivant.

COROLLAIRE II.

16. Les dénominateurs des rapports des suites infinies de racines quelconques surpassent toujours l'exposant de ces racines d'une unité. Ainsi les racines quarrées des nombres 0. 1. 2. 3. 4, &c. ayant pour exposant $\frac{1}{2}$, si on ajoute 1 à cet exposant, ce qui fera $\frac{3}{2}$, on aura le dénominateur du rapport de ces racines, & en effet nous avons trouvé dans le Corollaire précédent que la suite de ces racines est à la plus grande multipliée par le nombre des termes comme 1 à $\frac{3}{2}$, ou comme 2 à 3.

De même les racines cubiques des nombres 0. 1. 2. 3, 4, &c. ayant pour exposant $\frac{1}{3}$, si on ajoute 1 à cet exposant ce qui fera $\frac{4}{3}$, on aura le dénominateur du rapport de ces racines. Et en effet par le Corollaire précédent la suite de ces racines est à la plus grande multipliée par le nombre des termes comme 1 à $\frac{4}{3}$, ou comme 3 à 4.

De même encore les racines quatriémes des cubes 0. 1. 8.

27, &c. ayant pour exposant $\frac{3}{4}$, si on ajoute 1 à cet exposant, ce qui fera $\frac{7}{4}$, on aura le dénominateur du rapport de ces racines. Et effectivement on a vu ci-dessus que la suite de ces racines est à la plus grande multipliée par le nombre des termes comme 1 à $\frac{7}{4}$, ou comme 4 à 7, & ainsi des autres.

C'est en suivant les regles que nous venons de donner dans ces deux propositions qu'on a calculé la Table suivante qui marque les rapports des différentes suites des puissances, & celui des suites de leur différentes racines.

TABLE

Pour les Rapports des Suites.

	Rapport.	Des Racines quarrées.	Des Racines cubiques.	Des Racines quatriém.	Des Racines cinquiém.	Des Racines sixiémes.	Des Racines septiémes.	Des Racines huitiémes.	Des Racines neuviém.	Des Racines dixiémes.
Des Egaux.	1/1	2/2	3/3	4/4	5/5	6/6	7/7	8/8	9/9	10/10
Des premieres Puissanc.	1/2	2/3	3/4	4/5	5/6	6/7	7/8	8/9	9/10	10/11
Des Quarrés.	1/3	2/4	3/5	4/6	5/7	6/8	7/9	8/10	9/11	10/12
Des Cubes.	1/4	2/5	3/6	4/7	5/8	6/9	7/10	8/11	9/12	10/13
Des quatriém. Puissanc.	1/5	2/6	3/7	4/8	5/9	6/10	7/11	8/12	9/13	10/14
Des cinquiém Puissanc.	1/6	2/7	3/8	4/9	5/10	6/11	7/12	8/13	9/14	10/15
Des sixiémes Puissanc.	1/7	2/8	3/9	4/10	5/11	6/12	7/13	8/14	9/15	10/16
Des septiémes Puissanc.	1/8	2/9	3/10	4/11	5/12	6/13	7/14	8/15	9/16	10/17
Des huitiémes Puissanc.	1/9	2/10	3/11	4/12	5/13	6/14	7/15	8/16	9/17	10/18
Des neuviém. Puissanc.	1/10	2/11	3/12	4/13	5/14	6/15	7/16	8/17	9/18	10/19
Des dixiémes Puissanc.	1/11	2/12	3/13	4/14	5/15	6/16	7/17	8/18	9/19	10/20

Le

Le premier rang perpendiculaire à gauche marque les rapports des égaux, des premieres puissances, secondes, troisiémes, quatriémes, &c. Ainsi pour trouver par exemple le rapport de la suite infinie des neuviémes puissances des nombres 0. 1. 2. 3, &c. il faut prendre le rapport $\frac{1}{10}$ qui est dans la celulle, à côté de laquelle est écrit *neuviémes Puissances*, & ce rapport marquera que cette suite est à son dernier terme multipliée par le nombre des termes, comme 1 est à 10, & ainsi des autres.

Le second rang perpendiculaire marque le rapport des racines quarrées des suites du premier rang; le troisiéme, marque le rapport des racines troisiémes des mêmes suites du premier rang, & ainsi des autres rangs. Pour trouver donc le rapport, par exemple, de la suite infinie des racines quatriémes des cinquiémes puissances, il faut prendre dans le rang perpendiculaire des racines quatriémes la celulle qui est vis-à-vis les cinquiémes puissances, & le rapport $\frac{4}{9}$ qui est dans cette celulle, marquera que la suite infinie des racines quatriémes des cinquiémes puissances, est à son dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme 4 à 9. De même si l'on veut trouver le rapport des racines sixiémes des quatriémes puissances, on cherchera dans le rang perpendiculaire des racines sixiémes la celulle qui est vis-à-vis les quatriémes puissances, & le rapport $\frac{6}{10}$ écrit dans cette celulle marquera que la suite infinie des racines sixiémes des quatriémes puissances, est à son dernier terme multiplié par le nombre des termes comme 6 est à 10, & de même des autres.

APPLICATION

Des Principes précédens à la Géometrie.

DEFINITION V.

17. On appelle *Elemens* d'une ligne les petites parties égales & infiniment petites dont on conçoit qu'elle est composée. Ces Elemens doivent être égaux entr'eux, non-seulement dans une même ligne, mais encore dans toutes les lignes qu'on compare entr'elles pour juger de leur grandeur. Ainsi une ligne double, d'un autre, triple, quadruple, &c. doit contenir deux fois, trois fois, quatre fois autant d'Elemens que cette ligne, ce qui n'empêche pas qu'on ne puisse dire en d'autres occasions qu'une

ligne quelque petite qu'elle soit, peut être divisée en autant de parties que la plus grande ligne, mais alors les parties de l'une sont simplement proportionnelles aux parties de l'autre, & non pas égales, & l'on ne peut s'en servir que dans les propositions où il s'agit de prouver que les lignes sont proportionnelles, & non dans celles où il s'agit de leur égalité ou de leur inégalité, parce qu'alors les Elemens servent de mesure, & que les mesures doivent être toujours uniformes.

DEFINITION VI.

18. Les Elemens d'une surface sont des lignes dont on conçoit qu'elle est remplie.

Ces Elemens doivent être 1°. d'une épaisseur égale, & infiniment petite, 2°. tous paralelles entr'eux, afin qu'ils ne laissent point de vuide. 3°. On doit juger de leur épaisseur par les parties qu'elles prennent sur une ligne qui leur est perpendiculaire. 4°. La somme de leur épaisseur totale doit s'estimer par la somme des parties qu'elles prennent sur cette perpendiculaire.

Soit par exemple le rectangle ABCD (*Fig.* 1.) dont les lignes EF, GH, &c. sont les Elemens qui la remplissent. Il est évident 1°. que ces Elemens doivent être paralelles, & se toucher dans toute leur longueur, car autrement ils laisseroient des vuides, & ne rempliroient pas le rectangle. 2°. Que leur épaisseur doit être égale si l'on veut juger de la quantité que le rectangle en contient, parce qu'alors ces Elemens servent de mesure, & que d'ailleurs les grandeurs qu'on additionne doivent être uniformes. 3°. Je dis qu'on doit juger de l'épaisseur de ces Elemens par les parties qu'elles prennent sur la ligne AB qui leur est perpendiculaire, & non par celles qu'elles prennent sur les lignes AI, AM, AN, &c. qui leur sont obliques. Car puisque ces Elemens couvrent totalement le rectangle ABCD, il est visible qu'ils couvrent aussi les droites AB, AI, AM, AN, & que par conséquent elles divisent ces droites en un même nombre de parties : mais la droite AB étant perpendiculaire sur BC, est plus courte que chacune des droites AI, AM, AN, &c. donc les parties que les Elemens prennent sur AB, sont plus petites que les parties qu'elles prennent sur AI, AM, AN. Et comme AI étant moins oblique sur BC, que AM est plus courte que AM, il s'ensuit encore que les parties que les Elemens prennent sur AI sont plus petites que celles qu'elles prennent

sur AM, & par la même raison celles qu'elles prennent sur AM, sont plus petites que celles qu'elles prennent sur AN, & ainsi de suite. Donc puisque les Elemens prennent sur les obliques des parties plus ou moins grandes selon l'obliquité, & que les parties qu'elles prennent sur la perpendiculaire sont les plus courtes, il faut nécessairement prendre celles-ci pour la mesure de leur épaisseur d'autant plus qu'en fait de mesure on prend le plus court chemin. D'où il suit 4°. que la mesure de leur épaisseur totale doit être la perpendiculaire AB qu'ils couvrent.

DEFINITION VII.

19. Les *Elemens* d'un Solide sont les surfaces paralelles & infiniment proches dont on conçoit que ce Solide est composé.

Si par tous les points de la hauteur AB du solide ABCDEFG (*Fig.* 2.) on fait passer des plans paralelles à la base, ces plans couperont le solide en une infinité de surfaces qui seront ses Elemens, & dont la somme sera égale au solide. L'épaisseur de ces surfaces doit s'estimer par l'épaisseur des parties qu'elles prennent sur la hauteur AB qui leur est perpendiculaire, & leur épaisseur totale par la hauteur totale qu'elles couvrent, par les raisons que nous avons dites ci-dessus.

Au reste ceci n'empêche pas qu'on ne puisse diviser le plus petit plan, ou le moindre solide en autant de parties que le plus grand plan, ou le plus grand solide; mais alors ce sont des parties proportionnelles, & non pas des parties égales, & l'on ne se sert de ces parties que lorsqu'il s'agit de prouver que les plans où les solides sont proportionnels entr'eux, & non lorsqu'il s'agit de leur égalité ou de leur inégalité.

PROPOSITION III.

20. *Trouver l'aire d'un rectangle* ABCD (*Fig.* 3. & 4.).

Multipliez la base AD par la hauteur AB, & le produit sera l'aire cherchée.

DEMONSTRATION.

Concevez que de tous les points de la hauteur AB (*Fig.* 3.) soient tirées des paralelles à la base AD, ces paralelles couvriront totalement l'aire du rectangle qui par conséquent sera égal à leur somme. Or ces paralelles sont toutes égales entr'elles

à cause qu'elles sont perpendiculaires entre les côtés AB, CD qui sont paralelles, donc ces paralelles sont entr'elles comme la suite infinie des égaux 1. 1. 1. 1. 1, &c. mais la suite des égaux est au dernier terme multiplié par le nombre des termes comme 1 à 1. Donc la somme de ces paralelles est égale à la derniere AD multipliée par le nombre des termes. Or le nombre des termes est la hauteur AB, car il y a autant de paralelles que la hauteur AB contient de points, & leur épaisseur est égale à l'épaisseur de ces points, donc la somme des paralelles ou le rectangle ABCD est égale à la base AD multipliée par la hauteur AB.

REMARQUE.

21. Au lieu de prendre les Elemens paralelles à la base, on peut les prendre paralelles à la hauteur AB, en concevant que de tous les points de la base AD (*Fig.* 4.) soient élevées des paralelles à la hauteur AB, & alors le nombre des termes sera la base AD, & la somme des paralelles, ou le rectangle sera égal à la hauteur AB multipliée par la base AD.

COROLLAIRE I.

22. Pour trouver l'aire d'un Paralellogramme ABCD (*Fig.* 5.) on élevera une perpendiculaire EB sur AB, & l'on multipliera la base par cette perpendiculaire. Car si l'on conçoit que de tous les points de la perpendiculaire EB soient tirées des paralelles à la base, la somme de ces paralelles sera égale au Paralelogramme, & le nombre des termes sera la perpendiculaire EB. Mais ces paralelles seront égales entr'elles, à cause qu'elles sont entre les paralelles AB, CD, donc leur somme sera égale à la base AD, multipliée par le nombre des termes EB.

Ou bien on tirera une perpendiculaire BE (*Fig.* 6.) entre les côtés AB, BC, & l'on multipliera le côté AB par la perpendiculaire BE. Car si l'on conçoit que de tous les points de BE soient tirées des paralelles au côté AB, ces paralelles seront égales entr'elles, parce qu'elles sont entre les paralelles AD, BC, & leur somme sera égale au Paralellogramme. Or le nombre des termes sera BE; donc la somme sera égale à AB multipliée par BE.

COROLLAIRE II.

23. Et ceci eſt encore vrai quand même la perpendiculaire BE tirée ſur la baſe ou ſur un des côtés tomberoit hors du paralellogramme (*Fig.* 7. 8.). Car alors les parties des paralelles compriſes dans le paralellogramme ſeront toujours égales entr'elles, & le nombre des termes ſera toujours la perpendiculaire, parce qu'il y aura autant de paralelles que de points dans cette perpendiculaire, & que l'épaiſſeur des paralelles ſera égale à l'épaiſſeur de ces points.

PROPOSITION IV.

24. *Trouver la ſolidité d'un Paralellepipede* (*Fig.* 2.)

Si le Paralellepipede eſt droit, c'eſt-à-dire ſi ſa hauteur AB eſt perpendiculaire ſur ſa baſe AFEH, multipliez la baſe par la hauteur, & le produit ſera la ſolidité cherchée.

DEMONSTRATION.

Concevez que par tous les points de la hauteur AB, il paſſe des plans paralelles à la baſe. Ces plans ſeront tous égaux entr'eux & à la baſe à cauſe qu'ils ſont compris entre les quatre paralelles AB, FG, ED, HC, & le nombre des termes ſera la hauteur AB, à cauſe qu'il y a autant de plans que de points dans cette hauteur, & que l'épaiſſeur de ces plans eſt égale à l'épaiſſeur des points. Donc ces plans étant entr'eux comme la ſuite infinie des égaux 1. 1. 1. 1, &c. leur ſomme ou le paralellepipede ſera égal à la baſe AFHE multipliée par le nombre des termes ou par la hauteur AB.

Si le Paralellepipede eſt incliné (*Fig.* 9.) on tirera une perpendiculaire BH de ſon ſommet ſur ſa baſe prolongée même s'il le faut, & l'on multipliera ſa baſe par ſa hauteur. Car ſi l'on conçoit que par tous les points de la perpendiculaire BH, il paſſe des plans paralelles à la baſe, les parties de ces plans compriſes entre les côtés du Paralellepipede ſeront toutes égales entr'elles, & le nombre des termes ſera la perpendiculaire BC. Donc, &c.

COROLLAIRE.

25. Les Primes & les cylindres ſoit droits, ſoit inclinés, ſe meſureront de la même façon.

PROPOSITION V.

26. *Trouver la surface d'un Paralellepipede.*

Si le Paralellepipede est droit, multipliez le contour AFEH (*Fig.* 2.) par la hauteur AB, & le produit sera la surface à laquelle ajoutant la base inférieure, & la supérieure, la somme sera la surface totale.

DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit que par tous les points de la hauteur AB, il passe des plans paralelles à la base, ces plans décriront sur la surface autant de contours égaux au contour AFEH de la base, & le nombre des termes sera la hauteur AB. Donc, &c.

Mais si le Paralellepipede est incliné (*Fig.* 9.) il faudroit bien se garder de multiplier le contour de sa base par sa hauteur. Car quoique la hauteur BH du Paralellepipede soit aussi la hauteur de la face ABLF & de celle qui lui est opposée, elle n'est pas de même la hauteur de la face ABCR ni de son opposée, & par conséquent le nombre des Elemens de ces deux faces ne peuvent pas s'estimer par la hauteur BH; ainsi dans ce cas, il faut trouver la valeur des faces en particulier, & faire ensuite leur somme pour avoir la surface du parálellepipede.

Ou bien si l'on veut avoir tout d'un coup la surface, voici comme on fera: par l'extrémité BE de la face ABEF (*Fig.* 10.) faites passer un plan BRSE perpendiculaire sur les côtés du paralellepipede; & par l'autre extremité AF, faites passer un autre plan AILF paralelle au premier, & qui coupe les côtés prolongés du paralellepide. Cette préparation faite, il est évident que la partie BRSEDC de la surface que le plan BRSE retranche, est égale à la partie AILFGH que le plan AILF ajoute à la surface du Paralellepipede. Et par conséquent la surface ABESRILF est égale à la surface ABCDEFGH. Or la surface ABESRILF étant la surface d'un Paralellepipede droit, est égale au contour AILF multiplié par la hauteur AB, donc la surface ABCDEFGH est égale au même contour AILF multiplié par la même droite AB.

COROLLAIRE.

27. La surface des Primes & des Cylindres, soit droits, soit inclinés, se trouvera de la même façon.

PROPOSITION VI.

28. *Trouver l'aire d'un triangle.*

Du sommet B (*Fig.* 11.) abaissez la perpendiculaire BD sur la base AC, & multipliant la base AC par BD, prenez la moitié du produit pour l'aire cherchée.

DEMONSTRATION.

Concevez que par tous les points E, F, G, &c. de la perpendiculaire BD, soient tirées des droites HI, LM, NO, &c. paralelles à la base, lesquelles seront les Elemens du triangle, & dont la somme sera par conséquent égale à l'aire cherchée. Or ces paralelles seront entr'elles comme les parties BE, BF, BG, &c. de la perpendiculaire qu'elles coupent, car à cause des triangles semblables BEI, BFM, &c. on a EI, FM :: BE, BF, & de même à cause des triangles semblables BEH, BFL, &c. on a HE, LF :: BE, BF; donc EI+HE, ou HI, FM+FL, ou LM :: BE, BF, & ainsi des autres. Or les parties BE, BF, BG, &c. sont entr'elles comme la suite infinie 0. 1. 2. 3. 4, &c. & cette suite est à son dernier terme multiplié par le nombre des termes comme 1 à 2. Donc la somme des Elemens est au dernier AC multiplié par le nombre des termes *BD*, comme 1 à 2. Et par conséquent le triangle est égal à la moitié du produit de sa base AC par sa hauteur BD.

COROLLAIRE I.

29. Et ce seroit la même chose quand même la hauteur BD (*Fig.* 12.) tomberoit hors du triangle. Car à cause des triangles semblables BHE, BLF, &c. on auroit HE, LF :: BE, BF, & à cause des triangles semblables BIE, BMF, &c. on auroit aussi IE, MF :: BE, BF, & par conséquent HE—IE, ou HI, LF—MF, ou LM :: BE, BF, c'est-à-dire les Elemens du triangle sont entr'eux comme les parties BE, BF, &c. qu'ils coupent sur la hauteur BD. Donc, &c.

COROLLAIRE II.

30. Toutes les figures planes d'un plus grand nombre de côtés, soit régulieres, soit irrégulieres pouvant se réduire en plusieurs triangles se mesureront de la même façon.

Proposition VII.

31. *Trouver la solidité d'une Pyramide.* (*Fig.* 13.)
Multipliez la base ABCD par la hauteur EP, & le tiers du produit sera la solidité cherchée.

Demonstration.

Concevez que par tous les points de la hauteur EP, il passe des plans paralelles à la base, la Pyramide sera égale à la somme de ces plans, & ces plans seront semblables entr'eux. Car 1°. à cause des triangles semblables EFI, EGH, on a FI, GH :: EI, EH, & à cause des triangles semblables EIM, EHL, on a IM, HL :: EI, EH. Donc FI, GH :: IM, HL, & on prouvera de la même façon que les autres côtés de ces plans sont proportionnels. 2°. leurs angles sont égaux chacun à chacun, car les côtés qui coupent la face EAD étant paralelles entr'eux, de même que ceux qui coupent la face EDC, il est visible que les angles que ces côtés font entr'eux sont égaux, & il en est de même des angles faits par les autres côtés. Donc ces plans sont semblables, & par conséquent ils sont entr'eux comme les quarrés de leur côtés homologues FI, GH, &c. Or ces côtés sont entr'eux comme les parties EO, ER, que les plans coupent sur la hauteur EP, car à cause des triangles semblables EOI, ERH, on a EO, ER :: EI, EH, mais nous avons aussi FI, GH :: EI, EH ; donc FI, GH :: EO, ER. Donc les plans sont entr'eux comme les quarrés de EO, ER, &c. mais les parties EO, ER, &c. sont entr'elles comme la suite infinie o. 1. 2. 3. 4, &c. donc les plans ou les Elemens de la Pyramide sont entr'eux comme les quarrés de ces nombres. Donc leur somme est au plus grand multiplié par le nombre des termes, comme 1 est à 3. Et par conséquent la Pyramide est le tiers du produit de sa base qui est le plus grand Element par la hauteur EP qui est le nombre des termes.

Corollaire.

32. Tout cône est égal au produit de sa base par le tiers de sa hauteur. Car si l'on conçoit que le triangle BAC (*Fig.* 14.) tourne autour de son côté BA, il décrira par sa circonvolution un cône BCR. Or tandis que ce triangle tournera ses Elemens EF, GH, IL, &c. décriront des cercles dont la somme sera égale

égale au cône. Et comme ces cercles sont entr'eux comme les quarrés de leurs rayons EF, GH, IL, &c. qui sont comme o. 1. 2. 3, &c. il s'ensuit qu'ils sont comme les quarrés o. 1. 4. 9, &c. & par conséquent leur somme est au plus grand multiplié par le nombre des termes, comme 1 à 3. Donc, &c.

PROPOSITION VIII.

33. *Trouver l'aire d'un cercle* (*Fig.* 15.)

Multipliez sa circonférence par son rayon AB, & la moitié du produit sera l'aire cherchée.

DEMONSTRATION.

Concevez que par tous les points du rayon AB, il passe des circonférences qui ayent toutes le centre commun A. La somme de ces circonférences sera égale à l'aire du cercle : or ces circonférences seront entr'elles comme leurs rayons AE, AF, &c. c'est-à-dire comme la suite infinie o. 1. 2. 3. 4, &c. Donc leur somme sera à la derniere BCD multipliée par le nombre de termes ou le rayon AB, comme 1 à 2. Donc elle sera égale à la moitié du produit de la circonférence BCD par le rayon AB.

PROPOSITION IX.

34. *Trouver la surface d'une Pyramide* (*Fig.* 13.)

Si la Pyramide est réguliere tirez du sommet E de l'une des faces EDC la perpendiculaire EQ sur la base DC de cette face, & multipliant le contour ABCD de la base par la ligne EQ, prenez la moitié du produit pour la surface cherchée.

DEMONSTRATION.

La face EDC est égale à la moitié du produit de sa base DC par la hauteur EQ, (*N.* 28.) or les autres faces ayant même base & même hauteur, sont aussi égales à la moitié de ce produit; donc prenant la base DC autant de fois qu'il y a de côtés, c'est-à-dire prenant le contour de la base de la Pyramide, & la multipliant par la hauteur EQ, on aura la surface demandée.

Mais si la Pyramide n'est pas réguliere, il faut chercher chaque face à part & en faire la somme.

COROLLAIRE.

35. La surface d'un cône BCR (*Fig.* 14.) est égale au moitié du produit de la circonférence de sa base par son côté BC. Car tandis que le triangle BAC décrit le cône par sa circonvolution, tous les points du côté BC décrivent des circonférences dont la somme est égale à la surface du cône. Mais ces circonférences sont entr'elles comme leurs rayons EF, GH, IL, &c. & ces rayons sont comme les droites BF, BH, BL, &c. qui sont comme la suite infinie 0. 1. 2. 3. 4, &c. donc la somme des circonférences est égale à la derniere RC multipliée par la moitié du nombre des termes BC.

PROPOSITION X.

36. *Trouver la solidité d'un Paraboloïde de quelque genre qu'il soit.* (*Fig.* 16.)

J'ai dit dans la *Théorie & Pratique des Géometres* que le Paraboloïde étoit fait par la circonvolution d'une demi Parabole ABC autour de son axe AB, & que la Parabole s'appelloit *Parabole quarrée*, ou simplement Parabole, quand les quarrés de ses ordonnées DE, FG, HI, étoient entr'eux comme les abscisses AD, AF, AH, &c. *Parabole cubique* ou du second genre, quand les cubes des ordonnées sont entr'eux comme les abscisses. *Parabole* du troisiéme *genre*, quand les quatriémes puissances des ordonnées sont entr'elles comme les abscisses, & ainsi de suite. Cela posé.

Si la Parabole est du premier genre, multipliez la base du Paraboloïde par la hauteur, & prenez la moitié du produit pour sa solidité. Si elle est du second genre, prenez les trois cinquiémes du produit; si elle est du troisiéme, prenez les deux tiers; si elle est du quatriéme, les quatre cinquiémes, &c. En sorte que pour les Paraboloïdes dont le genre est impair, c'est-à-dire pour ceux du premier genre, du troisiéme, du cinquiéme, &c. le rapport du Paraboloïde au produit de sa base par sa hauteur, est comme 1 à 2, comme 2 à 3, comme 3 à 4, &c. Et pour les genres pairs, c'est-à-dire pour les Paraboloïdes du second genre, du quatriéme, du sixiéme, &c. le rapport du Paraboloïde au produit de sa base par sa hauteur, est comme 3 à 5, comme 5 à 7, comme 7 à 9, &c.

DEMONSTRATION.

Concevez que de tous les points de la hauteur AB, soient tirées des ordonnées qui seront les Elemens de la demi-parabole. Quand la demi-parabole tournera autour de l'axe AB, ses ordonnées décriront des cercles dont la somme sera égale au Paraboloïde. Or ces cercles sont entr'eux comme les quarrés de leurs rayons ou des ordonnées, donc si la Parabole est quarrée ou du premier genre, ces cercles seront entr'eux comme les abscisses, ou comme la suite infinie o. 1. 2. 3. 4, &c. Donc leur somme sera au dernier ou à la base du Paraboloïde multipliée par le nombre des termes ou par la hauteur AB, comme 1 à 2.

Si la Parabole est du second genre, les cubes des ordonnées seront entr'eux comme les abscisses, donc les ordonnées seront comme les racines cubiques des abscisses, c'est-à-dire comme les racines cubiques de la suite infinie o. 1. 2. 3. 4, &c. Mais cette suite est la suite des premieres puissances dont l'exposant est 1, donc l'exposant des racines cubiques est $\frac{1}{3}$, & les quarrés de ces racines ont pour exposant $\frac{2}{3}$, parce que pour élever $a^{\frac{1}{3}}$ au quarré il faut multiplier l'exposant $\frac{1}{3}$ par l'exposant 2 du quarré, ce qui fait deux tiers. Donc les quarrés des ordonnées sont au dernier quarré multiplié par le nombre des termes, comme 1 à $\frac{2}{3}+1$, (*N.* 13.) ou comme 1 à leur exposant augmenté de l'unité, & par conséquent ils sont comme 1 à $\frac{5}{3}$, ou comme $\frac{3}{3}$ à $\frac{5}{3}$, ou 3 à 5. Puis donc que les cercles qui composent le Paraboloïde sont entr'eux comme les quarrés des ordonnées, leur somme est au dernier ou à la base multipliée par le nombre des termes, comme 3 à 5.

En suivant la même route, on trouvera les rapports des Paraboloïdes des autres genres à leur base multipliée par la hauteur tels que nous venons de les exprimer.

PROPOSITION XI.

37. *Trouver l'aire d'une Parabole de quelque genre qu'elle soit.* (*Fig.* 17.)

Multipliez la base AC par la hauteur BD, & si la parabole est du premier genre, prenez les deux tiers du produit pour l'aire. Si elle est du second genre, prenez les trois quarts ; si elle est

du troisiéme, les quatre cinquiémes, & ainsi de suite, en sorte que le rapport de la parabole au produit de sa base par sa hauteur, c'est-à-dire au rectangle circonscrit, soit comme 2 à 3, comme 3 à 4, comme 4 à 5, comme 5 à 6, &c. selon les genres différens.

DEMONSTRATION.

Concevez que de tous les points de la hauteur BD, soient tirées des doubles ordonnées qui seront les Elemens de la parabole. Or si la parabole est quarrée, les quarrés de ces Elemens seront entr'eux comme leurs abscisses, ou comme la suite infinie 0. 1. 2. 3. 4, &c. donc les racines de ces quarrés, c'est-à-dire les Elemens, seront entr'eux comme les racines de cette suite; mais ces racines sont à la plus grande multipliée par le nombre des termes comme 2 à 3, par la Table ci-dessus; donc la somme des Elemens ou la Parabole est au dernier, c'est-à-dire à la base AC, multipliée par le nombre des termes BD, comme 2 à 3.

Si la Parabole est du second genre, ses Elemens seront entr'eux comme les racines cubiques de leurs abscisses ou des nombres 0. 1. 2. 3. 4, &c. Or ces racines sont à la plus grande multipliée par le nombre des termes, comme 3 à 4 par la Table ci-dessus. Donc, &c.

Et on trouvera de la même façon les rapports des autres Paraboles au rectangle circonscrit, tels que nous venons de les énoncer.

PROPOSITION XII.

38. *Trouver l'aire du complement Parabolique dans les Paraboles des différens genres.*

On appelle complement parabolique l'espace mixtiligne AEBFC compris entre la parabole & le rectangle circonscrit (*Fig.* 17.). Or il est évident que la Parabole quarrée étant les deux tiers du rectangle, le complement en est le tiers, que la Parabole cubique étant les trois quarts, le complément doit être le quart, & ainsi des autres. Mais on peut trouver ces complemens directement en cette sorte.

Concevez que de tous les points de la tangente AB (*Fig.* 18.) soient tirées des paralelles à l'axe, lesquelles seront les Elemens du demi-complement ABD, & que de tous les points où ces

paralelles rencontrent la Parabole, soient menées des ordonnées à l'axe, les paralelles seront égales aux abscisses de l'axe AC chacune à chacune, & les ordonnées à l'axe seront égales aux parties AI, AS, AV, &c. de la tangente, & par conséquent elles seront entr'elles comme la suite infinie 0. 1. 2. 3. 4, &c. Or les abscisses ou les paralelles qui leur sont égales, sont entr'elles dans la parabole quarrée comme les quarrés des ordonnées ; donc ces paralelles sont entr'elles comme les quarrés 0. 1. 4. 9. 16, &c. donc leur somme est à la derniere BD multipliée par le nombre des termes BA, comme 1 est à 3. Donc le demi-complement ABD, est le tiers du rectangle ABCD, & comme l'autre demi-complement est aussi le tiers du rectangle APQC, il s'ensuit que le complément entier est le tiers du rectangle circonscrit PQDB.

Si la Parabole est du second genre, les paralelles sont entr'elles comme les cubes des ordonnées, ou comme la suite 0. 1. 8. 27, &c. Donc leur somme est à la plus grande multipliée par le nombre des termes comme 1 à 4. Donc, &c.

Et on trouvera de la même façon que dans les différens genres de paraboles les complemens sont comme 1 à 3, comme 1 à 4, comme 1 à 5, comme 1 à 6, &c.

PROPOSITION XIII.

39. *Trouver le solide formé par la circonvolution d'un demi-complement* ABC *de parabole, de quelque genre que ce soit, autour de la tangente* AB *au sommet* A (*Fig.* 19.).

Multipliez la base CD du solide par sa hauteur AB ; & prenez le cinquiéme du produit, si la Parabole est quarrée ; le septiéme, si elle est cubique ; le neuviéme, si elle est du troisiéme genre, & ainsi de suite ; en sorte que le rapport du solide au produit de sa base par sa hauteur, soit comme 1 à 5, comme 1 à 7, comme 1 à 9, comme 1 à 11, &c.

DEMONSTRATION.

Par la proposition précedente les Elemens du demi-complement ABC sont dans la parabole quarrée comme les quarrés des ordonnées à l'axe, ou comme la suite infinie 0. 1. 4. 9, &c. des quarrés des nombres naturels ; or ces Elemens en tournant autour de AB, produisent des cercles qui sont comme les quarrés des Elemens ; donc ces cercles sont entr'eux comme les

quatriémes puissances des nombres 0. 1. 2. 3. 4, &c. donc leur somme est au dernier ou à la base du solide multiplié par le nombre des termes, comme 1 est à 5, par la Table ci-dessus.

De même dans la Parabole cubique les Elemens du demi-complément sont entr'eux comme les cubes des nombres 0. 1. 2. 3. 4, &c. & les cercles décrits par ces Elemens sont entr'eux comme les quarrés des cubes, ou comme les sixiémes puissances, donc leur somme est à la base multipliée par le nombre des termes comme 1 à 7 par la Table précédente, & ainsi des autres.

REMARQUE.

40. J'ai passé légerement sur tout ceci parce que la plûpart de ces choses ont été démontrées dans la *Théorie & Pratique du Géometre*; mais à present nous allons pousser les principes plus loin, & l'on va voir de quelle étendue est la science que nous traitons.

CHAPITRE III.

Des Suites multipliées les unes par les autres.

PROPOSITION XIV.

41. *Si l'on multiplie les termes d'une Suite par les termes d'une autre, on aura une nouvelle Suite dont l'exposant sera la somme des exposans des deux suites, & son rapport à son dernier terme multiplié par le nombre des termes sera comme 1 à son exposant augmenté de l'unité.*

Cette proposition est évidente par les principes ci-dessus. Car si l'on multiplie, par exemple, la suite des quarrés par la suite des cubes, il est évident que la suite 0. a^5. b^5. c^5, &c. sera la suite des cinquiémes puissances dont l'exposant 5 est la somme des exposans 2 & 3. Et par conséquent le rapport de cette suite à son dernier terme multiplié par le nombre, est comme 1 à 5 + 1 (*N.* 13.) ou comme 1 à 6, & ainsi des autres.

$$\begin{array}{l} 0.\ a^2.\ b^2.\ c^2.\ d^2.\ e^2, \&c. \\ 0.\ a^3.\ b^3.\ c^3.\ d^3.\ e^3, \&c. \\ \hline 0.\ a^5.\ b^5.\ c^5.\ d^5.\ e^5, \&c. \end{array}$$

APPLICATION A LA GEOMETRIE.

PROPOSITION XV.

42. *Si l'on multiplie les Elemens d'un rectangle* BCDE *par les Elemens d'un triangle* ACB *de même base & de même hauteur, le solide produit sera un Prisme triangulaire* AD *qui sera au quarré de la base* AC *du triangle, ou* CE *du rectangle multiplié par la hauteur comme* 1 *à* 2. (*Fig.* 20.)

DEMONSTRATION.

Les Elemens du triangle forment la suite infinie des premieres puissances o. *a. b. c. d*, &c. dont j'appelle le dernier terme AC=R. Et les Elemens du rectangle étant égaux entr'eux, & au dernier R des Elemens du triangle forment la suite des égaux R. R. R, &c. Or multipliant ces deux suites ensemble, le produit est la suite oR. *a*R. *b*R, &c. RR. dont l'exposant est 1. Car l'exposant des égaux étant zero, & celui des premieres puissances étant 1, la somme o+1 ou 1, est l'exposant du produit. Et par conséquent la suite oR. *a*R. *b*R, &c. RR, est à son dernier terme RR multiplié par le nombre de termes, comme 1 à 1+1 (*N.* 13.), ou comme 1 à 2. Donc le Prisme fait de la multiplication des Elemens du triangle ABC par les Elemens du rectangle CBDE, est au quarré RR, ou ACEF multiplié par le nombre des termes ou par la hauteur CB, comme 1 à 2.

R. R. R. R. R, &c. R.
o. *a*. *b*. *c*. *d*, &c. R.
____
oR. *a*R. *b*R. *c*R. *d*R, &c. RR.

COROLLAIRE I.

43. Si la base du rectangle étoit plus grande ou moindre que celle du triangle, alors au lieu du quarré de la base du triangle ou du rectangle, le produit des deux derniers termes feroit un rectangle des deux bases, & le solide feroit à ce rectangle multiplié par le nombre des termes toujours comme 1 à 2. Car supposons que la base AC du triangle ABC (*Fig.* 21.) que j'appelle R, ne soit que la moitié de la base CE du rectangle qui sera par conséquent 2R, alors les Elemens du rec-

tangle formeront la suite des égaux 2R. 2R. 2R, &c. 2R. Et multipliant cette suite par celle des Elemens du triangle le produit sera o2R. 2aR. 2bR. 2cR, &c. 2RR. dont l'exposant sera encore 1 par les raisons que nous en avons données. Ainsi cette suite ou le solide sera au dernier 2RR, c'est-à-dire au rectangle ACEF des deux bases multiplié par le nombre des termes ou par BC, comme 1 à 2. Donc, &c.

o.	a.	b.	c,	&c.	R.
2R.	2R.	2R.	2R,	&c.	2R.
o2R.	2aR.	2bR.	2cR,	&c.	2RR.

COROLLAIRE II.

44. Donc tout Prisme rectiligne couché sur l'un des rectangles de ses côtés est égal à la moitié du produit de ce rectangle par la hauteur CB.

PROPOSITION XVI.

45. *Si l'on multiplie les Elemens d'un rectangle* ABCD (*Fig.* 22.) *par les Elemens d'une demi-Parabole* ABE *quarrée de même hauteur & de même base, dont le sommet est* B, *le solide produit sera au quarré de la base du rectangle, ou de la demi-Parabole, comme* 2 *à* 3.

DEMONSTRATION.

Les Elemens de la Parabole quarrée étant entr'eux comme les racines quarrées des abscisses, forment la suite infinie des racines quarrées des nombres o. 1. 2. 3. 4, &c. ainsi cette suite est o. $a^{\frac{1}{2}}$. $b^{\frac{1}{2}}$. $c^{\frac{1}{2}}$, &c. jusqu'au dernier terme R, & les Elemens du rectangle forment la suite des égaux R. R. R, &c. R. Multipliant donc ces deux suites, le produit est la suite oR. $a^{\frac{1}{2}}$R. $b^{\frac{1}{2}}$R, &c. RR, dont l'exposant est $\frac{1}{2}$. Car l'exposant des égaux étant o., & celui des racines $\frac{1}{2}$, la somme o $+ \frac{1}{2}$, est l'exposant du produit. Donc ce produit est à son dernier terme RR, ou au quarré EADF multiplié par le nombre des termes AB, comme 1 à $\frac{1}{2}+1$, ou comme 1 à $\frac{3}{2}$, ou comme 2 à 3. Donc, &c.

R.	R.	R.	R.	R,	&c.	R.
o.	$a^{\frac{1}{2}}$.	$b^{\frac{1}{2}}$.	$c^{\frac{1}{2}}$.	$d^{\frac{1}{2}}$,	&c.	R.
oR.	$a^{\frac{1}{2}}$R.	$b^{\frac{1}{2}}$R.	$c^{\frac{1}{2}}$R.	$d^{\frac{1}{2}}$R,	&c.	RR.

COROLLAIRE

COROLLAIRE I.

46. Si la base AD du rectangle est moindre ou plus grande que la base EA de la demi-Parabole, alors au lieu d'un quarré il se forme un rectangle par la multiplication des deux bases, & le solide est toujours à ce rectangle multiplié par le nombre des termes AB, comme 2 à 3. Car supposant que la base du rectangle soit triple de celle de la demi-Parabole, les Elemens du rectangle formeront la

3R.	3R.	3R.	3R,	&c.	R.
o.	$a^{\frac{1}{2}}$.	$b^{\frac{1}{2}}$.	$c^{\frac{1}{2}}$,	&c.	R.
o3R,	$3a^{\frac{1}{2}}$R.	$3b^{\frac{1}{2}}$R.	$3c^{\frac{1}{2}}$R,	&c.	3RR.

suite des égaux 3R. 3R. 3R, &c. 3R; & multipliant cette suite par celle des Elemens de la demi-Parabole, on aura la suite o3R. $3a^{\frac{1}{2}}$R. $3b^{\frac{1}{2}}$R. $3c^{\frac{1}{2}}$R, &c. 3RR dont l'exposant sera $\frac{1}{2}$ par les raisons données ci-dessus, & par conséquent cette suite sera à son dernier terme 3RR, ou au rectangle EADF multiplié par le nombre des termes AB, comme 1 à $\frac{1}{2}+1$, ou comme 2 à 3.

COROLLAIRE II.

47. Si la demi-Parabole étoit du second genre, le solide seroit à sa base multipliée par le nombre des termes, comme 3 à 4. Car les Elemens de cette demi-Parabole, forment la suite o. $a^{\frac{1}{3}}$. $b^{\frac{1}{3}}$. $c^{\frac{1}{3}}$, &c. dont l'exposant est $\frac{1}{3}$, ainsi multipliant cette suite par celle des égaux dont l'exposant est o, le produit auroit pour exposant $o+\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{3}$, & par conséquent cette suite seroit au dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme 1 à $\frac{1}{3}+1$, ou comme $\frac{3}{3}$ à $\frac{4}{3}$, ou enfin comme 3 à 4.

Et on trouvera de la même façon que si la Parabole étoit du troisiéme genre, du quatrieme, &c. le solide seroit à sa base multipliée par le nombre des termes, comme 4 à 5, comme 5 à 6, &c.

PROPOSITION XVII.

48. *Si l'on multiplie les Elemens d'un rectangle* ABCD (*Fig.* 23.) *par les Elemens d'un complement de Parabole quarrée de même hauteur & de même base dont le sommet est en* B, *en prenant les Ele-*

mens paralelles à l'axe, le solide produit sera au quarré de la base EA *du complement, ou de la base* AD *du rectangle multiplié par la hauteur* AB, *comme* 1 *à* 3.

DEMONSTRATION.

Les Elemens du complement sont entr'eux comme les quarrés des ordonnées à l'axe de la Parabole, lesquels sont en ce cas comme les nombres 0. 1. 2. 3. 4, &c. comme il a été dit plus haut. Donc ces Elemens forment la suite des quarrés 0. a^2. b^2. c^2., &c. R. Multipliant donc cette suite par les Elemens du rectangle qui forment la suite des égaux

0.	a^2.	b^2.	c^2.	d^2,	&c.	R.
R.	R.	R.	R.	R,	&c.	R.
0R.	a^2R.	b^2R.	c^2R.	d^2R,	&c.	RR.

R. R. R, &c. le produit est 0R. a^2R. b^2R, &c. dont l'exposant est 2, parce que l'exposant des quarrés étant 2, & celui des égaux zero, la somme est 0+2 ou 2. Donc ce produit est au dernier terme RR, ou au quarré EADF multiplié par le nombre des termes AB, comme 1 à 2+1, ou comme 1 à 3.

COROLLAIRE I.

49. Si la base du rectangle est moindre ou plus grande que le dernier Element du complement, alors au lieu d'un quarré il se forme un rectangle EADF, & le solide est toujours à ce rectangle multiplié par le nombre des termes comme 1 à 3 par les raisons apportées ci-dessus.

COROLLAIRE II.

50. Si le complement appartenoit à une Parabole du second genre, le solide seroit à sa base multipliée par sa hauteur comme 1 à 4. Car les Elemens de ce complement forment la suite des cubes 0. a^3. b^3. c^3, &c. R, & le produit de cette suite par celle des égaux est 0R. a^3R. b^3R. c^3R, &c. RR dont l'exposant est 3 ; ainsi cette suite est à son dernier terme RR multiplié par le nombre des termes comme 1 à 3+1, ou comme 1 à 4.

Et on trouvera de la même façon que si le complement appartient à une Parabole du troisiéme genre, du quatriéme, &c. le solide est à sa base multipliée par le nombre des termes, comme 1 à 5, comme 1 à 6, &c.

PROPOSITION XVIII.

51. *Si l'on multiplie les Elemens d'un triangle* BAC, *par les Elemens d'un autre triangle* BAD, *le solide produit est au rectangle des deux bases* DA, AC, *multiplié par la hauteur* AB, *comme* 1 *est à* 3. (*Fig.* 24.)

Si les deux triangles ont la base égale, la proposition est évidente; car comme ils ont la hauteur égale, les Elemens de l'un sont égaux chacun à chacun aux Elemens de l'autre. Et par conséquent leur produit est la somme des quarrés des Elemens de l'un des deux. Or ces Elemens sont comme o. 1. 2. 3. 4, &c. donc leurs quarrés sont comme o. 1. 4. 9, &c. & par conséquent leur rapport au plus grand multiplié par le nombre des termes, est comme 1 à 3.

Mais si les bases sont inégales, supposons la base AC double de la base AD, donc tous les Elemens du triangle ABC seront doubles des Elemens du triangle ABD; donc si ceux-ci sont o. a. b. c. d. e, &c. R, les autres seront o. $2a$. $2b$. $2c$. $2d$, &c. 2R, & par conséquent leur produit sera o. $2a^2$. $2b^2$. $2c^2$. $2d^2$, &c. 2RR. C'est-à-dire que les termes de cette suite seront entr'eux comme les doubles des quarrés o. a^2. b^2. c^2, &c. Or les doubles des quarrés sont en même raison que les quarrés; donc cette suite o. $2a^2$. $2b^2$, &c. est au dernier terme 2RR ou à la base DACE multipliée par le nombre des termes AB, comme 1 à 3.

$$\begin{array}{l} o.\ a.\ b.\ c.\ d.\ e,\ \&c.\ R. \\ o.\ 2a.\ 2b.\ 2c.\ 2d.\ 2e,\ \&c.\ 2R. \\ \hline o.\ 2a^2.\ 2b^2.\ 2c^2.\ 2d^2.\ 2e^2,\ \&c.\ 2R^2. \end{array}$$

PROPOSITION XIX.

52. *Si l'on multiplie les Elemens d'une demi-Parabole quarrée* ABC (*Fig.* 25.) *par ceux d'un triangle* ABD *de même base & de même hauteur, le solide produit sera au quarré de la base du triangle, ou de la demi-Parabole multiplié par la hauteur* AB, *comme* 2 *est à* 5.

DEMONSTRATION.

Les Elemens de la Parabole quarrée sont comme la suite o. $a^{\frac{1}{2}}$. $b^{\frac{1}{2}}$. $c^{\frac{1}{2}}$. $d^{\frac{1}{2}}$, &c. R des racines quarrées des nombres o. 1. 2. 3, &c. & les Elemens du triangle sont comme la suite o.

a. b. c. d, &c. R. Multipliant donc les uns par les autres le produit sera comme la suite o. $a^{\frac{3}{2}}$. $b^{\frac{3}{2}}$. $c^{\frac{3}{2}}$. $d^{\frac{3}{2}}$, &c. RR, car l'exposant $\frac{1}{2}$ joint à l'exposant 1 donne l'exposant $\frac{3}{2}$ qui est l'exposant des racines quarrées des cubes. Or cette suite

o.	$a^{\frac{1}{2}}$.	$b^{\frac{1}{2}}$.	$c^{\frac{1}{2}}$.	$d^{\frac{1}{2}}$,	&c. R.
o.	a^{1}.	b^{1}.	c^{1}.	d^{1},	&c. R.
o.	$a^{\frac{3}{2}}$.	$b^{\frac{3}{2}}$.	$c^{\frac{3}{2}}$.	$d^{\frac{3}{2}}$,	&c. RR.

est à son dernier terme multiplié par le nombre des termes comme 1 à $\frac{3}{2}+1$, ou comme $\frac{2}{2}$ à $\frac{5}{2}$, ou comme 2 à 5. Donc le solide est à sa base, &c.

COROLLAIRE I.

53. Si la base de la Parabole étoit plus grande ou plus petite que la base du triangle, alors au lieu du quarré RR ou DACE il se formeroit un rectangle des deux bases, & le solide seroit toujours à ce rectangle multiplié par la hauteur comme 2 à 5; parce que les Elemens de la Parabole seroient toujours comme les racines quarrées des nombres o. 1. 2. 3, &c. & ceux du triangle comme ces mêmes nombres; & par conséquent leurs produits seroient toujours comme les produits de ces nombres par leurs racines.

Dans la suite nous supposerons toujours les derniers termes des suites égaux entr'eux, & nous ne parlerons des suites dont les derniers termes sont inégaux que dans les cas où cette inégalité pourra faire une exception à la regle.

COROLLAIRE II.

54. Si la demi-Parabole étoit du second genre, le solide seroit à sa base multipliée par le nombre des termes, comme 3 à 7. Car les Elemens de cette Parabole sont entr'eux comme les racines cubiques o. $a^{\frac{1}{3}}$. $b^{\frac{1}{3}}$. $c^{\frac{1}{3}}$. $d^{\frac{1}{3}}$, &c. R des nombres o. 1. 2. 3, &c. ainsi ces Elemens multipliés par ceux du triangle sont come la suite o. $a^{\frac{4}{3}}$. $b^{\frac{4}{3}}$. $c^{\frac{4}{3}}$ &c. des racines cubiques des quatriémes puissances. Or cette suite est à son dernier terme multiplié par le nombre des ter-

o.	$a^{\frac{1}{3}}$.	$b^{\frac{1}{3}}$.	$c^{\frac{1}{3}}$.	$d^{\frac{1}{3}}$,	&c. R.
o.	*a*.	*b*.	*c*.	*d*,	&c. R.
o.	$a^{\frac{4}{3}}$.	$b^{\frac{4}{3}}$.	$c^{\frac{4}{3}}$.	$d^{\frac{4}{3}}$,	&c. RR.

mes comme 1 à $\frac{4}{3}+1$, ou comme 1 à $\frac{7}{3}$, ou comme 3 à 7. Donc le solide, &c.

Et on trouvera de la même façon, que si la demi-Parabole étoit du troisiéme genre, du quatriéme, du cinquiéme, &c. le rapport du solide à sa base multipliée par le nombre des termes seroit comme 4 à 9, comme 5 à 11, comme 6 à 13, comme 7 à 15, &c. de sorte que ces rapports seroient à commencer par la Parabole quarrée, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{11}$, $\frac{6}{13}$, $\frac{7}{15}$, &c. ou les numérateurs sont la suite des nombres 2. 3. 4. 5, &c. & les dénominateurs sont la suite des impairs 5. 7. 9. 11, &c.

PROPOSITION XX.

55. *Si l'on multiplie les Elemens d'un triangle* ABC *par ceux d'un demi-complement* CBD *de Parabole quarrée dont le sommet est* C. *Le solide produit sera à sa base* ABDE *multipliée par la hauteur* BC, *comme* 1 *à* 4 (*Fig.* 26.)

DEMONSTRATION.

Les Elemens du complement sont entr'eux comme les quarrés o. a^2. b^2. c^2. d^2, &c. & ceux du triangle comme les premieres puissances o. a. b. c, &c. donc le produit des uns par les autres est comme la suite o. a^3. b^3. d^3. c^3, &c. RR des cubes. Or cette suite est au dernier terme RR multiplié par le nombre des termes comme 1 à 3 + 1, ou comme 1 à 4. Donc le solide est à sa base ABDE multipliée par la hauteur BC, comme 1 à 4.

o. a^2. b^2. c^2. d^2, &c. R.
o. a. b. c. d, &c. R.
o. a^3. b^3. c^3. d^3, &c. RR.

COROLLAIRE.

56. Si le complement appartenoit à une Parabole du second genre, le solide seroit à sa base multipliée par sa hauteur, comme 1 à 5. Car les Elemens de ce complement sont comme les cubes o. a^3. b^3. c^3, &c. & par conséquent le produit de ces Elemens par ceux du triangle seroit comme la suite des quatriémes puissances o. a^4. b^4. c^4, &c. Or cette suite est à son dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme 1 à 4 + 1 ou 5. Donc le solide, &c.

o. a^3. b^3. c^3. d^3, &c. R.
o. a. b. c. d, &c. R.
o. a^4. b^4. c^4. d^4, &c. RR.

Et on trouvera de la même façon, que si le complement apartenoit à une Parabole du troisiéme genre, du quatriéme, &c. le rapport du solide à la base multipliée par la hauteur, seroit comme 1 à 6, comme 1 à 7, &c.

PROPOSITION XXI.

57. *Si l'on multiplie les Elemens d'une demi-Parabole quarrée* ABC *dont le sommet est* B *par les Elemens de son complement* ABD *dont le sommet est* B (*Fig.* 27.), *le solide produit sera à sa base multipliée par la hauteur, comme* 2 *à* 7.

DEMONSTRATION.

Les Elemens de la demi-Parabole sont entr'eux, comme o. $a^{\frac{1}{2}}$ $b^{\frac{1}{2}}$. $c^{\frac{1}{2}}$, &c. & ceux du complement comme o. a^2. b^2. c^2, &c. Donc ces Elemens multipliés les uns par les autres sont entr'eux comme o. $a^{\frac{5}{2}}$. $b^{\frac{5}{2}}$, &c.

$$\begin{array}{l} o.\ a^{\frac{1}{2}}.\ b^{\frac{1}{2}}.\ c^{\frac{1}{2}}, \&c.\ R. \\ o.\ a^2.\ b^2.\ c^2, \&c.\ R. \\ \hline o.\ a^{\frac{5}{2}}.\ b^{\frac{5}{2}}.\ c^{\frac{5}{2}}, \&c.\ RR \end{array}$$

Or cette suite est à son dernier terme, multiplié par le nombre des termes, comme 1 à $\frac{5}{2}+1$, ou comme 1 à $\frac{7}{2}$, ou comme 2 à 7. Donc le solide est à sa base, &c.

COROLLAIRE.

58. Si la demi-Parabole étoit cubique ou du second genre, le solide seroit à sa base multipliée par la hauteur comme 3 à 13. Car les Elemens de la demi-Parabole seroient comme o. $a^{\frac{1}{3}}$. $b^{\frac{1}{3}}$. $c^{\frac{1}{3}}$, &c. & ceux du complement, comme o. a^3. b^3, &c. Multipliant donc les uns par les autres, le produit seroit o. $a^{\frac{10}{3}}$. $b^{\frac{10}{3}}$, &c. Or cette suite est à son son dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme 1 à $\frac{10}{3}+1$, ou comme 1 à $\frac{13}{3}$, ou comme 3 à 13. Donc le solide, &c.

$$\begin{array}{l} o.\ a^{\frac{1}{3}}.\ b^{\frac{1}{3}}.\ c^{\frac{1}{3}}, \&c.\ R. \\ o.\ a^3.\ b^3.\ c^3, \&c.\ R. \\ \hline o.\ a^{\frac{10}{3}}.\ b^{\frac{10}{3}}.\ c^{\frac{10}{3}}, \&c.\ RR. \end{array}$$

Et on trouvera de la même maniere que si la Parabole étoit du troisiéme genre, du quatriéme, &c. le solide seroit à sa base multipliée par le nombre des termes comme 4 à 21, comme

5 à 31, comme 6 à 43, &c. de forte qu'à commencer par la Parabole quarrée, les rapports font $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{13}$, $\frac{4}{21}$, $\frac{5}{31}$, $\frac{6}{43}$, $\frac{7}{57}$, &c. dont les numérateurs font les nombres 2, 3, 4, 5, 6, &c. & les dénominateurs augmentent de façon que le fuivant furpaffe toujours le précedent du double de fon numérateur; ainfi dans le rapport $\frac{5}{31}$, le dénominateur 31 furpaffe le dénominateur précedent 21 de 10, qui eft le double du numérateur 5 de 31, & ainfi des autres.

REMARQUE.

59. A l'imitation des Solides ci-deffus, on peut en conftruire une infinité d'autres dont le rapport à leur bafe multipliée par la hauteur fe connoîtra avec la même facilité. Si l'on multiplie par exemple les Elemens d'une demi-Parabole quarrée ABC (*Fig.* 28.) par les Elemens d'une demi-Parabole cubique ABD, le folide produit fera à fa bafe CADE multipliée par la hauteur AB comme 6 à 11. Car les Elemens de la demi-Parabole quarrée font entr'eux comme o. $a^{\frac{1}{2}}$. $b^{\frac{1}{2}}$. $c^{\frac{1}{2}}$, & ceux de la demi-Parabole cubique, comme o. $a^{\frac{1}{3}}$. $b^{\frac{1}{3}}$. $c^{\frac{1}{3}}$, &c. Multipliant donc les uns par les autres, le produit fera comme o. $a^{\frac{5}{6}}$. $b^{\frac{5}{6}}$. $c^{\frac{5}{6}}$, &c. Or cette fuite eft à fon dernier terme RR, ou PR fi les deux derniers termes font inégaux, multiplié par le nombre des termes, comme 1 à $\frac{5}{6}+1$, ou comme 1 à $\frac{11}{6}$, ou comme 6 à 11. Donc le folide, &c. & ainfi des autres.

$$\text{o. } a^{\frac{1}{2}}.\ b^{\frac{1}{2}}.\ c^{\frac{1}{2}}.\ d^{\frac{1}{2}},\ \&c.\ P.$$
$$\text{o. } a^{\frac{1}{3}}.\ b^{\frac{1}{3}}.\ c^{\frac{1}{3}}.\ d^{\frac{1}{3}},\ \&c.\ R.$$
$$\overline{\text{o. } a^{\frac{5}{6}}.\ b^{\frac{5}{6}}.\ c^{\frac{5}{6}}.\ d^{\frac{5}{6}},\ \&c.\ PR.}$$

De même, fi on multiplie les Elemens d'une Parabole cubique ABC (*Fig.* 29.) par ceux d'un complement BAD de Parabole quarrée dont le fommet eft B, le folide produit fera à fa bafe multipliée par la hauteur, comme 3 à 10. Car les Elemens de la demi-Parabole cubique font comme o. $a^{\frac{1}{3}}$. $b^{\frac{1}{3}}$. $c^{\frac{1}{3}}$, &c. & ceux du complement de Parabole quarrée, comme o. a^2. b^2. c^2, &c. Multipliant donc les uns par les autres, le produit fera comme o. $a^{\frac{7}{3}}$. $b^{\frac{7}{3}}$. $c^{\frac{7}{3}}$,

$$\text{o. } a^{\frac{1}{3}}.\ b^{\frac{1}{3}}.\ c^{\frac{1}{3}}.\ d^{\frac{2}{3}},\ \&c.$$
$$\text{o. } a^{2}.\ b^{2}.\ c^{2}.\ d^{2},\ \&c.$$
$$\overline{\text{o. } a^{\frac{7}{3}}.\ b^{\frac{7}{3}}.\ c^{\frac{7}{3}}.\ d^{\frac{7}{3}},\ \&c.}$$

&c. Or cette suite est à son dernier terme multipliée par le nombre des termes, comme 1 à $\frac{7}{3}+1$, ou comme 1 à $\frac{10}{3}$, ou 3 à 10. Donc le solide, &c. & ainsi des autres.

CHAPITRE IV.

Des Suites dont les termes sont moyens proportionnels entre les termes de deux Suites.

PROPOSITION XXII.

60. *SI l'on prend des moyennes proportionnelles entre les termes de deux Suites, c'est-à-dire, un moyen proportionnel entre le premier terme de l'une & le premier de l'autre, de même un moyen proportionnel entre le second terme de l'une & le second terme de l'autre, &c. on aura une nouvelle suite dont l'exposant sera la moitié de la somme des exposans des deux suites, & cette suite sera à son dernier terme multiplié par le nombre des termes comme 1 à son exposant augmenté de l'unité.*

DEMONSTRATION.

Il est démontré en Geométrie que pour prendre une moyenne proportionnelle entre deux grandeurs, il faut multiplier l'une par l'autre, & tirer la racine quarrée du produit. Cela supposé, soient les deux suites $0.\ a^1.\ b^1.\ c^1.\ d^1$, &c. & $0.\ a^2.\ b^2.\ c^2.\ d^2$, &c. si l'on veut une suite moyenne proportionnelle, il est évident qu'il faut multiplier chaque terme de l'une par chaque terme de l'autre, & tirer la racine quarrée de chaque produit.

	0.	a^1.	b^1.	c^1.	d^1, &c.
	0.	a^2.	b^2.	c^2.	d^2, &c.
Produit	0.	a^3.	b^3.	c^3.	d^3, &c.
Racine quarrée	0.	$a^{\frac{3}{2}}$.	$b^{\frac{3}{2}}$.	$c^{\frac{3}{2}}$.	$d^{\frac{3}{2}}$, &c.

Or en multipliant chaque terme de l'une par chaque terme de l'autre, on a la suite $0.\ a^3.\ b^3.\ c^3.\ d^3$, &c. dont l'exposant 3 est la somme des exposans 1, 2, des deux suites, & en tirant la racine quarrée on a la suite $0.\ a^{\frac{3}{2}}.\ b^{\frac{3}{2}}.\ c^{\frac{3}{2}}.\ d^{\frac{3}{2}}$, dont l'exposant est l'exposant 3 divisé par 2, parce qu'en tirant la racine quarrée d'une puissance, il faut diviser l'exposant de la

cette puissance par l'exposant 2 de la racine, ainsi que nous avons enseigné plus haut. Donc l'exposant des moyennes proportionnelles est égal à la somme des exposans des deux suites divisée par 2, ou à la moitié de cette somme, d'où il suit par les regles que nous avons données plus haut que la suite des moyennes proportionnelles est à son dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme 1 est à l'exposant de cette suite augmenté de l'unité, c'est-à-dire dans la supposition presente, comme 1 à $\frac{1}{2}+1$, ou comme 1 à $\frac{5}{2}$, ou comme 2 à 5.

APPLICATION A LA GEOMETRIE.

PROPOSITION XXIII.

61. *Si l'on prend des moyens proportionnels entre les Elemens d'un triangle* ABC, *& ceux d'un rectangle* CBDE, *la suite de ces moyens proportionnels formera une demi-Parabole quarrée* CBF (*Fig.* 30.).

Il faut considérer la Parabole CBF comme étant élevée à plomb, ou verticalement sur le plan ABC du triangle, ou sur le plan BCDE du rectangle, & regarder le triangle & le rectangle comme étant tous les deux dans un plan horisontal; & l'on doit observer la même chose dans la suite lorsqu'il s'agira de cas semblables.

DEMONSTRATION.

Les Elemens du triangle sont entr'eux comme o. *a*. *b*. *c*. *d*. *e*, &c. R, & ceux du rectangle comme la suite des égaux R. R. R. R, &c. R.

Donc le produit des uns par les autres sera comme oR. *a*R. *b*R. *c*R, &c. dont l'exposant est 1, parce que l'exposant des égaux étant o,

o.	*a*.	*b*.	*c*.	*d*.	*e*,	&c. R.
R.	R.	R.	R.	R.	R,	&c. R.
oR.	*a*R.	*b*R.	*c*R.	*d*R.	*e*R,	&c. RR.
oR.	$a^{\frac{1}{2}}$R.	$b^{\frac{1}{2}}$R.	$c^{\frac{1}{2}}$R.	$d^{\frac{1}{2}}$R.	$e^{\frac{1}{2}}$R,	&c. R.

& celui des Elemens du triangle étant 1, la somme de ces exposans est o+1, ou 1. Tirant donc la racine quarrée, on aura oR. $a^{\frac{1}{2}}$R. $b^{\frac{1}{2}}$R, &c, dont l'exposant est $\frac{1}{2}$. Ainsi la suite

des moyens proportionnels sera comme la suite des racines quarrées des nombres o. 1. 2. 3, &c. & par conséquent comme les ordonnées à la Parabole quarrée.

Nota. Que la suite R. R. R. R, &c. signifie la suite 1. 1. 1. 1. 1, ce qui fait qu'en tirant la racine quarrée de oR, *a*R, *b*R, *c*R, &c. je mets $a^{\frac{1}{2}}$R. $b^{\frac{1}{2}}$R, &c. parce que R ne valant que 1, la suite oR, *a*R, *b*R, &c. est la même que la suite o. *a*. *b*. *c*, &c. & par conséquent la suite des racines de oR. *a*R. *b*R, &c. est la même que la suite des racines de o. *a*. *b*. *c*, &c. qui est o. $a^{\frac{1}{2}}$. $b^{\frac{1}{2}}$. $c^{\frac{1}{2}}$, &c. ou oR. $a^{\frac{1}{2}}$R. $b^{\frac{1}{2}}$R, &c.

COROLLAIRE.

62. Donc le solide rectiligne ABCDEF (*Fig.* 31.) formé par les Elemens du triangle multipliés par ceux du rectangle, est égal au solide mixtiligne ABDEF (*Fig.* 32.) fait par les quarrés des moyens proportionnels ou des ordonnées à la demi-Parabole, l'un & l'autre de ces solides étant à sa base multipliée par le nombre des termes comme 1 à 2.

PROPOSITION XXIV.

63. *Si l'on prend des moyens proportionnels entre les Elemens d'une demi-Parabole quarrée* ABC *dont le sommet est* B, *& ceux d'un rectangle* ABEF, *la suite de ces moyens proportionnels formera une demi-Parabole du troisiéme genre* ABH (*Fig.* 33.)

DEMONSTRATION.

Les Elemens de la demi-Parabole quarrée sont comme o. $a^{\frac{1}{2}}$, $b^{\frac{1}{2}}$, $c^{\frac{1}{2}}$, &c. & ceux du rectangle, comme les égaux R. R. R, &c. Multipliant donc les uns par les autres le produit sera comme oR. $a^{\frac{1}{2}}$R. $b^{\frac{1}{2}}$R, &c. & tirant la racine quarrée, les moyens proportionnels seront oR. $a^{\frac{1}{4}}$R. $b^{\frac{1}{4}}$R, &c.

o.	$a^{\frac{1}{2}}$.	$b^{\frac{1}{2}}$.	$c^{\frac{1}{2}}$.	$d^{\frac{1}{2}}$,	&c. R.
R.	R.	R.	R.	R,	&c. R.
oR.	$a^{\frac{1}{2}}$R.	$b^{\frac{1}{2}}$R.	$c^{\frac{1}{2}}$R.	$d^{\frac{1}{2}}$R,	&c. RR.
oR.	$a^{\frac{1}{4}}$R.	$b^{\frac{1}{4}}$R.	$c^{\frac{1}{4}}$R.	$d^{\frac{1}{4}}$R,	&c. R.

Or cette suite a pour exposant $\frac{1}{4}$, & par conséquent ses termes

sont comme les racines quatriémes des nombres o. 1. 2. 3, &c. Donc les moyens proportionnels sont entr'eux comme ces racines. Mais dans la Parabole du troisiéme genre les Elemens sont comme les racines quatriémes des nombres o. 1. 2. 3, &c. donc les moyens proportionnels sont comme les Elemens de cette Parabole, &c.

COROLLAIRE.

64. Si la demi-Parabole étoit du second genre, les moyens proportionnels entre ses Elemens & ceux du rectangle formeroient une demi-Parabole du cinquiéme genre. Car les Elemens de cette demi-Parabole sont comme o. $a^{\frac{1}{3}}$. $b^{\frac{1}{3}}$, &c. & leurs produits par ceux du rectangle, comme oR. $a^{\frac{1}{3}}$R. $b^{\frac{1}{3}}$R. $c^{\frac{1}{3}}$R, &c. Tirant donc les racines quarrées, les moyens proportionnels seroient comme oR. $a^{\frac{1}{6}}$R. $b^{\frac{1}{6}}$R, &c.

$$\begin{array}{cccccl} o. & a^{\frac{1}{3}}. & b^{\frac{1}{3}}. & c^{\frac{1}{3}}. & d^{\frac{1}{3}}, & \&c.\ R. \\ R. & R. & R. & R. & R, & \&c.\ R. \\ \hline oR. & a^{\frac{1}{3}}R. & b^{\frac{1}{3}}R. & c^{\frac{1}{3}}R. & d^{\frac{1}{3}}R, & \&c.\ RR. \\ \hline oR. & a^{\frac{1}{6}}R. & b^{\frac{1}{6}}R. & c^{\frac{1}{6}}R. & d^{\frac{1}{6}}R, & \&c.\ R. \end{array}$$

c'est-à-dire comme les racines sixiémes des nombres o. 1. 2. 3. 4, &c. Or dans la Parabole du cinquiéme genre, les Elemens sont comme les racines sixiémes de ces mêmes nombres. Donc les moyens proportionnels sont comme ces Elemens.

Et on trouvera de la même façon que si la demi-Parabole étoit du troisiéme genre, du quatriémé, &c. les moyens proportionnels entre ces Elemens & ceux du rectangle formeroient une demi-Parabole du septiéme genre, du neuviéme, &c. selon la progression des nombres impairs 3. 5. 7. 9. 11. 13, &c.

PROPOSITION XXV.

65. *Si l'on prend des moyens proportionnels entre les Elemens d'un complement* ABC *de Parabole quarrée* (*Fig.* 34.) *dont* B *est le sommet, & ceux d'un rectangle* ABEF, *ces moyens proportionnels formeront un triangle* BAH.

DEMONSTRATION.

Les Elemens du complement sont comme o. a^2. b^2. c^2. d^2,

& ceux du rectangle comme les égaux R. R. R, &c. Multipliant donc les uns par les autres, le produit est comme oR. a^2R. b^2R, &c. & tirant les racines quarrées, les moyens proportionnels sont comme oR. a^1R. b^1R. c^1R, &c.

o.	a^2.	b^2.	c^2.	d^2,	&c.	R.
R.	R.	R.	R.	R,	&c.	R.
oR.	a^2R.	b^2R.	c^2R.	d^2R,	&c.	RR.
oR.	a^1R.	b^1R.	c^1R.	d^1R,	&c.	R.

ou comme les nombres o. 1. 2. 3, &c. Or les Elemens des triangles sont comme ces nombres ; donc les moyens proportionnels sont comme les Elemens du triangle.

COROLLAIRE.

66. Si le complement appartient à une Parabole du second genre, les moyens proportionnels entre ses Elemens & ceux du rectangle formeront une figure mixtiligne qui sera comme la suite des racines quarrées des cubes des nombres o. 1. 2. 3, &c. (*Fig.* 35.) Car les Elemens de ce complement sont comme o. a^3. b^3. c^3, &c. Multipliant donc ces Elemens par ceux du rectangle, le produit est comme oR. a^3R. b^3R, &c. & tirant les racines quarrées, les moyens proportionnels sont comme oR. $a^{\frac{3}{2}}$R. $b^{\frac{3}{2}}$R. $c^{\frac{3}{2}}$, &c. ou comme les racines quarrées des cubes o. a^3. b^3. c^3, &c.

o.	a^3.	b^3.	c^3.	d^3,	&c.	R.
R.	R.	R.	R.	R,	&c.	R.
oR.	a^3R.	b^3R.	c^3R.	d^3R,	&c.	RR.
oR.	$a^{\frac{3}{2}}$R.	$b^{\frac{3}{2}}$R.	$c^{\frac{3}{2}}$R.	$d^{\frac{3}{2}}$R;	&c.	R.

Et on trouvera de même que si le complement appartient à une Parabole du troisiéme genre, du quatriéme, &c. les moyens proportionnels seront comme les racines quarrées des quatriémes puissances, des cinquiémes, &c. & que par conséquent les figures que ces moyens proportionnels formeront, seront à leurs bases multipliées par la hauteur en commençant par la Parabole quarrée, comme 1 à 1 + 1, comme 1 à $\frac{3}{2}$ + 1, comme 1 à $\frac{4}{2}$ + 1, comme 1 à $\frac{5}{2}$ + 1, &c. ou comme 2 à 4, comme 2 à 5, comme 2 à 6, comme 2 à 7, & ainsi de suite.

PROPOSITION XXVI.

68. *Si on prend des moyens proportionnels entre les Elemens d'un triangle* ABC, *& ceux d'une demi-Parabole quarrée* BCD, *dont* C *est le sommet, ces moyens proportionnels formeront un plan mixtiligne* BCE *dont les Elemens seront comme les racines quatriémes des cubes des nombres* o. 1. 2. 3. 4, *&c.* (*Fig.* 36.)

DEMONSTRATION.

Les Elemens du triangle sont comme o. a. b. c. d, &c. & ceux de la demi-Parabole quarrée, comme o. $a^{\frac{1}{2}}$. $b^{\frac{1}{2}}$. $c^{\frac{1}{2}}$, &c. Multipliant donc les uns par les autres, le produit sera comme o. $a^{\frac{3}{2}}$. $b^{\frac{3}{2}}$. $c^{\frac{3}{2}}$, &c. & tirant la racine quarrée, les moyens proportionnels seront comme o. $a^{\frac{3}{4}}$. $b^{\frac{3}{4}}$. $c^{\frac{3}{4}}$, &c. c'est-à-dire comme les racines quatriémes des cubes des nombres o. 1. 2. 3, &c.

o.	a.	b.	c.	d.	e,	&c.	R.
o.	$a^{\frac{1}{2}}$.	$b^{\frac{1}{2}}$.	$c^{\frac{1}{2}}$.	$d^{\frac{1}{2}}$.	$e^{\frac{1}{2}}$,	&c.	R.
o.	$a^{\frac{3}{2}}$.	$b^{\frac{3}{2}}$.	$c^{\frac{3}{2}}$.	$d^{\frac{3}{2}}$.	$e^{\frac{3}{2}}$,	&c.	RR.
o.	$a^{\frac{3}{4}}$.	$b^{\frac{3}{4}}$.	$c^{\frac{3}{4}}$.	$d^{\frac{3}{4}}$.	$e^{\frac{3}{4}}$,	&c.	R.

COROLLAIRE.

68. Par un semblable calcul, on trouvera que si la demi-Parabole est du second genre, du troisiéme, du quatriéme, &c. les moyens proportionnels entre ses Elemens & ceux du triangle seront comme les racines sixiémes des quatriémes puissances, comme les racines huitiémes des cinquiémes puissances, comme les racines diziémes des sixiémes puissances, &c. c'est-à-dire que les exposans de ces moyens proportionnels seront, à commencer par la Parabole quarrée $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{7}{12}$, &c. où les numérateurs different entr'eux de l'unité, & les dénominateurs de deux unités. D'où il suit que les figures faites par ces moyens proportionnels seront à leur base multipliée par la hauteur, comme 1 à $\frac{3}{4}+1$, comme 1 à $\frac{4}{6}+1$, comme 1 à $\frac{5}{8}+1$, &c. ou comme 4 à 7, comme 6 à 10, comme 8 à 13, &c. où l'on voit que les premiers termes 4, 6, 8, &c. de ces rapports, augmentent de deux unités, & les derniers 7, 10, 13, &c. augmentent de trois.

PROPOSITION XXVII.

69. *Si l'on prend des moyens proportionnels entre les Elemens d'un triangle* ABC, *& ceux d'un complement* CBD *de Parabole quarrée* (*Fig.* 37.) *dont le sommet est* B, *ces moyens proportionnels formeront une figure mixtiligne* CBE *dont les Elemens seront comme les racines quarrées des cubes des nombres* o. 1. 2. 3. 4, &c.

DEMONSTRATION.

Les Elemens du triangle sont comme o. a. b. c, &c. & ceux du complement comme o. a^2. b^2. c^2, &c. Donc le produit des uns par les autres, est comme o. a^3. b^3. c^3. d^3, &c. & tirant les racines quarrées, les moyens proportionnels sont comme o. $a^{\frac{3}{2}}$. $b^{\frac{3}{2}}$. $c^{\frac{3}{2}}$, &c. ou comme les racines quarrées des cubes des nombres o. 1. 2, 3. 4, &c.

o.	a.	b.	c.	d,	&c. R.
o.	a^2.	b^2.	c^2.	d^2,	&c. R.
o.	a^3.	b^3.	c^3.	d^3,	&c. RR.
o.	$a^{\frac{3}{2}}$.	$b^{\frac{3}{2}}$.	$c^{\frac{3}{2}}$.	$d^{\frac{3}{2}}$,	&c. R.

COROLLAIRE.

Par un semblable calcul, on trouvera que si le complement appartient à une Parabole du second genre, du troisiéme, du quatriéme, &c. les moyens proportionnels auront pour exposant en commençant par la Parabole quarrée $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{6}{2}$, &c. & que par conséquent les figures formées par ces moyens proportionnels seront à leur base multipliée par la hauteur, comme 1 à $\frac{3}{2}+1$, comme 1 à $\frac{4}{2}+1$, comme 1 à $\frac{5}{2}+1$, &c. ou comme 2 à 5, comme 2 à 6, comme 2 à 7, comme 2 à 8, &c.

PROPOSITION XXVIII.

71. *Si l'on prend des moyens proportionnels entre les Elemens d'une demi-Parabole quarrée* ABD, *& ceux de son complement* ABC (*Fig.* 38) *le sommet commun étant en* B, *les moyens proportionnels formeront un plan* ABE, *dont les Elemens seront comme les racines quatriémes des cinquiémes puissances des nombres* o. 1. 2. 3, *&c.*

DEMONSTRATION.

Les Elemens de la demi-Parabole sont comme o. $a^{\frac{1}{2}}$. $b^{\frac{1}{2}}$. $c^{\frac{1}{2}}$, &c. & ceux du complement, comme o. a^2. b^2. c^2, &c. Donc le produit des uns par les autres est comme o. $a^{\frac{5}{2}}$. $b^{\frac{5}{2}}$, & par conséquent les racines quarrées, ou les moyens proportionnels, sont comme o. $a^{\frac{5}{4}}$. $b^{\frac{5}{4}}$. $c^{\frac{5}{4}}$, &c c'est-à-dire, comme les racines quatriémes des cinquiémes puissances des nombres o. 1. 2. 3. 4, &c.

o.	$a^{\frac{1}{2}}$.	$b^{\frac{1}{2}}$.	$c^{\frac{1}{2}}$.	$d^{\frac{1}{2}}$,	&c.	R.
o.	a^2.	b^2.	c^2.	d^2,	&c.	R.
o	$a^{\frac{5}{2}}$.	$b^{\frac{5}{2}}$.	$c^{\frac{5}{2}}$.	$d^{\frac{5}{2}}$,	&c.	RR.
o.	$a^{\frac{5}{4}}$.	$b^{\frac{5}{4}}$.	$c^{\frac{5}{4}}$.	$c^{\frac{5}{4}}$,	&c.	R.

COROLLAIRE.

72. Par un semblable calcul, on trouvera que si la demi-Parabole étoit du second genre, du troisiéme, du quatriéme, &c. l'exposant des moyens proportionnels seroit en commençant par la Parabole quarrée $\frac{5}{4}$, $\frac{10}{6}$, $\frac{17}{8}$, $\frac{26}{10}$, $\frac{37}{12}$, où les dénominateurs se surpassent de deux, & chaque numérateur surpasse le précédent d'une fois son dénominateur moins l'unité. Par exemple dans l'exposant $\frac{17}{8}$, le numérateur 17 surpasse le numérateur précédent 10 d'une fois son dénominateur 8 moins 1, c'est-à-dire de 7, & ainsi des autres ; & par conséquent les figures formées par ces moyens proportionnels sont à leurs bases multipliées par la hauteur, comme 1 à $\frac{5}{4}+1$, comme 1 à $\frac{10}{6}+1$, &c. ou comme 4 à 9, comme 6 à 16, comme 8 à 25, comme 10 à 36, &c. ensorte que ces rapports sont $\frac{4}{9}$, $\frac{6}{16}$, $\frac{8}{25}$, $\frac{10}{36}$, &c. où les numérateurs se surpassent de deux unités, & chaque dénominateur surpasse le précédent d'une fois son numérateur plus l'unité. Car, par exemple, dans le rapport $\frac{8}{25}$, le dénominateur 25 surpasse le dénominateur précédent 16 d'une fois son numérateur 8 plus 1, c'est-à-dire de 9, & ainsi des autres.

REMARQUE.

73. A l'imitation de ces figures dont les Elemens sont moyens proportionnels entre les Elemens de deux autres, on pourroit

en trouver une infinité d'autres dont les exposans & les rapports se connoîtroient avec la même facilité. Par exemple, on pourroit prendre des moyens proportionnels entre les Elemens de deux Paraboles de différens genres ou de deux complemens, &c. ce que je laisse à chercher aux Commençans.

CHAPITRE V.

Des Suites divisées les unes par les autres.

PROPOSITION XXIX.

74. *Si l'on divise les termes d'une Suite par les termes d'une autre; les quotients formeront une nouvelle Suite dont l'exposant sera égal à l'exposant de la Suite divisée moins l'exposant de la Suite qui divise.*

L'exposant de la nouvelle Suite sera positif si l'exposant de la suite divisée est plus grand que l'exposant de la suite qui divise, & negatif si l'exposant de la suite divisée est moindre que l'exposant de celle qui divise.

Si l'exposant de la nouvelle suite est négatif, ses termes seront réciproquement proportionnels aux termes d'une suite dont l'exposant est égal à celui de la suite qui divise moins celui de la suite divisée.

Enfin, le rapport de cette nouvelle suite à son dernier terme multiplié par le nombre des termes est toujours comme 1 à son exposant augmenté de l'unité.

DEMONSTRATION.

Soit par exemple la Suite o. a^3. b^3. c^3. d^3, &c. à diviser par la suite o. a^2. b^2. c^2, &c. il est évident par les regles du calcul des exposans, que l'exposant du quotient doit être $3-2$, c'est-à-dire l'exposant 3 de la suite à diviser moins l'exposant 2 de la suite qui divise, & que par conséquent le quotient doit être la suite o. a^1. b^1. c^1, &c.

$$\begin{array}{l} o.\ a^3.\ b^3.\ c^3.\ d^3,\ \&c. \\ o.\ a^2.\ b^2.\ c^2.\ d^2,\ \&c. \\ \hline o.\ a^1.\ b^1.\ c^1.\ d^1,\ \&c. \end{array}$$

En second lieu, soit la suite o. a^2. b^2. c^2. d^2, &c. à diviser par la suite o. a^3. b^3. c^3. d^3, &c. dont l'exposant 3 est plus grand

grand que l'exposant 2 de la suite à diviser; il est encore évident par les regles du même calcul des exposans que l'exposant du quotient doit être l'exposant 2 moins l'exposant 3, & que par conséquent le quotient doit être o. a^{-1}. b^{-1}. c^{-1}. d^{-1}, &c. dont l'exposant est négatif.

$$\begin{array}{l} o.\ a^2.\ b^2.\ c^2.\ d^2,\ \&c. \\ o.\ a^3.\ b^3.\ c^3.\ d^3,\ \&c. \\ \hline o.\ a^{-1}.\ b^{-1}.\ c^{-1}.\ d^{-1},\ \&c. \end{array}$$

En troisiéme lieu, soit la suite o. a^{-1}. b^{-1}. c^{-1}, &c. qui est le quotient de la suite o. a^2. b^2. c^2, &c. divisée par la suite o. a^3. b^3. c^3, &c. dont l'exposant est 3, si l'on prend une suite dont l'exposant soit égal à l'exposant 3 de la suite qui divise moins l'exposant 2 de la suite divisée, cette suite sera o. a^1. b^1. c^1. d^1, &c. & je dis que les termes du quotient o. a^{-1}. b^{-1}. c^{-1}. d^{-1}, &c. seront réciproquement proportionnels aux termes de la suite o. a^1. b^1. c^1, &c. car le quotient o. a^{-1}. b^{-1}. c^{-1} &c. peut s'exprimer ainsi o. $\frac{1}{a^1}$, $\frac{1}{b^1}$, $\frac{1}{c^1}$, $\frac{1}{d^1}$, &c. & la suite o. a^1. b^1. c^1, &c. peut s'exprimer de cette façon o. $\frac{a^1}{1}$, $\frac{b^1}{1}$, $\frac{c^1}{1}$, $\frac{d^1}{1}$, &c. Or dans ces deux suites ainsi exprimées, si l'on prend par exemple le second & le troisiéme terme de la premiere, on trouvera qu'ils sont entr'eux réciproquement comme le troisiéme & le second terme de la seconde, c'est-à-dire $\frac{1}{a^1}$. $\frac{1}{b^1}$ :: $\frac{b^1}{1}$. $\frac{a^1}{1}$. Car si l'on cherche un quatriéme proportionnel aux trois termes $\frac{1}{a^1}$. $\frac{1}{b^1}$. $\frac{b^1}{1}$. on aura $\frac{ab^1}{b} = \frac{a^1}{1}$, & de même des autres termes.

Enfin la nouvelle suite est à son dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme 1 à son exposant augmenté de l'unité. Ce qui est évident par la regle generale donnée ci-dessus. (*N.* 12. 13.)

APPLICATION A LA GEOMETRIE.

PROPOSITION XXX.

75. *Si l'on divise les plans ou les Elemens d'une Pyramide rectiligne par les Elemens d'un triangle, ou ce qui revient au même, si l'on tire les racines quarrées des Elemens d'une Pyramide, & qu'on prenne des troisiémes proportionnelles aux Elemens d'un triangle, & à ces racines quarrées, ces troisiémes proportionnelles formeront un plan qui sera un triangle.*

DEMONSTRATION.

Par la nature de la proportion continuë, le produit des extrêmes est égal au quarré de la moyenne ; & par la nature de la division le dividende est égal au produit du diviseur par le quotient. Donc si on tire la racine quarrée du dividende, cette racine sera moyenne proportionnelle entre le diviseur & le quotient, puisque le quarré de cette racine sera égal au produit des deux ; d'où il suit que c'est la même chose de diviser une grandeur par une autre, ou de prendre une moyenne proportionnelle au diviseur & à la racine quarrée du nombre à diviser. Cela posé

Si l'on veut se servir de la division, les Elemens ou les plans qui composent la Pyramide sont entr'eux comme o. a^2. b^2. c^2. d^2, &c. & les Elemens du triangle sont comme o. a. b. c. d, &c. divisant donc les uns par les autres, le quotient sera comme o. a. b. c. d, &c. & par conséquent comme les Elemens du triangle.

o. a^2. b^2. c^2. d^2, &c. R.
o. a. b. c. d, &c. R.
____
o. a. b. c. d, &c. R.

Que si l'on veut prendre les troisiémes proportionnelles, il est sûr que les racines des Elemens de la Pyramide sont comme o. a. b. c, &c. Or les Elemens du triangle sont aussi comme o. a. b. c, donc les troisiémes proportionnelles à ces deux suites seront encore comme o. a. b. c, &c. car :: a. a. a ; donc les troisiémes proportionnelles aux Elemens d'un triangle ABC (*Fig.* 39.) & aux racines quarrées des Elemens d'une Pyramide, ou aux Elemens du triangle CBD, forment un autre triangle CBE.

COROLLAIRE.

76. Si l'on divise les plans Elementaires d'une Pyramide par les Elemens d'une demi-Parabole quarrée, ou ce qui est la même chose, si l'on prend des troisiémes proportionnelles aux Elemens d'une demi-Parabole quarrée ABC (*Fig.* 40.) dont B est le sommet, & aux Elemens du triangle ABD qui sont les racines quarrées des Elemens de la Pyramide, ces troisiémes proportionnelles formeront une figure mixtiligne ABE dont les Elemens seront les racines quarrées des troisiémes

puissances. Car les Elemens de la Pyramide sont comme o. a^2. b^2. c^2. d^2, & ceux de la demi-Parabole sont comme o. $a^{\frac{1}{2}}$. $b^{\frac{1}{2}}$. $c^{\frac{1}{2}}$, &c. divisant donc les uns par les autres, les quotients seront comme o. $a^{\frac{3}{2}}$. $b^{\frac{3}{2}}$. $c^{\frac{3}{2}}$, &c. ou comme les racines quarrées des troisiémes puissances.

$$\begin{array}{l} o.\ a^2.\ b^2.\ c^2.\ d^2,\ \&c. \\ o.\ a^{\frac{1}{2}}.\ b^{\frac{1}{2}}.\ c^{\frac{1}{2}}.\ d^{\frac{1}{2}},\ \&c. \\ \hline o.\ a^{\frac{3}{2}}.\ b^{\frac{3}{2}}.\ c^{\frac{3}{2}}.\ d^{\frac{3}{2}},\ \&c. \end{array}$$

Ou bien par les troisiémes proportionnelles. Les Elemens de la demi-Parabole sont comme o. $a^{\frac{1}{2}}$ $b^{\frac{1}{2}}$. $c^{\frac{1}{2}}$, &c. & ceux des racines des Elemens de la Pyramide, comme o. a^1. b^1. c^1, &c. Prenant donc des troisiémes proportionnelles à ces deux suites, ces proportionnelles seront o. $a^{\frac{3}{2}}$. $b^{\frac{3}{2}}$. $c^{\frac{3}{2}}$, &c. Car lorsque les exposans des puissances sont en progression arithmetique, les puissances sont en proportion geometrique, & par conséquent les termes $a^{\frac{1}{2}}$, a^1, $a^{\frac{3}{2}}$, sont proportionnels de même que les termes $b^{\frac{1}{2}}$, b^1, $b^{\frac{3}{2}}$, &c. & ainsi des autres. D'où il suit que la figure ABE sera à sa base multipliée par sa hauteur comme 1 à $\frac{3}{2}+1$, ou comme 2 à 5.

Et par un semblable calcul, on trouvera que si la demi-Parabole étoit du second genre, du troisiéme, du quatriéme, &c. l'exposant des troisiémes proportionnels seroit en commençant par la Parabole quarrée $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{9}{5}$, &c. & par conséquent les figures formées par ces proportionnelles seroient à leur base multipliée par la hauteur, comme 1 à $\frac{3}{2}+1$, comme 1 à $\frac{5}{3}+1$, comme 1 à $\frac{7}{4}+1$, &c. ou comme 2 à 5, comme 3 à 8, comme 4 à 11, comme 5 à 14, &c. où l'on voit que les derniers termes des rapports augmentent toujours de trois.

COROLLAIRE II.

77. Et si l'on divisoit les mêmes Elemens de Pyramide par les Elemens d'un rectangle, en prenant des troisiémes proportionnelles aux Elemens du rectangle & aux racines des Elemens de la Pyramide, ces troisiémes proportionnelles seroient entr'elles comme les Elemens d'un complement de Parabole quarrée ; car l'exposant des Elemens du rectangle étant o, à cause que ces Elemens sont égaux entr'eux, & celui des ra-

cines des Elemens de la Pyramide étant 1, l'exposant des troisiémes proportionnelles est 2, lequel est l'exposant des Elemens d'un complement de Parabole quarrée.

PROPOSITION XXXI.

78. *Si on divise les quarrés des Elemens d'un complement de demi-Parabole quarrée par les Elemens de cette demi-Parabole, c'est-à-dire si on prend des troisiémes proportionnelles aux Elemens de la demi-Parabole quarrée & à ceux du complement, ces troisiémes proportionnelles formeront une figure mixtiligne dont les Elemens seront comme les racines quarrées des septiémes puissances des nombres o. 1. 2. 3, &c.*

DEMONSTRATION.

Les quarrés des Elemens du complement sont comme o. a^4. b^4. c^4, &c. & ceux de la demi-Parabole comme o. $a^{\frac{1}{2}}$. $b^{\frac{1}{2}}$. $c^{\frac{1}{2}}$, &c. & divisant les uns par les autres les quotients sont o. $a^{\frac{7}{2}}$. $b^{\frac{7}{2}}$, &c. ou les racines quarrées des septiémes puissances.

$$\frac{\text{o. } a^4.\ b^4.\ c^4,\ \&c.}{\text{o. } a^{\frac{1}{2}}.\ b^{\frac{1}{2}}.\ c^{\frac{1}{2}},\ \&c.}$$
$$\text{o. } a^{\frac{7}{2}}.\ b^{\frac{7}{2}}.\ c^{\frac{7}{2}},\ \&c.$$

Ou bien les Elemens de la Parabole étant comme o. $a^{\frac{1}{2}}$. $b^{\frac{1}{2}}$. $c^{\frac{1}{2}}$, &c. & ceux du complement o. a^2. b^2. c^2, &c. & les troisiémes proportionnelles doivent être o. $a^{\frac{7}{2}}$. $b^{\frac{7}{2}}$. $c^{\frac{7}{2}}$, &c. car $a^{\frac{1}{2}}$. a^2. $a^{\frac{7}{2}}$ sont en progression.

COROLLAIRE I.

79. Par un semblable calcul, on trouvera que si la Parabole étoit du second genre, du troisiéme, du quatriéme, &c. les exposans des troisiémes proportionnelles aux Elemens de cette Parabole & à ceux de son complement, seroient en commençant par la Parabole quarrée $a^{\frac{7}{2}}$. $a^{\frac{17}{3}}$. $a^{\frac{31}{4}}$. $a^{\frac{49}{5}}$, &c. où le second numerateur surpasse le premier de trois fois son dénominateur 3 plus l'unité, le troisiéme surpasse le second de trois fois son dénominateur 4 plus deux unités, le quatriéme surpasse le troisiéme de trois fois son dénominateur 5 plus trois unités, &c. D'où il suit que les figures formées par ces pro-

portionnelles sont au produit de la base par la hauteur, comme 1 à $\frac{7}{2}+1$, comme 1 à $\frac{17}{3}+1$, &c. ou comme $\frac{2}{9}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{4}{35}$, $\frac{5}{54}$, ou chaque dénominateur surpasse le précédent de quatre fois son numérateur moins l'unité.

COROLLAIRE II.

80. Et si l'on prend des troisiémes proportionnelles aux Elemens d'un triangle & à ceux d'un complement de Parabole du premier genre, du second, du troisiéme, &c. on trouvera que les exposans de ces proportionnelles seront 3, 5, 7, 9, 11, &c. & au contraire si on prend des troisiémes proportionnelles aux Elemens d'un rectangle, & à ceux d'un complement de Parabole du premier genre, du second, du troisiéme, &c. les exposans de ces proportionnelles seront 4, 6, 8, 10, &c. Ainsi dans le premier cas les figures formées par ces proportionnelles, seront à leur base multipliée par la hauteur, comme 1 à $3+1$, ou 4; comme 1 à $5+1$, ou 6; comme 1 à $7+1$, ou 8, &c. & dans le second cas, elles seront comme 1 à $4+1$, ou 5; comme 1 à $6+1$, ou 7; comme 1 à $8+1$, ou 9, &c.

PROPOSITION XXXII.

81. *Si l'on divise les plans Elementaires d'un Paralellepipede par les Elemens d'un triangle, ou ce qui revient au même, si l'on prend des troisiémes proportionnelles aux Elemens d'un triangle* ABC, *& aux Elemens d'un rectangle* ABED *qui sont les racines des Elemens du Paralellepipede, ces troisiémes proportionnelles formeront une figure* BQPFA *dont les Elemens seront réciproques aux termes de la suite* 0. 1. 2. 3. 4, *&c. ou aux Elemens du triangle* (Fig. 41.)

DEMONSTRATION.

Les Elemens du Paralellepipede sont comme les égaux 0. a^0. b^0. c^0. d^0, &c. & ceux du triangle sont comme 0. a^1. b^1. c^1, &c. Divisant donc les uns par les autres, les quotients seront comme 0. a^{-1}. b^{-1}. c^{-1}, &c. dont l'exposant est négatif. Et les termes de cette suite selon ce qui a été dit plus haut, sont réciproques aux termes de la suite 0.

$$\begin{array}{l} 0.\ a^0.\ b^0.\ c^0.\ d^0,\ \&c. \\ 0.\ a^1.\ b^1.\ c^1.\ d^1,\ \&c. \\ \hline 0.\ a^{-1}.\ b^{-1}.\ c^{-1}.\ d^{-1},\ \&c. \end{array}$$

$a^1. b^1. c^1. d^1$, dont l'exposant 1 est égal à l'exposant 1 de la suite qui divise moins l'exposant o de la divisée.

Pour démontrer ceci par la figure même, considerez que le rectangle CA×AF est égal au quarré de AD par la construction, & que le rectangle ZX×XI est égal au quarré de XY, or les quarrés de AD & de XY sont égaux. Donc CA×AF =ZX×XI. Donc aussi AF. XI :: ZX. CA, c'est-à-dire les droites AF, XI sont réciproques aux droites CA, ZX. Et on prouvera de même que tous les Elemens de la Figure ABQPF que forment les troisiémes proportionnelles, sont réciproques aux Elemens du triangle ABC.

COROLLAIRE I.

82. La Figure ABQPF est infinie du côté de Q. Car les Elemens du Paralellogramme ABED étant égaux entr'eux, & ceux du triangle allant toujours en décroissant jusqu'en B, où son Element est o, il est visible que les troisiémes proportionnelles vont toujours en augmentant jusqu'à la derniere qui doit être infinie, parce que l'Element BE étant infiniment grand par rapport à l'Element zero du triangle, la troisiéme proportionnelle à l'Element zero & à l'Element BE est aussi infinie.

COROLLAIRE. II.

83. Si des extremités des troisiémes proportionnelles on tire des droites FG, IH, ML, &c. paralelles à la hauteur AB du triangle, les rectangles ABGF, XBHI, &c. seront tous égaux. Car les droites FG, HI, sont égales aux abscisses BA, BX, &c. lesquelles sont entr'elles comme les Elemens correspondans CA, ZX, &c. du triangle. Or les Elemens CA, ZX, &c. sont réciproques aux bases AF, XI, &c. des rectangles; donc ces rectangles ont les hauteurs GF, HI réciproques à leurs bases AF, XI, &c. c'est-à-dire GF. HI :: XI. AF; donc GF×AF =HI×XI, & ainsi des autres. D'où il suit que la Figure formée par les troisiémes proportionnelles est la même que l'espace compris entre l'hyperbole ordinaire & l'asymptote. Car la proprieté de cet espace est que tous les rectangles faits par des paralelles aux asymptotes BQ, BA sont égaux entr'eux, ainsi que nous l'avons démontré dans la *Theorie & Pratique du Geometre*.

COROLLAIRE III.

84. Si l'exposant des troisiémes proportionnelles est -1, la figure qu'elles forment sera à sa base AF multipliée par sa hauteur AB, c'est-à-dire au rectangle ABGF, ou au dernier terme AF multiplié par le nombre des termes AB, comme 1 à $-1 + 1$, ou comme 1 à 0. Et par conséquent cette Figure est infiniment grande, puisque 1 est infiniment grand par rapport à zero qui n'est rien. Où il faut observer que je prends pour base la droite AF, parce qu'elle répond à la base CA du triangle qui est le dernier terme de la suite de ses Elemens.

COROLLAIRE IV.

85. On auroit la même Figure si on avoit divisé les plans Elementaires d'une Pyramide rectiligne par les Elemens d'un complement à la demi-Parabole du second genre; car les Elemens de la Pyramide sont comme $0.\ a^2.\ b^2.\ c^2$, &c. & ceux du complement comme $0.\ a^3.\ b^3.\ c^3$, &c. & par conséquent les quotients auroient été comme $0.\ a^{-1}.\ b^{-1}.\ c^{-1}$, &c. De même encore si on avoit divisé les plans Elementaires d'une Pyramide parabolique du premier genre par les Elemens du complement de la même Parabole; car les plans de la Pyramide parabolique sont comme $0.\ a.\ b.\ c.\ d$, &c. & les Elemens du complement comme $0.\ a^2.\ b^2.\ c^2$, &c. donc les quotients auroient été encore comme $0.\ a^{-1}.\ b^{-1}.\ c^{-1}$, &c.

PROPOSITION XXXIII.

86. *Si l'on divise les plans Elementaires d'un Parallelepipede par les Elemens d'un complement de Parabole quarrée dont le sommet est* B, *les quotients ou la Figure* ABQPF *sera la suite réciproque de la suite* $0.\ a^2.\ b^2.\ c^2$, *&c. ou des Elemens du complement* ABC (Fig. 42.)

DEMONSTRATION.

Les plans Elementaires sont comme la suite des égaux $0.\ a^0.\ b^0.\ c^0.\ d^0$, &c. & ceux du complement comme la suite $0.\ a^2.\ b^2.\ c^2$, &c. Divisant donc les uns par les autres, les quotients seront comme $0.\ a^{-2}.\ b^{-2}.\ c^{-2}$, &c.

$$0.\ a^0.\ b^0.\ c^0.\ d^0, \&c.$$
$$0.\ a^2.\ b^2.\ c^2.\ d^2, \&c.$$
$$\overline{0.\ a^{-2}.\ b^{-2}.\ c^{-2}.\ d^{-2}, \&c.}$$

qui est une suite réciproque à la suite o. a^2. b^2. c^2, &c. dont l'exposant est égal à l'exposant 2 de la suite qui divise moins l'exposant o de la divisée.

COROLLAIRE I.

87. Les troisiémes proportionnelles AF, XV, &c. sont entr'elles en raison doublée de la raison réciproque des abscisses BX, BA; car ces proportionnelles sont réciproques aux Elemens CA, ZX, c'est-à-dire AF. XV :: ZX. CA. mais ZX. CA :: $\overline{BX}^2$. $\overline{BA}^2$. par la nature de la parabole. Donc AF. XV :: $\overline{BX}^2$. $\overline{BA}^2$.

COROLLAIRE II.

88. Les rectangles ABGF, ABHV, &c. sont réciproques aux abscisses BX, BA, &c. car ces rectangles sont en raison composée de leurs bases AF, XV, & de leurs hauteurs AB, XB. Mais par le Corollaire précédent on a AF. XV :: $\overline{BX}^2$. $\overline{BA}^2$. Donc les rectangles sont en raison composée de $\overline{BX}^2$. $\overline{BA}^2$, & de AB, XB, c'est-à-dire ils sont comme $\overline{BX}^2 \times AB$. $\overline{BA}^2 \times XB$, & divisant par BX × AB, les rectangles sont comme BX. BA, ou réciproquement comme les abscisses.

COROLLAIRE III.

89. Les troisiémes proportionnelles ayant pour exposant −2, leur suite est à leur base AF multipliée par le nombre des termes ou par la hauteur AB, comme 1 à −2+1, ou à −1, & par conséquent la Figure ABQP est, pour ainsi-dire, plus qu'infinie, puisque son rapport au rectangle ABGF est plus grand que le rapport de 1 à zero qui est infini.

Au reste ceci est évident par la formation des Figures; car puisque lorsque ABC (*Fig.* 41.) est un triangle, les troisiémes proportionnelles aux Elemens de ce triangle & à ceux du rectangle BAED forment une Figure infinie ABQPF, il est visible que lorsque ABC (*Fig.* 42.) est un complement de Parabole dont les Elemens sont toujours moindres que ceux d'un triangle, les troisiémes proportionnelles aux Elemens de ce complement

complement & à ceux du rectangle BAED doivent former une Figure ABQPF plus grande que la précédente. Or la précédente est infinie; donc, &c.

COROLLAIRE IV.

90. Si le complement appartenoit à une Parabole cubique, on trouveroit de la même façon que l'exposant des troisiémes proportionnelles seroit -3, que ces proportionnelles seroient entr'elles en raison triplée de la raison réciproque des abscisses, que les rectangles seroient entr'eux en raison doublée de la raison réciproque de ces mêmes abscisses, & ainsi des autres complemens des genres supérieurs. Enfin le rapport de l'espace ABQPF au rectangle ABGF seroit plus qu'infini.

PROPOSITION XXXIV.

91. *Si l'on divise les plans Elementaires d'un Paralellepipede par les Elemens d'une demi-Parabole quarrée* ABC (Fig. 43.) *dont* B *est le sommet, les quotients formeront une Figure* ABQPF *dont les Elemens seront comme la suite réciproque* $o.\ a^{-\frac{1}{2}}.\ b^{-\frac{1}{2}}.\ c^{-\frac{1}{2}}$, *&c. de la suite* $o.\ a^{\frac{1}{2}}.\ b^{\frac{1}{2}}.\ c^{\frac{1}{2}}$, *&c. ou des Elemens de la demi-Parabole; & cette Figure quoiqu'infinie du côté de* Q *aura cependant un rapport fini à sa base multipliée par la hauteur, ou au rectangle* ABED, *ou* ABGF.

DEMONSTRATION.

Les plans Elementaires du paralellepipede sont comme les égaux $o.\ a^{0}.\ b^{0}.\ c^{0}$, &c. & les Elemens de la Parabole comme $o.\ a^{\frac{1}{2}}.\ b^{\frac{1}{2}}.\ c^{\frac{1}{2}}$, &c. Donc les quotients sont comme $o.\ a^{-\frac{1}{2}}.\ b^{-\frac{1}{2}}.\ c^{-\frac{1}{2}}$, &c. c'est-à-dire,

$$\frac{o.\ a^{0}.\ b^{0}.\ c^{0}.\ d^{0},\ \&c.}{o.\ a^{\frac{1}{2}}.\ b^{\frac{1}{2}}.\ c^{\frac{1}{2}}.\ d^{\frac{1}{2}},\ \&c.}$$
$$o.\ a^{-\frac{1}{2}}.\ b^{-\frac{1}{2}}.\ c^{-\frac{1}{2}}.\ d^{-\frac{1}{2}},\ \&c.$$

comme la suite réciproque de la suite $o.\ a^{\frac{1}{2}}.\ b^{\frac{1}{2}}.\ c^{\frac{1}{2}}$, &c. dont l'exposant est égal à l'exposant $\frac{1}{2}$ de la suite qui divise moins l'exposant o de la suite divisée. Or cette suite ayant pour exposant $-\frac{1}{2}$, elle est à son dernier terme multiplié par le nombre des termes comme 1 est à $-\frac{1}{2}+1$, ou comme 1 à $\frac{1}{2}$; & par conséquent la Figure ABQPF quoiqu'infinie du côté

de Q pour les raisons que nous avons dites ci-dessus, est cependant au rectangle fini ABGF comme 1 à $\frac{1}{2}$, ou comme 2 à 1, c'est-à-dire dans un rapport fini.

COROLLAIRE I.

92. On trouvera par un semblable raisonnement que si la demi-Parabole est du second genre, du troisiéme, du quatriéme, &c. la suite des troisiémes proportionnelles aura pour exposant $-\frac{2}{3}$, $-\frac{3}{4}$, $-\frac{4}{5}$, $-\frac{5}{6}$, &c. & que la Figure qu'elles forment sera au rectangle de sa base par sa hauteur comme 1 à $-\frac{2}{3}+1$, comme 1 à $-\frac{3}{4}+1$, comme 1 à $-\frac{4}{5}+1$, &c. ou comme 1 à $\frac{2}{3}$, comme 1 à $\frac{3}{4}$, comme 1 à $\frac{4}{5}$, &c. ou comme 3 à 2, comme 4 à 3, comme 5 à 4, & ainsi de suite.

COROLLAIRE II.

93. Il suit delà qu'afin que la Figure formée par les troisiémes proportionnelles ait un rapport fini au rectangle de sa base par sa hauteur, il faut que l'exposant négatif soit plus grand que -1, ou moins négatif que -1, afin qu'en ajoûtant 1 à cet exposant, le rapport se trouve positif.

REMARQUE.

Quoique ce que nous venons de dire dans cette Proposition & dans la précédente, soit démontré d'une maniere incontestable, on ne sera peut-être pas fâché que je justifie Wallis au sujet d'une erreur dans laquelle Messieurs de Varignon, Lebnits, & Volfius prétendent que cet Auteur est tombé. Les Géometres que je viens de citer sont si Illustres qu'on pourroit être tentés de les croire, si l'on ignoroit qu'en fait de Géometrie, il n'y a d'autre autorité que la démonstration. Voici dequoi il s'agit.

Si dans les Figures 41, 42, 43, & 44, on conçoit que le côté AB de la Figure ABC soit prolongé à l'infini du côté de A, & que les côtés AB, ED du rectangle ABED soient aussi prolongés à l'infini du même côté, & que l'on continue à prendre des troisiémes proportionnelles aux Elemens de la Figure ABC prolongée aussi du côté de AC & à ceux du rectangle ABED; il est visible qu'on aura une autre espace d'une étendue infinie AFxz. Or il est vrai qu'en suivant les regles du calcul integral, on trouve que cet espace AFxz est fini lorsque ABC est un complement d'une Parabole quelconque

(*Fig.* 42.). Mais cela n'empêche pas que l'espace opposé ABQPF ne soit plus qu'infini comme nous l'avons démontré; & c'est à tort qu'en prouvant une vérité on voudroit en détruire une autre qui n'est pas moins appuyée sur la Démonstration.

Mais pour faire voir que les principes de Wallis s'accordent parfaitement avec ceux du calcul intégral, je vais prendre un exemple qui servira pour les différens cas qui regardent ces sortes de Figures.

La Figure ABC (*Fig.* 42.) est un complement de Parabole quarrée dont le sommet est en B, la Figure ABED est un rectangle de même hauteur & de même base. La Figure ABQPF est faite par les troisiémes proportionnelles aux Elemens du complement parabolique & aux Elemens du rectangle. Cette Figure ABQPF, comme nous l'avons montré plus haut est plus qu'infinie par rapport au rectangle ABCD ou ABGF. Concevons maintenant que les côtés AB, DE du rectangle soient prolongés à l'infini du côté de A, que l'on continue à prendre des troisiémes proportionnelles aux Elemens de la Figure ABC prolongée, à ceux du rectangle ABED, ou ABGF aussi prolongé, que le côté BG du rectangle soit divisé en une infinité de parties égales, & que de tous les points de division soient menées des droites GF, *rz*, &c. paralelles à AB. Cela posé.

Nous avons vû (*N.* 87.) que les droites AF, *xz*, &c. sont entr'elles en raison doublée de la raison réciproque des abscisses *x*B, AB, &c. ou *zr*, FG, donc les droites *zr*, FG, &c. sont entr'elles en raison réciproque des racines des droites AF, *xz*, &c. Or les droites AF, *xz*, &c. sont égales aux coupées BG, B*r*, &c. qui sont en proportion arithmetique, c'est-à-dire, comme 0. 1. 2. 3. 4, &c. en commençant du point B, & allant vers G. Donc les droites *xz*, AF, &c. à commencer depuis *xz* que nous supposons infiniment éloignée jusqu'à AF, sont entr'elles comme 0. 1. 2. 3. 4, &c. Ainsi leurs racines sont comme 0. $a^{\frac{1}{2}}$. $b^{\frac{1}{2}}$. $c^{\frac{1}{2}}$, &c. & par conséquent les droites B*x*, *rz*, &c. étant en raison réciproque de ces racines, sont comme 0. $a^{-\frac{1}{2}}$. $b^{-\frac{1}{2}}$. $c^{-\frac{1}{2}}$, &c. Mais l'exposant de cette suite étant $-\frac{1}{2}$, la somme est au dernier terme GF multiplié par le nombre des termes BG comme 1 à $-\frac{1}{2}+1$, ou comme 1 à $\frac{1}{2}$, ou comme 2 à 1, donc l'espace infiniment étendu BG*zx*

eſt au rectangle ABGE comme 2 eſt à 1. Et c'eſt effectivement ce qu'on trouve par le calcul intégral, comme on verra dans l'Ouvrage que je mettrai bientôt au jour ſur cette matiere.

Par un ſemblable raiſonnement, on trouvera que lorſque la Figure ABC eſt un triangle, le rapport de BGzx au rectangle ABGF eſt infini ; que lorſque ABC eſt un complement de Parabole du ſecond genre, le rapport de l'eſpace BGzx au rectangle ABGF, eſt comme 3 eſt à 2 ; que lorſque ABC eſt un complement de Parabole du troiſiéme genre, le rapport de l'eſpace BGzx au rectangle ABGF, eſt comme 4 à 3, &c.

Quand la Figure ABC eſt une Parabole, de quelque genre que ce ſoit, nous avons vû (*N.* 91. 92. 93.) que le rapport de l'eſpace ABQPF au rectangle ABGF étoit fini, & l'on prouvera aiſément que le rapport de l'eſpace BGzx au même rectangle eſt infini ; car ſi la figure ABC eſt une Parabole du premier genre, les troiſiémes proportionnelles à ſes Elemens & à ceux du rectangle ſeront réciproques aux Elemens de la Parabole ; mais les Elemens de la Parabole ſont comme les racines quarrées des abſciſſes, donc les troiſiémes proportionnelles ſont réciproques aux racines quarrées des abſciſſes, & par conſéquent les abſciſſes ſont réciproques aux quarrés des proportionnelles. Concevant donc que le côté BG du rectangle ſoit coupé en une infinité de parties égales & que de tous les points de diviſion ſoient menées des droites rz paralelles à Bx, les proportionnelles correſpondantes à ces droites ſeront comme les coupées de la droite BG, à commencer du point B, c'eſt-à-dire, comme 0. 1. 2. 3. 4, &c. ou comme 0. a^1. b^1. c^1, &c. & les quarrés de ces proportionnelles ſeront comme 0. a^2. b^2. c^2, &c. donc les droites Bx, rz, &c. étant réciproques à ces quarrés ſeront comme 0. a^{-2}. b^{-2}. c^{-2}, &c.* Mais l'expoſant de cette ſuite étant -2, ſa ſomme eſt au dernier terme GF multiplié par le nombre des termes BG comme 1 à $-2+1$, ou comme 1 à -1, c'eſt-à-dire dans un rapport plus qu'infini, & ainſi des autres.

On voit par-là que le Principe de Wallis s'accorde avec le calcul intégral, & que les Auteurs qui l'ont condamné n'en ont agi de la ſorte que parce qu'ils ne l'ont pas bien entendu.

* La ſuite 0. a^{-2}. b^{-2}. c^{-2}, &c. pouvant être exprimée par $\frac{1}{0}$. $\frac{1}{a^2}$. $\frac{1}{b^2}$. &c le premier terme eſt infini ; car $\frac{1}{0} = \infty$, ce qu'il faut obſerver dans toutes les ſuites réciproques.

CHAPITRE VI.

Des Suites retranchées les unes des autres.

94. CE Chapitre contient grand nombre de cas que nous traiterons chacun en particulier pour ne pas brouiller une matiere aussi étenduë que celle-ci.

PROPOSITION XXXV.

95. *Si l'on retranche de la Suite des égaux, la suite des premieres puissances, ou des secondes, ou des troisiémes, &c. le reste sera au dernier terme de l'une ou de l'autre suite multiplié par le nombre des termes, comme 1 à 2, comme 2 à 3, comme 3 à 4, comme 4 à 5, & ainsi de suite.*

DÉMONSTRATION.

La suite des égaux est comme o. a^o. b^o. c^o. d^o, &c. Ainsi supposant que l'on en retranche la suite des premieres puissances o. a^1. b^1. c^1, &c. nous aurons un reste qui sera o — o. $a^o - a^1$. $b^o - b^1$, &c. jusqu'au dernier terme qui sera R — R. Or ce reste est composé de deux suites dont l'une qui est positive est la suite des égaux, dont le rapport au dernier terme multiplié par le nombre des termes est comme 1 à 1 ; ainsi appellant le nombre des termes A, la valeur de cette suite sera AR. La seconde suite qui est négative contient les premieres puissances dont le rapport au dernier terme multiplié par le nombre des termes, est comme 1 à 2, ainsi la valeur de cette suite sera $\frac{1}{2}$AR ; donc la premiere suite moins la seconde vaudra AR — $\frac{1}{2}$AR = $\frac{1}{2}$AR, & par conséquent elle sera au dernier terme multiplié par le nombre des termes comme 1 à 2.

o — o.
$a^o - a^1$.
$b^o - b^1$.
$c^o - c^1$.
&c. — &c.
R — R.

AR — $\frac{1}{2}$AR = $\frac{1}{2}$AR.

De même si de la suite des égaux que jexprimerai par la suite R^2. R^2. R^2, &c. on ôte la suite des quarrés o. a^2. b^2. c^2. d^2,

&c. R^2, on aura un reste $R^2 - o$. $R^2 - a^2$. $R^2 - b^2$, &c. qui sera composé de deux suites, dont la premiere est celle des égaux R^2. R^2. R^2, &c. & le rapport de celle-ci étant comme 1 à 1, sa valeur sera AR^2; la seconde suite qui est négative, contient les secondes puissances o. a^2. b^2. c^2, &c. dont le rapport au dernier terme multiplié par le nombre des termes est comme 1 à 3; ainsi sa valeur sera $\frac{1}{3} AR^2$, & par conséquent la valeur du reste sera $AR^2 - \frac{1}{3} AR^2 = \frac{2}{3} AR^2$, c'est-à-dire que ce reste sera au dernier terme multiplié par le nombre des termes comme 2 à 3.

$$\begin{array}{ll} R^2 - o. & \\ R^2 - a^2. & \\ R^2 - b^2. & \\ R^2 - c^2. & \\ \&c. & \&c. \\ R^2 & R^2 \\ \hline AR^2 - \frac{1}{3} AR^2 = \frac{2}{3} AR^2. & \end{array}$$

De même encore si de la suite des égaux que j'exprimerai par R^3. R^3. R^3, &c. on ôte la suite des cubes o. a^3. b^3. c^3, &c. le reste sera composé de la suite positive des égaux dont la valeur est AR^3, & de la suite négative des cubes dont la valeur est $\frac{1}{4} AR^3$, parce que cettte suite est à son dernier terme multiplié par le nombre des termes comme 1 à 4. Ainsi la valeur du reste sera $AR^3 - \frac{1}{4} AR^3 = \frac{3}{4} AR^3$, & le rapport de ce reste au dernier terme multiplié par le nombre des termes est comme 3 à 4, & ainsi des autres.

$$\begin{array}{l} R^3 - o. \\ R^3 - a^3. \\ R^3 - b^3. \\ R^3 - c^3. \\ \&c. - \&c. \\ R^3 - R^3. \\ \hline AR^3 - \frac{1}{4} AR^3 = \frac{3}{4} AR^3. \end{array}$$

REMARQUE.

96. Je suppose que les deux derniers termes des suites soient égaux entr'eux, & c'est pourquoi lorsque l'un est R^2 ou R^3, &c. j'appelle aussi l'autre R^2 ou R^3, &c. Mais si cela n'étoit pas, voici comme on feroit. Supposons qu'on retranche de la suite des égaux celle des cubes, j'appelle les égaux R, R, R, &c. R, & les troisiémes puissances o. a^3. b^3. c^3, &c. r, mettant r pour le dernier terme, parce qu'il est supposé plus grand ou moindre que le dernier des égaux, & le rapport du reste est alors $AR - \frac{1}{4} Ar$, qui signifie que ce reste est égal au der-

$$\begin{array}{l} R - o. \\ R - a^3. \\ R - b^3. \\ R - c^3. \\ \&c. \\ R - r. \\ \hline AR - \frac{1}{4} Ar. \end{array}$$

nier terme des égaux multiplié par le nombre des termes, moins un quart du dernier terme des troisiémes puissances multiplié par la même hauteur.

APPLICATION A LA GEOMETRIE.

PROPOSITION XXXVI.

97. *Si l'on retranche d'un rectangle* ABCD *un triangle* BCD *de même base & de même hauteur, le reste sera un triangle qui sera à la base* AD *multipliée par la hauteur comme* 1 *à* 2. (Fig. 43.)

DEMONSTRATION.

Les Elemens du rectangle sont comme la suite R. R. R, &c. R des égaux dont la valeur est AR, & ceux du triangle BCD comme les premieres puissances o. *a. b. c. d*, &c. R dont la valeur est $\frac{1}{2}$ AR ; donc la valeur du reste est AR—$\frac{1}{2}$AR $=\frac{1}{2}$ AR.

COROLLAIRE.

Si l'on retranche d'un Cylindre ADEC (*Fig.* 46.) un Paraboloïde du premier genre ABC de même base & de même hauteur, le reste sera au Cylindre comme 1 à 2. Car les plans Elementaires du Cylindre sont comme les égaux R^2. R^2. R^2, &c. R^2, dont la valeur est AR^2, & les plans Elementaires du Paraboloïde sont comme o. *a. b. c. d*, &c. R^2. dont la valeur est $\frac{1}{2}AR^2$; donc le reste est $AR^2 - \frac{1}{2}AR^2 = \frac{1}{2}AR^2$.

Nota. Que quoique la calotte restante soit au Cylindre comme 1 à 2 qui est le rapport des premieres puissances, il ne faut pourtant pas en conclure que les Elemens de cette calotte, c'est-à-dire les couronnes dont elle est composée soient entr'elles comme les premieres puissances ; car il est bien vrai que toutes les fois que les termes d'une suite sont comme les premieres puissances, le rapport de cette suite à son dernier terme multiplié par le nombre des termes est comme 1 à 2 ; mais il n'est pas vrai que toutes les fois qu'une suite est au dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme 1 à 2, les termes de cette suite doivent être nécessairement comme les premieres puissances, ainsi que je l'ai démontré sur la fin de la seconde Partie de *la Science des Geometres*. De même, il est toujours sûr que si les termes d'une suite sont comme les quarrés des nombres

o. 1. 2. 3, &c. le rapport de cette suite au dernier terme multiplié par le nombre des termes est comme 1 à 3 ; mais il n'est pas sûr de même que par-là seulement que le rapport d'une suite est comme 1 à 3, les termes de cette suite soient comme les quarrés des nombres o. 1. 2. 3. 4, &c. & ainsi des autres. A quoi il faut bien faire attention si l'on veut s'empêcher de tomber dans l'erreur, & c'est pourquoi je me sers ici du terme de *Reste* plutôt que du terme de *Suite* pour ôter l'équivoque.

PROPOSITION XXXVII.

99. *Si l'on retranche d'un Prisme* ABCDGFEI *une Pyramide rectiligne* ABCDH *de même base & de même hauteur* (Fig. 47.) *le reste sera au Prisme comme 2 à 3.*

DEMONSTRATION.

Les Elemens du Prisme sont comme les égaux $R^2. R^2. R^2$, &c. R^2 dont la valeur est AR^2, & ceux de la Pyramide comme les quarrés o. $a^2. b^2. c^2. d^2$, &c. R^2 dont la valeur est $\frac{1}{3} AR^2$. Donc le reste est comme $AR^2 - \frac{1}{3} AR^2 = \frac{2}{3} AR^2$. Donc, &c.

COROLLAIRE.

100. Si on retranche d'un Cylindre un cône de même base & de même hauteur (*Fig.* 48.) le reste sera de même les deux tiers du Cylindre. Où l'on peut observer en passant que ce reste est le même solide qui seroit produit par la circonvolution du triangle ECD autour de la droite EO paralelle au côté CD.

PROPOSITION XXXVIII.

101. *Si l'on retranche d'un rectangle* ABCD (Fig. 49.) *un complement* ABC *de Parabole quarrée dont* C *est le sommet, le reste* ACD *est les deux tiers du rectangle.*

DEMONSTRATION.

Les Elemens du Paralellogramme sont comme la suite des égaux $R^2. R^2. R^2$, &c. R^2. dont la valeur est AR^2, & ceux du complement sont comme o. $a^2. b^2. c^2. d^2$, &c. R^2. dont la valeur est $\frac{1}{3} AR^2$. Donc le reste est comme $AR^2 - \frac{1}{3} AR^2 = \frac{2}{3} AR^2$.

REMARQUE.

REMARQUE.

102. Voici un exemple qui confirme la remarque que j'ai déja faite ci-dessus. Car les restes où les Elemens de la demi-Parabole ACD pris paralelles à l'axe se trouvent ici être au plus grand multiplié par le nombre des termes comme 2 à 3, c'est-à-dire dans le même rapport que les Elemens ordonnés à l'axe. Cependant l'on ne peut pas dire que de même que ces derniers sont entr'eux comme les racines quarrées des nombres 0. 1. 2. 3. 4, &c. ceux-là soient dans la même raison; car si cela étoit, la suite de leurs quarrés seroit au plus grand multiplié par le nombre des termes, comme 1 à 2, au lieu que nous verrons plus bas qu'elle est comme 8 à 15.

COROLLAIRE.

103. Si le complement retranché du rectangle appartenoit à une Parabole du second genre, du troisiéme, &c. le reste seroit au rectangle comme 3 à 4, comme 4 à 5, comme 5 à 6, &c. ce qu'on trouvera de la même façon.

PROPOSITION XXXIX.

104. *Si l'on retranche d'un Cylindre* ABCD (Fig. 50.) *un solide de même hauteur & de même base fait par la circonvolution d'un complement* ADE *de demi-Parabole quarrée qui tourne autour de la tangente* DE *à son sommet* E, *le reste sera au Cylindre comme 4 à 5.*

DEMONSTRATION.

Les Elemens du complement sont entr'eux comme 0. a^2. b^2. c^2. d^2, &c. & ce complement en tournant décrit des cercles qui sont entr'eux comme les quarrés de leurs rayons ou des Elemens, & par conséquent comme la suite 0. a^4. b^4. c^4. d^4, &c. R^4. dont la valeur est $\frac{1}{5}AR^4$. retranchant donc cette valeur de celle des Elemens du Cylindre R^4. R^4. R^4, &c. qui est comme AR^4. le reste est comme $AR^4. - \frac{1}{5}AR^4. = \frac{4}{5}AR^4$.

Remarquez en passant que ce reste est le même solide qui seroit formé par la circonvolution de la demi-Parabole ABE autour de sa tangente BE au sommet.

COROLLAIRE.

105. Si le complement appartenoit à une Parabole du second genre, du troisiéme, du quatriéme, &c. on trouveroit de la même façon que le reste seroit au Cylindre comme 6 à 7, comme 8 à 9, comme 10 à 11, &c. & que ces restes seroient égaux aux solides faits par la circonvolution des demi-Paraboles du second genre, du troisiéme, &c. autour de la tangente au sommet.

CONTINUATION DU CHAPITRE VI.

PROPOSITION XL.

106. *SI après avoir retranché de la suite des égaux celle des premieres puissances, on éleve le reste au quarré, au cube, à la quatriéme puissance, &c. ces quarrés, ces cubes, ces quatriémes puissances, &c. seront au dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme 1 à 3, comme 1 à 4, comme 1 à 5, &c.*

DEMONSTRATION.

La suite des premieres puissances étant retranchée de celle des égaux, le reste est R — o. R — a. R — b. R — c, &c. R — R, & élevant chaque terme au quarré on aura une suite composée de trois autres, dont la premiere étant celle des égaux, a pour valeur AR²; la seconde est double des premieres puissances, & a pour valeur — $\frac{2}{2}$ AR². parce qu'elle est négative; & la troisiéme est la suite des quarrés qui a pour valeur $\frac{1}{3}$ AR², donc la

$$\begin{array}{lll} R^2. - & oR + & oo. \\ R^2. - & 2aR + & aa. \\ R^2. - & 2bR + & bb. \\ R^2. - & 2dR + & dd. \\ \&c. & \&c. & \&c. \\ R^2. - & 2R^2. + & RR. \\ \hline \end{array}$$

$$AR^2. - \tfrac{2}{2} AR^2. + \tfrac{1}{3} AR^2. = \tfrac{1}{3} AR^2.$$

suite des quarrés du reste a pour valeur AR². — $\frac{2}{2}$ AR². + $\frac{1}{3}$ AR². = $\frac{1}{3}$ AR².

De même élevant chaque terme au cube, on a une ſuite composée de quatre autres, dont la premiere étant celle de égaux, vaut AR^3; la ſeconde qui eſt triple de celle des premieres puiſſances, vaut $-\frac{3}{2}AR^3$. parce qu'elle eſt négative; la troiſiéme qui eſt triple de celle des quarrés, vaut $\frac{3}{3}AR^3$, & la derniere qui eſt celle des cubes, vaut $-\frac{1}{4}AR^3$ parce qu'elle eſt négative; ainſi la ſuite des cubes du reſte vaut $AR^3. - \frac{3}{2}AR^3. + \frac{3}{3}AR^3. - \frac{1}{4}AR^3. = \frac{1}{4}AR^3$, & ainſi des autres puiſſances.

$$\begin{array}{llll}
R^3. - & oRR + & ooR - & oco. \\
R^3. - 3aRR & + 3aaR - & & a^3. \\
R^3. - 3bRR & + 3bbR - & & b^3. \\
\&c. & \&c. & \&c. & \&c. \\
R^3. - & 3R^3. + & 3R^3. - & R^3. \\
\hline
\end{array}$$

$$AR^3. - \frac{3}{2}AR^3. + \frac{3}{3}AR^3. - \frac{1}{4}AR^3. = \frac{1}{4}AR^3.$$

COROLLAIRE I.

107. Si après avoir retranché de la ſuite des égaux la ſuite des quarrés des nombres 0. 1. 2. 3. 4, &c. on éleve les termes du reſte au quarré, au cube, à la quatriéme puiſſance, &c. ces quarrés, ces cubes, ces quatriémes puiſſances, &c. ſeront au dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme 8 à 15, comme 48 à 105, &c. c'eſt-à-dire, dans des rapports qu'on pourra connoître aiſément & continuer à l'infini comme on va voir.

La ſuite des égaux moins la ſuite des quarrés donne le reſte $R^2. - o. R^2. - a^2. R^2. - b^2. R^2. - c^2$, &c. $R^2. - R^2$. Elevant donc chaque terme au quarré, on aura une ſuite composée de trois autres, dont la premiere étant la ſuite des égaux, vaut AR^4; la ſeconde étant le double de celle des quarrés, vaut $-\frac{2}{3}AR^4$. à cauſe qu'elle eſt négative, & la troiſiéme étant celle des quatriémes puiſſances, vaut

$$\begin{array}{lll}
R^4. - & 2oR^2. + & co. \\
R^4. - & 2a^2R^2 + & a^4. \\
R^4. - & 2b^2R^2. + & b^4. \\
R^4. - & 2c^2R^2. + & c^4. \\
\&c. & \&c. & \&c. \\
R^4. - & 2R^2R^2. + & R^4. \\
\hline
\end{array}$$

$$AR^4. - \frac{2}{3}AR^4. + \frac{1}{5}AR^4. = \frac{8}{15}AR^4.$$

$$\frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$$

$\frac{1}{5}$ AR^4. Ainsi les quarrés du reste R^2. — o. R^2. — a^2. R^2. — b^2, &c. valent AR^4. — $\frac{2}{3}$ AR^4. + $\frac{1}{5}$ AR^4. = $\frac{8}{15}$ AR^4, & par conséquent ces quarrés sont au dernier multiplié par le nombre des termes, comme 8 à 15.

Or par la proposition 35, le reste R^2. — o. R^2. — a^2. R^2. — b^2, &c. est au dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme 2 à 3 ; comparant donc ce rapport $\frac{2}{3}$ avec le rapport $\frac{8}{15}$ des quarrés du même reste, on trouvera que ce dernier est composé des deux $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5}$, dont les numerateurs & les dénominateurs augmentent de deux unités, c'est-à-dire, d'autant d'unités qu'il y en a dans l'exposant 2 des quarrés.

De même si on éleve tous les termes du reste R^2 — o. R^2 — a^2. R^2 — b^2, &c. au cube, on aura une suite composée de quatre autres, dont la premiere étant celle des égaux, vaut AR^6 ; la seconde qui est triple des quarrés, vaut — $\frac{3}{3}$ AR^6, parce qu'elle est négative ; la troisiéme qui est triple des quatriémes puissances,

$$
\begin{array}{l}
R^6 — \quad oR^4 + \quad oR^2 — oo \\
R^6 — 3a^2R^4 + 3a^4R^2 — a^6. \\
R^6 — 3b^2R^4 + 3b^4R^2 — b^6. \\
R^6 — 3c^2R^4 + 3c^4R^2 — c^6. \\
\text{\&c.} \\
R^6 — 3R^2R^4 + 3R^4R^2 — R^6 \\
\hline
AR^6 — \frac{3}{3}AR^6 + \frac{3}{5}AR^6 — \frac{1}{7}AR^6 = \frac{48}{105}AR^6. \\
\frac{2 \times 4 \times 6}{3 \times 5 \times 7} = \frac{48}{105}.
\end{array}
$$

vaut $\frac{3}{5}$ AR^6, & la quatriéme qui est celle des sixiémes puissances, vaut — $\frac{1}{7}$ AR^6. Donc les cubes du reste R^2 — o. R^2 — a^2. R^2 — b^2, &c. valent AR^6 — $\frac{3}{3}$ AR^6 + $\frac{3}{5}$ AR^6 — $\frac{1}{7}$ AR^6 = $\frac{48}{105}$ AR^6. Donc ces cubes sont au dernier terme, multiplié par le nombre des termes, comme 48 à 105.

Comparant donc ce rapport des cubes avec les rapports du reste & des quarrés, on trouvera qu'il est composé de trois $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$; dont les numerateurs & les dénominateurs augmentent toûjours de deux.

Donc si on veut trouver le rapport des quatriémes puissances, des cinquiémes &c. du reste R^2 — o. R^2 — a^2. R^2 — b^2, &c. on n'a qu'à continuer ces rapports, & l'on trouvera que celui des quatriémes puissances est $\frac{2 \times 4 \times 6 \times 8}{3 \times 5 \times 7 \times 9} = \frac{384}{945}$, celui des cinquiémes puissances est $\frac{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10}{3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11}$, & ainsi des autres.

COROLLAIRE II.

108. Si après avoir retranché de la suite des égaux, celle des cubes des nombres o. 1. 2. 3, &c. on éleve tous les termes du reste au quarré, au cube, à la quatriéme puissance, &c. ces quarrés, ces cubes, ces quatriémes puissances, seront à leur dernier terme dans un rapport connu, & qu'il sera facile de continuer pour les puissances plus élevées, ainsi qu'on va voir.

La suite des égaux moins la suite des troisiémes puissances donne le reste $R^3 - o. R^3 - a^3. R^3 - b^3. R^3 - c^3$, &c. $R^3 - R^3$. Or élevant tous les termes de ce reste au quarré, on a une suite composée de trois autres, dont la premiere qui est celle des égaux, vaut AR^6; la seconde qui est double de celle des cubes, vaut $-\frac{2}{4}AR^6$, parce qu'elle est négative, & la troisiéme, qui est celle des sixiémes puissances, vaut $\frac{1}{7}AR^6$, donc la suite de ces quarrés vaut $AR^6 - \frac{2}{4}AR^6 + \frac{1}{7}AR^6 = \frac{18}{28}AR^6$, & par conséquent les quarrés du reste $R^3 - o. R^3 - a^3. R^3 - b^3$, &c. sont au dernier multiplié par le nombre des termes comme 18 à 28, ou comme 9 à 14.

$$R^6 - oR^3 + o.$$
$$R^6 - 2a^3R^3 + a^6.$$
$$R^6 - 2b^3R^3 + b^6.$$
$$R^6 - 2c^3R^3 + c^6.$$
&c.
$$R^6 - 2R^3R^3 + R^6.$$

$$AR^6 - \frac{2}{4}AR^6 + \frac{1}{7}AR^6 = \frac{18}{28}AR^6.$$

$$\frac{3 \times 6}{4 \times 7} = \frac{18}{28} = \frac{9}{14}$$

Or par la proposition 35, le reste $R^3 - o. R^3 - a^3. R^3 - b^3$, &c. est à son dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme 3 est à 4; c'est-à-dire, comme l'exposant trois des cubes est à 4, comparant donc ce rapport $\frac{3}{4}$ avec le rapport $\frac{18}{28}$ des quarrés, on trouvera que celui-ci est composé des deux $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{7}$, dont les numerateurs & les dénominateurs augmentent de trois unités, c'est-à-dire, d'autant d'unités que l'exposant 3 des cubes en contient.

Elevant de même les termes du reste $R^3 - o. R^3 - a^3. R^3 - b^3$, &c. au cube, on aura une suite composée de trois autres,

dont la premiere qui est celle des égaux, vaut AR^9; la seconde qui est triple des cubes, vaut $-\frac{3}{4}AR^9$, parce qu'elle est négative; la troisiéme qui est triple des sixiémes

$$\begin{array}{l} R^9 - oR^6 + oR^3 - oo. \\ R^9 - 3a^3R^6 + 3a^6R^3 - a^9. \\ R^9 - 3b^3R^6 + 3b^6R^3 - b^9. \\ R^9 - 3c^3R^6 + 3c^6R^3 - c^9. \\ \text{\&c.} \\ R^9 - 3R^3R^6 + 3R^6R^3 - R^9. \\ \hline AR^9 - \frac{3}{4}AR^9 + \frac{3}{7}AR^9 - \frac{1}{10}AR^9 = \frac{162}{280}AR^9. \end{array}$$

puissances, vaut $\frac{3}{7}AR^9$, & la quatriéme qui est celle des neuviémes puissances, vaut $-\frac{1}{10}AR^9$ parce qu'elle est négative. Donc les cubes du reste $R^3 - o$. $R^3 - a^3$, &c. valent $AR^9 - \frac{3}{4}AR^9 + \frac{3}{7}AR^9 - \frac{1}{10}AR^9 = \frac{162}{280}AR^9$, & par conséquent ces cubes sont au dernier multiplié par le nombre des termes, comme 162 à 280. Et comparant le rapport précedent $\frac{18}{28}$ au rapport $\frac{162}{280}$, on trouvera que ce dernier est composé des trois $\frac{3 \times 6 \times 9}{4 \times 7 \times 10} = \frac{162}{280}$ dont les numerateurs & les dénominateurs vont toujours en augmentant de trois.

Donc pour trouver le rapport des quatriémes puissances, des cinquiémes, &c. on n'a qu'à continuer ces rapports. Ainsi celui des quatriémes puissances sera $\frac{3 \times 6 \times 9 \times 12}{4 \times 7 \times 10 \times 13}$, celui des cinquiémes $\frac{3 \times 6 \times 9 \times 12 \times 15}{4 \times 7 \times 10 \times 13 \times 16}$. & ainsi des autres.

COROLLAIRE III.

109. Si après avoir retranché de la suite des égaux celle des quatriémes puissances des nombres 0. 1. 2. 3, &c. on éleve au quarré, au cube, à la quatriéme puissance, &c. les termes du reste $R^4 - o$. $R^4 - a^4$. $R^4 - b^4$, &c. on trouvera facilement les rapports de ces quarrés, de ces cubes, de ces quatriémes puissances, &c. en observant ce qui vient d'être dit. Car le rapport du reste $R^4 - o$. $R^4 - a^4$. $R^4 - b^4$, &c. étant $\frac{4}{5}$ par la proposition 35, celui des quarrés sera $\frac{4 \times 8}{5 \times 9}$, celui des cubes $\frac{4 \times 8 \times 12}{5 \times 9 \times 13}$; celui des quatriémes puissances $\frac{4 \times 8 \times 12 \times 16}{5 \times 9 \times 13 \times 17}$. & ainsi des autres, augmentant toujours les numerateurs & les dénominateurs de 4;

c'est-à-dire, d'autant d'unités que l'exposant 4 des quatriémes puissances en contient.

De même si après avoir retranché de la suite des égaux celle des cinquiémes puissances des nombres 0. 1. 2. 3, &c. on éleve au quarré, au cube, à la quatriéme puissance, &c. les termes du reste $R^5. - 0. R^5. - a^5. R^5. - b^5$, &c. on trouvera de la même façon les rapports de ces quarrés, de ces cubes, &c. car le rapport du reste étant $\frac{5}{6}$ par la proposition 35, celui des quarrés sera $\frac{5 \times 10}{6 \cdot 11}$, celui des cubes $\frac{5 \times 10 \times 15}{6 \times 11 \times 16}$, celui des quatriémes puissances $\frac{5 \times 10 \times 15 \times 20}{6 \times 11 \times 16 \times 21}$, & ainsi des autres, augmentant toujours de 5 unités, &c.

APPLICATION A LA GEOMETRIE.

PROPOSITION XLI.

110. *Le solide produit par la circonvolution d'une demi-Parabole quarrée* ABC, (Fig. 51.) *autour de sa base ou de son ordonnée* BC *à l'axe* AC, *est à sa base* AD *multipliée par sa hauteur* BC, *c'est-à-dire, au cylindre circonscrit* AEFD *comme* 8 *à* 15.

DEMONSTRATION.

Les Elemens de la demi-Parabole paralelles à l'axe AC, sont égaux aux Elemens du rectangle circonscrit AEBC moins les Elemens du complement AEB; & par conséquent ils sont comme le reste $R^2 - 0. R^2 - a^2. R^2 - c^2$, &c. Or les Elemens de la demi-Parabole tournant autour de BC, produisent des cercles qui sont entr'eux comme les quarrés de ces Elemens, donc ces cercles sont comme les quarrés du reste $R^2 - 0. R^2 - a^2. R^2 - b^2$, &c. Mais par la proposition précedente ces quarrés sont au dernier multiplié par le nombre des termes, comme 8 à 15. Donc la somme des cercles ou le solide est à sa base multiplié par sa hauteur comme 8 à 15.

COROLLAIRE I.

111. Si la demi-Parabole étoit du second genre, les Elemens paralelles à l'axe seroient comme $R^3 - 0. R^3 - a^3. R^3 - b^3$, &c. dont le rapport est $\frac{3}{4}$. Donc le rapport de leurs cercles seroit $\frac{3 \times 6}{4 \times 7}$ ou comme $\frac{18}{28}$, c'est-à-dire, le solide seroit au cylindre circonf-

crit comme 18 à 28. ou comme 9 à 14.

COROLLAIRE II.

112. De même si la demi-Parabole étoit du troisiéme genre, ses Elemens paralelles à l'axe seroient comme $R^4 - o. R^4 - a^4. R^4 - b^4$, &c. dont le rapport est $\frac{4}{5}$. Donc le rapport de leur cercle seroit $\frac{4 \times 8}{5 \quad 9} = \frac{32}{45}$, c'est-à-dire, le solide seroit au Cylyndre circonscrit comme 32 à 45.

En suivant la même route, on trouveroit que si la demi-Parabole étoit du quatriéme genre, du cinquiéme, &c. le rapport du solide au Cylindre circonscrit seroit $\frac{5 \times 10}{6 \times 11} = \frac{50}{66}$, $\frac{6 \times 12}{7 \times 13} = \frac{72}{91}$, $\frac{7 \times 14}{8 \quad 15} = \frac{98}{120}$ & ainsi des autres.

PROPOSITION XLII.

113. *Un segment AB de Parabole quarrée formé par une droite AB, tirée du sommet B à l'extremité A de la base étant donné, le solide fait par les quarrés des Elemens paralelles à l'axe, est au quarré de l'axe multiplié par la base, comme 1 à 30.* (Fig. 52.)

DEMONSTRATION.

Tirez les Elemens du rectangle paralelles à l'axe, & retranchez-en les Elemens du complement ABD, le reste sera comme $R^2. - o. R^2. - a^2. R^2. - b^2$, &c. Or de ce reste il faut retrancher encore les Elemens du triangle ABC pour avoir les Elemens du segment; & pour retrancher chaque Element du triangle de chaque terme du reste, il faut nécessairement commencer par les Elemens qui sont du côté de l'axe BC, parce que les termes du reste $R^2. - o. R^2. - a^2. R^2. - b^2$, &c. commencent de ce côté là. Or les Elemens du triangle ABC, pris de ce côté, sont égaux aux Elemens du rectangle ADBC, moins les Elemens du triangle ADB; donc ils sont comme la suite $R^2. - o. R^2. - a. R^2. - b. R^2. - c$, &c. ôtant donc les termes de ce reste des termes du reste précédent, nous aurons un nouveau reste $R^2. - o. - R^2. + o$, $R^2. - a^2. - R^2. + a$, $R^2. - b^2. - R^2. + b$, &c. ou $- o. + o$, $- a^2. + a$, $- b^2. + b$, $- c^2. + c$, &c. $- R^2. + R^2$, qui est le rapport dans lequel sont entr'eux les Elemens du segment parabolique. Faisant donc les quarrés des termes de ce reste, nous aurons une nouvelle suite composée de trois

trois autres, dont la premiere étant celle des quatriémes puissances, vaut $\frac{1}{5}AR^4$; la seconde qui est double de celle des cubes, vaut — $\frac{2}{4}AR^4$. parce qu'elle est négative, & la troisiéme étant celle des quarrés, vaut $\frac{1}{3}AR^4$. Donc la suite des quarrés du reste $— o. + o, — a^2. + a. — b^2. + b$, &c.

o.	o.	o.
$a^4. —$	$2a^3. +$	$aa.$
$b^4. —$	$2b^3. +$	$bb.$
$c^4. —$	$2c^3. +$	$cc.$
&c.		
$R^4. —$	$2R^2R^2. +$	$R^4.$

$$\frac{1}{5}AR^4. — \frac{2}{4}AR^4. + \frac{1}{3}AR^4. = \frac{1}{30}AR^4.$$

vaut $\frac{1}{5}aR^4. — \frac{2}{4}AR^4. + \frac{1}{3}AR^4. = \frac{1}{30}AR^4$, & par conséquent le solide fait par les quarrés du segment parabolique, est au quarré de l'axe BC exprimé ici par R^4, multiplié par la hauteur AC, comme 1 à 30. Ce solide est représenté par la Figure 53, & nous l'appellerons, *Navette Parabolique.*

COROLLAIRE.

114. Si la parabole étoit du second genre, la Navette Parabolique seroit au produit du quarré de l'axe par la base, comme 8 à 105. Car les Elemens du segment seroient comme $R^3. — o. — R^3. + o$, $R^3. — a^3. — R^3. + a$, $R^3. — b^3. — R^3. + b$, $R^3. — c^3. — R^3. + c$, &c. ou comme $— o. + o. — a^3. + a, — b^3. + b, — c^3. + c$, &c. & élevant chaque terme au quarré, on auroit une nouvelle suite composée de trois autres, dont la valeur, comme on voit ici, seroit $\frac{1}{7}AR^6. — \frac{2}{5}AR^6. + \frac{1}{3}AR^6. = \frac{8}{105}AR^6$.

o.	o.	o.
$a^6. —$	$2a^4. +$	$aa.$
$b^6. —$	$2b^4. +$	$bb.$
$c^6. —$	$2c^4. +$	$cc.$
&c.		
$R^6. —$	$2R^3R^3. +$	$R^6.$

$$\frac{1}{7}AR^6. — \frac{2}{5}AR^6. + \frac{1}{3}AR^6. = \frac{8}{105}AR^6.$$

Et par un semblable calcul on trouvera que si la parabole est du troisiéme genre, du quatriéme, &c. le rapport de la Navette Parabolique au quarré de l'axe multiplié par la hauteur, sera exprimé par $\frac{1}{9}AR^8. — \frac{2}{6}AR^8. + \frac{1}{3}AR^8$, par $\frac{1}{11}AR^{10}. — \frac{2}{7}AR^{10}. + \frac{1}{3}AR^{10}$. & ainsi de suite à l'infini. Où l'on peut observer qu'en commençant par la parabole quarrée les pre-

miers termes de ces rapports ont pour coefficients $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{7}$. $\frac{1}{9}$. $\frac{1}{11}$, &c. augmentant toujours le dénominateur de 2, que les seconds termes ont pour coefficients $-\frac{2}{4}$, $-\frac{2}{5}$, $-\frac{2}{6}$, &c. augmentant toujours le dénominateur de 1. Et enfin les troisiémes termes ont toujours pour coefficient $+\frac{1}{3}$.

PROPOSITION XLIII.

115. *Une demi Parabole quarrée* ABC *étant donnée*, (Fig. 54.) *si de l'extremité* A *de sa base on décrit une demi Parabole* ABD *égale à la premiere. Il se formera entre les deux lignes paraboliques un espace* AEBO; *& je dis que le solide fait par les quarrés des Elemens de cet espace paralelles à l'axe* BC *est au quarré de cet axe multiplié par la base* AC, *comme 2. est à 15.*

DEMONSTRATION.

Retranchez du rectangle ADBC les Elemens du complement ADB, & le reste sera comme $R^2.-0$, $R^2.-a^2$, $R^2.-b^2$, $R^2.-c^2$, &c. maintenant il faut encore retrancher de ce reste les Elemens du complement ACB pour avoir les Elemens de l'espace AEBO. Et il faut commencer par les Elemens qui sont du côté de l'axe BC, parce que le reste R^2-0, $R^2.-a^2$, $R^2.-b^2$, &c. commence de ce côté là. Or les Elemens de ce complement sont entr'eux comme les quarrés des abscisses de la base AC, ou comme les quarrés des Elemens du triangle ABC qui sont en proposition arithmetique, de même que les abscisses de AC, ou comme les quarrés de la suite 0. *a*. *b*. *c*, &c. R. Donc en commençant du côté de BC, ces Elemens sont comme les quarrés de la suite R. R—*a*. R—*b*. R—*c*. R—*d*, &c. & par conséquent comme R^2, $R^2.-2a^2R+a^2$, $R^2.-2b^2R+b^2$, &c. Retranchant donc chaque terme de cette suite de chaque terme du reste $R^2.-0$. $R^2.-aa$, $R^2.-bb$, $R^2.-cc$, &c.

$1.-\quad 0.+\quad 0.$

$4a^4.-\ 8a^3R.+4aaRR.$

$4b^4.-\ 8b^3R.+4bbRR.$

$4c^4.-\ 8c^3R.+4ccRR.$

$4d^4.-\ 8d^3R+4ddRR.$

&c.

$4R^4.-8R^3R.+\quad 4R^4.$

$$\frac{4}{5}AR^4.-\frac{8}{4}AR^4.+\frac{4}{3}AR^4.=\frac{2}{15}AR^4.$$

nous aurons $R^2. - o. - R^2$, $R^2. - a^2. - R^2. + 2aR - a^2$, $R^2. - bb - R^2. + 2bR - bb$, $R^2. - cc - R^2. + 2cR - cc$, &c. ou bien $- o$, $- 2a^2 + 2aR$, $- 2b^2 + 2bR$, $- 2c^2 + 2cR$, &c. Et cette ſuite exprime le rapport qu'ont entr'eux les Elemens de l'eſpace AEBO ; élevant donc chaque terme au quarré, nous aurons une ſuite compoſée de trois autres dont les rapports ſont comme on voit ici $\frac{4}{5} AR^4. - \frac{8}{4} AR^4. + \frac{4}{3} AR^4. = \frac{2}{15} AR^4$. Donc le ſolide fait par les quarrés des Elemens de l'eſpace AEBO, eſt au quarré de l'axe BC multiplié par la baſe AC, comme 2 à 15 ; c'eſt-à-dire que ce ſolide eſt quadruple de la Navette parabolique de la propoſition précédente.

COROLLAIRE I.

116. Il ſuit delà que ſi l'on tire la droite AB d'un ſommet à l'autre des deux Paraboles, elle coupera l'eſpace AEBO chacun en deux parties égales. Car puiſque les quarrés de ſes Elemens ſont quadruples des quarrés des Elemens du ſegment AEB, il s'enſuit que les Elemens de AEBO ſont doubles des Elemens du ſegment.

COROLLAIRE II.

117. Si les demi-Paraboles ſont du ſecond genre, les Elemens du complement ACB ſont entr'eux en commençant du côté de CB comme les cubes de la ſuite R. $R - a$. $R - b$. $R - c$, &c. ainſi ils ſont comme la ſuite R^3. $R^3. - 3aR^2 + 3aaR - a^3$. $R^3. - 3bR^2. + 3b^2R - b^3$. $R^3. - 3cR^2. + 3ccR - c^3$, &c. Et retranchant chaque terme de cette ſuite de chaque terme du reſte R^3. $R^3. - a^3$. $R^3. - b^3$. $R^3. - c^3$, &c. qui marquent les Elemens du rectangle circonſcrit moins ceux du complement ADB, nous aurons la ſuite $R^3. - R^3$. $R^3. - a^3 - R^3. + 3aR^2. - 3aaR + a^3$, &c. ou o, $- 3aaR + 3aR^2. - 3bbR + 3bR^2. - 3ccR + 3cR^2$, &c. Et cette ſuite exprime le rapport qu'ont entr'eux les Elemens de l'eſpace AEBC. Elevant donc chaque terme au quarré, nous aurons une ſuite compoſée de trois autres dont le rapport eſt comme on voit ici $\frac{2}{5} AR^6. - \frac{18}{4} AR^6 + \frac{2}{3} AR^6. = \frac{18}{60} AR^6. = \frac{3}{10} AR^6$. Donc le ſolide, &c. & ainſi des autres.

La Figure 55 represente le solide dont nous venons de parler dans cette proposition.

$$\begin{array}{l}
0 \;-\; 0 \;+\; 0. \\
9a^4R^2. - 18a^3R^3. + 9aaR^4. \\
9b^4R^2. - 18b^3R^3. + 9bbR^4. \\
9c^4R^2. - 18b^3R^3. + 9ccR^4. \\
\&c. \\
9R^6. - 18R^3.R^3. + 9R^6. \\
\hline
\frac{9}{5}AR^6. - \frac{18}{4}AR^6. + \frac{9}{3}AR^6. = \frac{18}{60}AR^6. = \frac{3}{10}AR^6.
\end{array}$$

Cette proposition & la précédente seront démontrées plus bas d'une maniere plus facile.

CONTINUATION DU CHAPITRE VI.

DEFINITION.

118. AYant la suite des unités 1. 1. 1. 1. 1. 1, &c. si l'on prend le premier terme, puis la somme des deux premiers, celle des trois premiers, celle des quatre premiers, &c. on aura une nouvelle suite qui sera celle des nombres naturels 1. 2. 3. 4. 5. 6, &c. que nous appellerons *Nombres du premier Ordre*.

De la même façon si l'on prend le premier nombre naturel, la somme des deux premiers, celle des trois premiers, des quatre premiers, &c. on aura une autre suite 1. 3. 6. 10. 15. 21, &c. que nous appellerons nombres *triangulaires* ou du *second ordre*.

Prenant de même le premier nombre triangulaire, la somme des deux premiers, des trois premiers, des quatre premiers, &c. nous aurons une autre suite 1. 4. 10. 20. 35. 56, &c. que nous nommerons nombres *Pyramidaux*, ou du *troisiéme ordre*.

Et prenant ceux-ci de la même façon, nous aurons la suite 1. 5. 15. 35. 70, &c. que nous nommerons nombres *Pyramydo-Pyramidaux*, ou du *cinquiéme ordre*; & nous pourrions de la même maniere trouver d'autres ordres à l'infini. Ces suites s'appellent en general *Nombres figurés*.

TABLE

DES NOMBRES FIGURÉS.

Unités.	1er. Ord.	2e.	3e.	4e.	5e.	6e.	7e.	8e.	9e.	10e.
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286
1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001
1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003
1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008
1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448
1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758
1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378
1	11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378	184756

PROPOSITION XLIV.

119. *Si on retranche de la suite des égaux celle des racines quarrées des nombres 0. 1. 2. 3, ou celle des racines troisiémes, quatriémes, cinquiémes, &c. on pourra toujours connoître non-seulement le rapport du reste au dernier terme multiplié par le nombre des termes, mais encore celui des quarrés, des troisiémes puissances, &c. ainsi qu'on va voir.*

DEMONSTRATION.

La suite des égaux moins la suite des racines quarrées, donne la suite $R - 0$. $R - a^{\frac{1}{2}}$. $R - b^{\frac{1}{2}}$. $R - c^{\frac{1}{2}}$, &c. $R - R$. Et les termes de cette suite élevés au quarré, au cube, &c. donnent d'autres suites qu'on voit ici, & dont les rapports selon les regles que nous avons données sont $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$, &c.

Reste.	*Quarrés.*
$R - 0.$	$RR - 0R + 00.$
$R - a^{\frac{1}{2}}.$	$RR - 2a^{\frac{1}{2}}R + a.$
$R - b^{\frac{1}{2}}.$	$RR - 2b^{\frac{1}{2}}R + b.$
$R - c^{\frac{1}{2}}.$	$RR - 2c^{\frac{1}{2}}R + c.$
$R - d^{\frac{1}{2}}.$	$RR - 2d^{\frac{1}{2}}R + d.$
&c.	&c.
$R - R.$	$RR - 2RR + RR.$
$AR - \frac{2}{3}AR = \frac{1}{3}AR.$	$AR^{2}. - \frac{4}{3}AR^{2}. + \frac{1}{2}AR^{2}. = \frac{1}{6}AR^{2}.$
$\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{1+2+3} = \frac{1}{6}$

Cubes.

$R^{3}. - 0R + 0R - 0$

$R^{3}. - 3a^{\frac{1}{2}}RR + 3aR - a^{\frac{3}{2}}.$

$R^{3}. - 3b^{\frac{1}{2}}RR + 3bR - b^{\frac{3}{2}}.$

$R^{3}. - 3c^{\frac{1}{2}}RR + 3cR - c^{\frac{3}{2}}.$

$R^{3}. - 3d^{\frac{1}{2}}RR + 3dR - d^{\frac{3}{2}}.$

&c.

$R^{3}. - 3R \times R^{2}. + 3RR \times R - R^{3}.$

$$AR^{3}. - \frac{6}{3}AR^{3}. + \frac{3}{2}AR^{3}. - \frac{2}{5}AR^{3}. = \frac{1}{10}AR^{3}.$$

$$\frac{1}{1+2+3+4} = \frac{1}{10}$$

Ainsi le reste est à son dernier terme multiplié par le nombre des termes comme 1 à 3, les quarrés de ses termes sont au dernier multiplié par le nombre des termes, comme 1 à 6, les cubes comme 1 à 10, &c. où l'on voit que les dénominateurs de ces rapports sont les nombres triangulaires ou du second ordre, qui se forment de l'addition des nombres naturels, & que par conséquent si l'on veut trouver le rapport des cinquiémes puissances des termes du reste, celui des sixiémes, &c. il n'y a qu'à prendre dans la Table précédente les nombres du second ordre qui suivent les trois dénominateurs 3. 6. 10. que nous avons

ici, & mettre les autres successivement au dénominateur d'une fraction dont le numerateur soit toujours 1; par exemple le rapport des quatriémes puissances sera $\frac{1}{15}$, celui des cinquiémes $\frac{1}{21}$, celui des sixiémes $\frac{1}{28}$, &c. & si on n'a point cette Table, on fera soi-même l'addition successive des nombres naturels, & l'on trouvera pour les quatriémes puissances $\frac{1}{1+2+3+4+5} = \frac{1}{15}$, pour les cinquiémes puissances $\frac{1}{1+2+3+4+5+6} = \frac{1}{21}$, & ainsi des autres.

De même, si on ôte de la suite des égaux la suite des racines troisiémes des nombres 0. 1. 2. 3. 4, &c. le rapport du reste à son dernier terme multiplié par le nombre des termes, & le rapport des quarrés de ses termes, des cubes, &c. se trouvent être $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$, &c.

Reste.	*Quarrés.*
$R - 0.$	$RR - 0R + 0.$
$R - a^{\frac{1}{3}}.$	$RR - 2a^{\frac{1}{3}}R + a^{\frac{2}{3}}.$
$R - b^{\frac{1}{3}}.$	$RR - 2b^{\frac{1}{3}}R + b^{\frac{2}{3}}.$
$R - c^{\frac{1}{3}}.$	$RR - 2c^{\frac{1}{3}}R + c^{\frac{2}{3}}.$
&c.	&c.
$R - R.$	$RR - 2RR + RR.$
$AR - \frac{3}{4}AR = \frac{1}{4}AR.$	$AR^{2}. - \frac{6}{4}AR^{2}. + \frac{3}{5}RR = \frac{1}{10}AR^{2}.$
$\frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{1+3+6} = \frac{1}{10}$

Cubes.

$R^{3}. - R0^{2}. + R0 - 0.$

$R^{3}. - 3a^{\frac{1}{3}}R^{2}. + 3a^{\frac{2}{3}}R - a.$

$R^{3}. - 3b^{\frac{1}{3}}R^{2}. + 3b^{\frac{2}{3}}R - b.$

$R^{3}. - 3c^{\frac{1}{3}}R^{3} + 3b^{\frac{2}{3}}R - c.$

&c.

$R^{3}. - 3R \times R^{2}. + 3R^{2}R - R^{3}.$

$AR^{3}. - \frac{9}{4}AR^{3}. + \frac{9}{5}AR^{3}. - \frac{1}{4}AR = \frac{1}{20}AR^{2}.$

$\frac{1}{1+3+6+10} = \frac{1}{20}$

Or les dénominateurs 4. 10. 20. de ces rapports sont les nombres du troisiéme ordre qui se forment de l'addition des triangulaires. Ainsi prenant dans la Table ceux qui suivent les trois premiers 4. 10. 20.

on trouvera que les rapports des quatriémes puissances du reste, des cinquiémes, &c. sont $\frac{1}{35}$, $\frac{1}{56}$, $\frac{1}{84}$, &c.

En suivant la même méthode, on trouvera que si l'on ôte de la suite des égaux celle des racines quatriémes des nombres o. 1. 3. 4, &c. le rapport du reste, celui des quarrés de ses termes, celui des cubes, &c. seront $\frac{1}{1+4}=\frac{1}{5}$, $\frac{1}{1+4+10}=\frac{1}{15}$, $\frac{1}{1+4+10+20}=\frac{1}{35}$, & ainsi de suite, & les dénominateurs de ces rapports seront les nombres du quatriéme ordre formés par l'Addition continuelle de ceux du troisiéme, & ainsi de suite à l'infini, comme on va voir par la Table de la page suivante.

Les termes qu'on y verra nommés *Premieres Racines*, sont les mêmes que les premieres puissances ou les nombres o. 1. 2. 3. 4, &c. ainsi que j'ai dit au commencement.

L'usage de cette Table est tel. Supposons, par exemple que je veuille sçavoir quel est le rapport du reste des égaux dont on a retranché les premieres racines, c'est-à-dire les nombres o. 1. 2. 3, &c. je cherche dans le premier rang perpendiculaire à gauche l'endroit où est marqué *Des premieres Racines*, & dans le premier rang d'enhaut l'endroit où est marqué *Rapport des Restes*, après quoi je cherche dans les Celulles où sont les chiffres quelle est celle qui répond à ces deux endroits, & trouvant qu'il y a le chiffre 2, je dis que le rapport du reste est comme 1 à 2.

De même si je veux sçavoir quel est le rapport des quatriémes puissances de ce même reste, je cherche dans le premier rang d'enhaut l'endroit où est écrit *Rapport des quatriémes Puissances*, & ensuite la celulle des chiffres qui répond à cet endroit, & à celui où est écrit *Des premieres Racines*, & trouvant le nombre 5 dans cette celulle, je dis que le rapport de ces quatriémes puissances à leur dernier terme multiplié par le nombre des termes est comme 1 à 5.

De même, si l'on demande le rapport des troisiémes puissances du reste de la suite des égaux moins la suite des cinquiémes racines, je cherche enhaut l'endroit où est marqué *Rapport des troisiémes Puissances*, & dans le rang perpendiculaire à gauche l'endroit où est écrit *des cinquiémes Puissances*, & trouvant écrit dans la Celulle qui répond à ces deux endroits 56,

TABLE

TABLE

QUI marque le Rapport des Restes de la suite des égaux moins celles des Racines quarrées, des Racines troisiémes, quatriémes, cinquiémes, &c. & le Rapport des Quarrés de ces Restes, des Cubes, des quatriémes Puissances, &c.

RAPPORT

La Suite des Egaux moins la Suite.

	Des Egaux.	Des Restes.	Des Quarrés.	Des Cubes.	Des 4es. Puissances.	Des cinquiémes.	Des sixiémes.	Des septiémes.	Des huitiémes.	Des neuviémes.	Des dixiémes.
Des Egaux.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Des Premieres Racines.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Des secondes.	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
Des troisiémes.	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286
Des quatriém.	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001
Des cinquiém.	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003
Des sixiémes.	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008
Des septiémes.	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448
Des huitiémes.	1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758
Des neuviém.	1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378
Des dixiémes.	1	11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378	184756

je dis que le rapport de ces troisiémes Puissances est comme 1 à 56, & ainsi des autres.

Cette Table comme on voit est précisément la même que celle des nombres figurés que nous avons donnée ci-dessus.

APPLICATION A LA GEOMETRIE.

PROPOSITION XLV.

120. *Le solide décrit par la circonvolution d'un complement* ABC *de Parabole quarrée autour de la tangente* BC *paralelle à l'axe, est à sa base* AF *multipliée par sa hauteur* CB, *comme* 1 *à* 6. (Fig. 56.)

DEMONSTRATION.

Circonscrivez au complement le rectangle ACDB, les Elemens de ce rectangle perpendiculaires à la hauteur CB, sont comme la suite des égaux ; & si de ces Elemens vous retranchez les Elemens de la Parabole perpendiculaires à l'axe qui sont comme la suite des racines quarrées des nombres 0. 1. 2. 3, &c. le reste sera les Elemens du complement, lesquels seront par conséquent comme la suite des égaux moins la suite des racines quarrées. Or ces Elemens en tournant autour de CB décrivent des cercles qui sont entr'eux comme les quarrés de ces Elemens ; donc ces cercles sont entr'eux comme les quarrés du reste de la suite des égaux moins celles des racines quarrées. Donc par la proposition précédente ils sont à leur base AF multipliée par la hauteur BC, c'est-à-dire au Cylindre circonscrit AFED, comme 1 à 6. Donc le solide, &c.

COROLLAIRE I.

121. Ce qui reste du Cylindre après qu'on en a ôté le solide ABF est donc les $\frac{5}{6}$ du Cylindre. Or ce reste est égal au solide décrit par la circonvolution de la demi-Parabole DAB autour de BC, donc l'anneau parabolique fermé DABEF est égal aux $\frac{5}{6}$ du Cylindre circonscrit.

COROLLAIRE II.

122. Si la demi-Parabole étoit du second genre, ses Elemens ordonnés à l'axe seroient comme les racines troisiémes

des nombres o. 1. 2. 3. 4, &c. donc les Elemens du complement seroient comme le reste de la suite des égaux moins les racines troisiémes. Et par conséquent leurs quarrés ou les cercles qu'ils décriroient seroient comme les quarrés de ce reste ; donc ils seroient au Cylindre circonscrit comme 1 à 10 par la proposition précédente ; donc l'anneau parabolique fermé seroit le $\frac{9}{10}$ de ce Cylindre.

COROLLAIRE III.

123. Et on trouvera de la même façon que si la Parabole étoit du troisiéme genre, du quatriéme, du cinquiéme, &c. le solide fait par le complement seroit au Cylindre circonscrit comme 1 à 15, comme 1 à 21, comme 1 à 28, &c. & que l'anneau seroit au même Cylindre comme 14 à 15, comme 20 à 21, comme 27 à 28, &c.

CONTINUATION DU CHAPITRE VI.

PROPOSITION XLVI.

124. *SI l'on ôte de la suite des premieres Puissances, c'est-à-dire o. 1. 2. 3. 4, &c. la suite des quarrés ou des cubes, ou des quatriémes Puissances, &c. on pourra connoître non-seulement le rapport du reste au dernier terme multiplié par le nombre des termes, mais encore celui des quarrés de ce reste, des cubes, des quatriémes Puissances, &c.*

DEMONSTRATION.

Les premieres Puissances sont comme o. a. b. c. d. e, &c. RR. & les secondes comme o. a^2. b^2. c^2. d^2. e^2, &c. RR. ainsi le reste sera o—o, $a-a^2$, $b-b^2$, $c-c^2$, &c. Faisant donc le calcul à l'ordinaire, nous trouverons que le rapport du reste est $\frac{1}{6}$, celui des quarrés $\frac{1}{30}$, celui des cubes $\frac{1}{140}$, &c.

Reste.

$0. - 0.$
$a. - a^2.$
$b. - b^2.$
$c. - c^2.$
&c.
$R^2. - R^2.$

$\frac{1}{2}AR^2. - \frac{1}{3}AR^2. = \frac{1}{6}AR^2.$

$\frac{1}{2\times3} = \frac{1}{6}.$

Quarrés.

$0. - 0. + 0.$
$a^2. - 2a^3. + a^4.$
$b^2. - 2b^3. + b^4.$
$c^2. - 2c^3. + c^4.$
&c.
$R^4. - 2R^2R^2. + R^4.$

$\frac{1}{3}AR^4. - \frac{2}{4}AR^4. + \frac{1}{5}AR^4. = \frac{1}{30}AR^4.$

$\frac{1\times2}{3\times4\times5} = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}.$

Cubes.

$0. - 0. + 0. - 0.$
$a^3. - 3a^4. + 3a^5. - a^6.$
$b^3. - 3b^4. + 3b^5. - b^6.$
$c^3. - 3c^4. + 3c^5. - c^6.$
&c.
$R^6. - 3R^4R^2. + 3R^2R^4. - R^6.$

$\frac{1}{4}AR^6. - \frac{3}{5}AR^6 + \frac{3}{6}AR^6. - \frac{1}{7}AR^6. = \frac{1}{140}AR^6.$

$\frac{1\times2\times3}{4\times5\times6\times7} = \frac{6}{840} = \frac{1}{140}.$

Or ces rapports sont les mêmes que ceux-ci $\frac{1}{2\times3} = \frac{1}{6}$, $\frac{1\times2}{3\times4\times5} = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}$, $\frac{1\times2\times3}{4\times5\times6\times7} = \frac{6}{840} = \frac{1}{140}$ ainsi il n'y a qu'à examiner leur progression pour trouver les rapports des autres puissances plus élevées. Premierement la progression des numérateurs commence par un au premier rapport ; dans le second les deux premiers nombres naturels se multiplient l'un par l'autre ; dans le troisiéme les trois premiers nombres naturels se multiplient, & ainsi de suite. Secondement les premiers termes des dénominateurs forment la progression 2. 3. 4, &c. & les autres termes suivent la même progression. Donc si l'on veut le rapport des quatriémes puissances on aura $\frac{1\times2\times3\times4}{5\times6\times7\times8\times9}$, pour les cinquiémes $\frac{1\times2\times3\times4\times5}{6\times7\times8\times9\times10}$, & ainsi des autres.

De même les troisiémes puissances des nombres 0. 1. 2. 3. 4,

&c. sont comme o. a^3. c^3. d^3, &c. R^3. ainsi cette suite étant retranchée de la suite o. a. b. c. d. R^3, donne le reste o.—o, a.—a^3, b.—b^3, c.—c^3, d.—d^3, R^3.—R^3. & faisant le calcul à l'ordinaire nous trouverons que le rapport du reste est $\frac{1}{4}$, celui de ses quarrés $\frac{8}{105}$, celui des cubes $\frac{48}{1920}$, &c.

Reste.	*Quarrés.*
$o - o$.	$o - o + o$.
$a - a^3$.	$a^2. - 2a^4. + a^6$.
$b - b^3$.	$b^2. - 2b^4. + b^6$.
$c - c^3$.	$c^2. - 2c^4. + c^6$.
$d - d^3$.	$d^2. - 2d^4. + d^6$.
&c.	&c.
$R^3. - R^3$.	$R^6. - 2R^3R^3. + R^6$.
$\frac{1}{2}AR^3 - \frac{1}{4}AR^3 = \frac{1}{4}AR^3$.	$\frac{1}{3}AR^6 - \frac{2}{5}AR^6 + \frac{1}{7}AR^6 = \frac{8}{105}AR^6$.
$\frac{1}{2\times4} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.	$\frac{2\times4}{3\times5\times7} = \frac{8}{105}$.

Or ces rapports sont les mêmes que ceux-ci $\frac{1}{2\times4}$, $\frac{2\times4}{3\times5\times7}$, $\frac{2\times4\times6}{4\times6\times8\times10}$, &c. dont le premier numérateur est 2, & les termes qui composent les autres en se multipliant se surpassent toujours de deux.

Cubes.

$$o - o + o - o.$$
$$a^3. - 3a^5. + 3a^7. - a^9.$$
$$b^3. - 3b^5. + 3b^7. - b^9.$$
$$c^3. - 3c^5. + 3c^7. - c^9.$$
$$d^3. - 3d^5. + 3d^7. - d^9.$$
&c.
$$R^9. - 3R^3R^6. + 3R^6R^3. - R^9.$$

$$\frac{1}{4}AR^9. - \frac{3}{6}AR^9. + \frac{3}{8}AR^9 - \frac{1}{10}AR^9 = \frac{1}{40}AR^9.$$
$$\frac{2\times4\times6}{4\times6\times8\times10} = \frac{48}{1920} = \frac{1}{40}.$$

De même les premiers termes des dénominateurs sont dans la progression naturelle, 2, 3, 4, 5, &c. & les autres vont en se surpassant toujours de deux. Ainsi si l'on veut le rapport des qua-

triémes puissances, des cinquiémes, des sixiémes, &c. on aura pour ces rapports $\frac{2\times4\times6\times8}{5\times7\times9\times11\times13}$ $\frac{2\times4\times6\times8\times10}{6\times8\times10\times12\times14\times16}$, & ainsi des autres.

Et par un semblable calcul on trouvera que si de la suite o. $a.$ $b.$ c, on retranche la suite o. $a^4.$ $b^4.$ c^4, &c. le rapport du reste sera $\frac{3}{10}$, celui de ses quarrés $\frac{1}{9}$, celui des cubes $\frac{81}{1820}$, &c. lesquels rapports sont les mêmes que ceux-ci $\frac{3}{2\times5}=\frac{3}{10}$, $\frac{3\times6}{2\times6\times9}=\frac{18}{162}=\frac{1}{9}$, $\frac{3\times6\times9}{4\times7\times10\times13}=\frac{162}{3640}=\frac{81}{1820}$, où l'on voit que le premier numérateur est 3, & que les termes qui composent les autres vont en se surpassant de trois; que le premier terme du dénominateur est 2, & que les autres vont en se surpassant de trois, en observant que la progression naturelle 2. 3. 4. 5. 6, &c. des premier dénominateurs est toujours invariable. Ainsi si l'on veut le rapport des quatriémes puissances, des cinquiémes &c. ces rapports seront $\frac{3\times6\times9\times12}{5\times8\times11\times14\times17}$, $\frac{3\times6\times9\times12\times15}{6\times9\times12\times15\times18\times21}$, & ainsi de suite.

Or puisqu'à mesure que les puissances que l'on retranche de la suite o. $a.$ $b.$ $c.$ d, &c. augmentent, le premier numérateur augmente aussi d'une unité, que le premier terme du premier dénominateur est toujours 2, & que la progression dans les autres termes, soit du dessus, soit du dessous, a pour différence le nombre 1 lorsqu'on a retranché les quarrés, le nombre 2 lorsqu'on a retranché les cubes, le nombre 3 lorsqu'on a retranché les quatriémes puissances; il s'ensuit que si l'on retranche les cinquiémes puissances, le rapport du reste sera $\frac{4}{2\times6}$, celui de ses quarrés $\frac{4\times8}{3\times7\times11}$, celui des cubes $\frac{4\times8\times12}{4\times8\times12\times16}$, celui des quatriémes puissances $\frac{4\times8\times12\times16}{5\times9\times13\times17\times21}$, & ainsi des autres.

Et si on retranche de la suite o. $a.$ $b.$ $c.$ d, &c. les sixiémes puissances o. $a^6.$ $b^6.$ c^6, &c. le rapport du reste sera $\frac{5}{2\times7}$, celui des quarrés $\frac{5\times10}{3\times8\times13}$, celui des cubes $\frac{5\times10\times15}{4\times9\times14\times19}$, celui des quatriémes puissances $\frac{5\times10\times15\times20}{5\times10\times15\times20\times25}$, & ainsi de suite.

De même si on retranche de la suite o. $a.$ $b.$ $c.$ d, &c. les septiémes puissances o. $a^7.$ b^7, &c. le rapport du reste sera $\frac{6}{2\times8}$.

celui de ses quarrés $\frac{6 \times 12}{3 \times 9 \times 15}$, celui des cubes $\frac{6 \times 12 \times 18}{4 \times 10 \times 16 \times 22}$, celui des quatriémes puissances $\frac{6 \times 12 \times 18 \times 24}{5 \times 11 \times 17 \times 23 \times 26}$, &c.

Et l'on peut continuer à l'infini ce calcul pour les puissances plus élevées qu'on retrancheroit de la suite o. *a*. *b*. *c*, &c.

COROLLAIRE I.

125. Si de la suite des quarrés o. a^2. b^2. c^2, &c. on ôte les troisiémes puissances o. a^3. b^3. c^3, &c. on trouvera par les voyes employées ci-dessus que les rapports du reste, de ses quarrés, de ses cubes, &c. sont $\frac{1}{3 \times 4}$, $\frac{1 \times 2}{5 \times 6 \times 7}$, $\frac{1 \times 2 \times 3}{7 \times 8 \times 9 \times 10}$, $\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{9 \times 10 \times 11 \times 12 \times 13}$ & ainsi de suite, où les premiers termes des dénominateurs sont dans la progression des impairs 3, 5, 7, &c. & tous les autres, soit du dessus, soit du dessous, sont dans la progression naturelle.

Si de la même suite o. a^2. b^2. c^2, &c. on ôte les quatriémes puissances o. a^4. b^4, &c. les rapports du reste, de ses quarrés, cubes, quatriémes puissances, &c. seront $\frac{2}{3 \times 5}$, $\frac{2 \times 4}{5 \times 7 \times 9}$, $\frac{2 \times 4 \times 6}{7 \times 9 \times 11 \times 13}$, $\frac{2 \times 4 \times 6 \times 8}{9 \times 11 \times 13 \times 15 \times 17}$, &c. où le premier numérateur est 2, les dénominateurs gardent toujours dans les premiers termes la progression des impairs 3. 5. 7, &c. & la progression des autres termes, tant du dessus que du dessous, a pour différence le nombre 2.

Et si de la même suite o. a^2. b^2, &c. on ôte les cinquiémes puissances a^5. b^5, &c. les rapports du reste, de ses quarrés, cubes, quatriémes puissances, &c. seront $\frac{3}{3 \times 6}$, $\frac{3 \times 6}{5 \times 8 \times 11}$ $\frac{3 \times 6 \times 9}{7 \times 10 \times 13 \times 16}$ $\frac{3 \times 6 \times 9 \times 12}{9 \times 12 \times 15 \times 18 \times 21}$, &c.

Et si de la même suite on ôte les sixiémes puissances o. a^6. b^6, &c. les rapports des restes, de ses quarrés, cubes, &c. $\frac{4}{3 \times 7}$, $\frac{4 \times 8}{5 \times 9 \times 13}$, $\frac{4 \times 8 \times 12}{7 \times 11 \times 15 \times 19}$ $\frac{4 \times 8 \times 12 \times 16}{9 \times 13 \times 17 \times 21 \times 25}$, &c.

Et si on ôte les septiémes puissances, ces rapports seront $\frac{5}{3 \times 8}$, $\frac{5 \times 10}{5 \times 10 \times 15}$, $\frac{5 \times 10 \times 15}{7 \times 12 \times 17 \times 22}$ &c. & de même pour les puissances plus élevées qu'on retrancheroit de la suite o. a^2. b^2. c^2, &c.

COROLLAIRE II.

126. Si de la ſuite des troiſiémes puiſſances on ôte les quatriémes o. a^4. b^4, &c. les rapports du reſte, de ſes quarrés, cubes, &c. ſeront $\frac{1}{4\times 5}$, $\frac{1\times 2}{7\times 8\times 9}$, $\frac{1\times 2\times 3}{10\times 11\times 12\times 13}$, &c. où les premiers termes des dénominateurs ſont dans la progreſſion 4. 7. 10, &c. & la différence des autres termes, ſoit du deſſous, ſoit du deſſus eſt l'unité.

Et ſi de la même ſuite l'on ôte les cinquiémes puiſſances o. a^5. b^5, &c. les rapports du reſte, de ſes quarrés, cubes, &c. ſeront $\frac{2}{4\times 6}$, $\frac{2\times 4}{7\times 9\times 11}$, $\frac{2\times 4\times 6}{10\times 12\times 14}$, &c. où la différence de la progreſſion eſt 2, à l'exception toujours des premiers termes des dénominateurs qui conſervent la même progreſſion 4. 7. 10, &c.

Et ſi de la même ſuite on ôte les ſixiémes puiſſances o. a^6. b^6. &c. les rapports du reſte, de ſes quarrés, cubes, &c. ſeront $\frac{3}{4\times 7}$, $\frac{3\times 6}{7\times 10\times 13}$, $\frac{3\times 6\times 9}{10\times 13\times 16\times 19}$, &c.

Et ſi l'on ôte les ſeptiémes puiſſances, les rapports ſeront $\frac{4}{4\times 8}$, $\frac{4\times 8}{7\times 11\times 15}$, $\frac{4\times 8\times 12}{10\times 14\times 18\times 22}$, &c.

On pourroit pouſſer ces recherches auſſi loin qu'on voudroit ſans beaucoup de peine, en faiſant attention à ce qui a été dit.

PROPOSITION LXVII.

127. *Si on ôte de la ſuite des racines o.* $a^{\frac{1}{2}}$. $b^{\frac{1}{2}}$. $c^{\frac{1}{2}}$, *&c. la ſuite des premieres puiſſances, des ſecondes, des troiſiémes, &c. on pourra connoître, non-ſeulement le rapport du reſte, mais encore celui de leur quarrés, cubes, quatriémes puiſſances, &c.*

DEMONSTRATION.

Si de la ſuite o. $a^{\frac{1}{2}}$. $b^{\frac{1}{2}}$. $c^{\frac{1}{2}}$, &c. on ôte la ſuite des premieres puiſſances o. a. b. c. d, &c. le reſte ſera une ſuite compoſée de deux autres, l'une poſitive, l'autre négative, dont le rapport ſera $\frac{2}{3}$AR $-$ $\frac{1}{2}$AR $=$ $\frac{1}{6}$AR, & ſi on éleve les termes de ce reſte au quarré, au cube, &c. les rapports ſeront comme on voit ici.

Reſte,

Reste.	*Quarrés.*
$0. - 0.$	$0 - 0 + 0.$
$a^{\frac{1}{2}}. - a.$	$a - 2a^{\frac{3}{2}}. + aa.$
$b^{\frac{1}{2}}. - b.$	$b - 2b^{\frac{3}{2}}. + bb.$
$c^{\frac{1}{2}}. - c.$	$c. - 2c^{\frac{3}{2}}. + cc.$
&c.	&c.
$R - R.$	$RR - 2R \times R. + RR.$
$\frac{2}{3}AR - \frac{1}{2}AR = \frac{1}{6}AR.$	$\frac{1}{2}AR^2. - \frac{4}{5}AR^2. + \frac{1}{3}AR^2. = \frac{1}{30}AR^2.$
$\frac{2}{3 \times 4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$	$\frac{2 \times 2}{4 \times 5 \times 6} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}.$

Cubes.

$0 - 0 + 0 - 0.$

$a^{\frac{3}{2}}. - 3a^{\frac{4}{2}}. + 3a^{\frac{5}{2}}. - a^3.$

$b^{\frac{3}{2}}. - 3b^{\frac{4}{2}}. + 3b^{\frac{5}{2}}. - b^3.$

$c^{\frac{3}{2}}. - 3c^{\frac{4}{2}}. + 3c^{\frac{5}{2}}. - c^3.$

&c.

$R^3. - 3RR \times R + 3R \times R^2. - R^3.$

$\frac{2}{5}AR^3. - \frac{3}{3}AR^3. + \frac{6}{7}AR^3. - \frac{1}{4}AR^3. = \frac{1}{140}AR^3.$

$\frac{2 \times 2 \times 3}{5 \times 6 \times 7 \times 8} = \frac{12}{1680} = \frac{1}{140}.$

Or ces rapports sont les mêmes que ceux-ci $\frac{2}{3 \times 4}$, $\frac{2 \times 2}{4 \times 5 \times 6}$, $\frac{2 \times 2 \times 3}{5 \times 6 \times 7 \times 8}$, où les premiers termes des dénominateurs sont dans la progression 3. 4. 5, &c. & les autres ont pour différence 1, & quant aux numérateurs, le premier est 2, le second est le quarré du premier, & le troisiéme est le même quarré multiplié par 3, & par conséquent la progression dans les dénominateurs commence ici ; donc pour avoir le rapport des quatriémes puissances, des cinquiémes, sixiémes, &c. il faut écrire $\frac{2 \times 2 \times 3 \times 4}{6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10}$, $\frac{2 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12}$, &c. & ainsi des autres.

Et si de la suite $0.\ a^{\frac{1}{2}}.\ b^{\frac{1}{2}}.\ c^{\frac{1}{2}}$, &c. on ôte la suite des quarrés $0.\ a^2.\ b^2.\ c^2$, &c. faisant le calcul à l'ordinaire, on trouvera

M

que les rapports du reste, de ses quarrés, cubes, &c. sont $\frac{6}{3\times 6}$, $\frac{6\times 6}{4\times 7\times 10}$, $\frac{6\times 6\times 9}{5\times 8\times 11\times 14}$, $\frac{6\times 6\times 9\times 12}{6\times 9\times 12\times 15\times 18}$, &c. où la différence du premier numérateur 6 au premier numérateur précédent est 4, & la différence qui regne dans la progression est 3, en observant toujours que les premiers termes des dénominateurs ont toujours la même progression 3. 4. 5, &c. & que le second numérateur est le quarré du premier, & que ce quarré se repete dans le troisiéme où la progression commence.

Et si de la suite o. $a^{\frac{1}{2}}$. $b^{\frac{1}{2}}$. $c^{\frac{1}{2}}$, &c. on ôte les cubes o. a^3. b^3, &c. les rapports du reste, de ses quarrés, &c. sera $\frac{10}{3\times 8}$, $\frac{10\times 10}{4\times 9\times 14}$, $\frac{10\times 10\times 15}{5\times 10\times 15\times 20}$, $\frac{10\times 10\times 15\times 20}{6\times 11\times 16\times 21\times 26}$, & ainsi de suite, où la différence du premier numérateur au précédent 6, est encore 4, & la différence de la progression des termes est 5, en observant toujours ce que nous avons dit ci-dessus des premiers termes des dénominateurs & du second numérateur, & l'on voit, outre cela, que les différences des termes vont en augmentant selon la progression 1. 3. 5, &c. car d'abord la différence a été 1, puis elle a été 3, ensuite 5, &c.

Et si de la même suite on retranche les quatriémes puissances o. a^4. b^4, &c. les rapports du reste, de ses quarrés, cubes, &c. seront $\frac{14}{3\times 10}$, $\frac{14\times 14}{4\times 11\times 18}$, $\frac{14\times 14\times 21}{5\times 12\times 19\times 26}$, & ainsi de suite, ce qu'il est facile de continuer pour les puissances plus élevées qu'on retrancheroit de la suite o. $a^{\frac{1}{2}}$. $b^{\frac{1}{2}}$, &c.

COROLLAIRE. II.

128. Si l'on ôte de la suite des racines cubiques o. $a^{\frac{1}{3}}$. $b^{\frac{1}{3}}$. $c^{\frac{1}{3}}$, &c. la suite des premieres puissances o. a. b. c. d, &c. les rapports du reste, de ses quarrés, cubes, &c. seront $\frac{6}{4\times 6}$, $\frac{6\times 4}{5\times 7\times 9}$, $\frac{6\times 4\times 6}{6\times 8\times 10\times 12}$, $\frac{6\times 4\times 6\times 8}{7\times 9\times 11\times 13\times 16}$, &c. où la progression des premiers termes des dénominateurs est 4. 5. 6. 7, la différence des autres termes est 2, mais dans le second numérateur la progression devient inverse, après quoi elle se redresse dans le troisiéme.

Et si l'on ôte de cette même suite celle des quarrés o. a^2. b^2.

c^2, &c. les rapports du reſte, de ſes quarrés, de ſes cubes, &c. ſera $\frac{15}{4\times9}$, $\frac{15\times10}{5\times10\times15}$, $\frac{15\times10\times15}{6\times11\times16\times21}$, $\frac{15\times10\times15\times20}{7\times12\times17\times22\times27}$, &c.

Et ſi l'on ôte de la même ſuite celle des cubes o. a^3. b^3, &c. les rapports du reſte, de ſes quarrés, cubes, &c. ſeront $\frac{24}{4\times12}$, $\frac{24\times16}{5\times13\times21}$, $\frac{24\times16\times24}{6\times14\times22\times30}$, $\frac{24\times16\times24\times32}{7\times15\times23\times31\times39}$, & ainſi des autres.

On pourroit trouver une infinité d'autres reſtes de ſuite retranchées les unes des autres & trouver leur rapport, & ceux de leurs quarrés, de leurs cubes, &c. mais ce que j'en ai dit juſqu'ici eſt plus que ſuffiſant pour mettre en état ceux qui l'étudieront à trouver les rapports dont ils pourroient avoir beſoin. Il eſt vrai que je n'ai point parlé des rapports des racines quarrées, des racines cubiques, &c. des reſtes des ſuites. Mais c'eſt préciſement là où ſe trouve la grande difficulté ; car ſi le rapport de ces racines pouvoit ſe trouver tout de même que ceux des puiſſances, les fameux problemes de la quadrature du cercle, de l'Ellipſe & de l'hyperbole ſeroient reſolus, comme nous le fairons voir dans la ſuite ; cependant je donnerai des regles pour découvrir les rapports des racines qui peuvent ſe trouver, & je montrerai en même tems d'où naît la difficulté dans celles dont le rapport eſt encore inconnu.

APPLICATION A LA GEOMETRIE.

PROPOSITION XLVIII.

129. *Un ſegment* AEB *de parabole quarrée, fait par une droite* AB (Fig. 54.) *tirée du ſommet* B *à l'extremité* A *de la baſe, eſt au rectangle* ADBC *circonſcrit à la demi-Parabole, comme* 1. *à* 6.

DEMONSTRATION.

Les Elemens du triangle ADB paralelles à l'axe, ſont comme la ſuite o. a. b. c, &c. & ceux du complement AEB, comme les quarrés o. a^2. b^2. c^2, &c. ôtant donc ceux-ci de ceux là, le complement AEB ſera comme le reſte $o-o$. $a-a^2$. $b-b^2$,

&c. Or ce reste est au dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme 1 à 6, donc le segment est au dernier terme AD, multiplié par le nombre des termes DB, c'est-à-dire, au rectangle ADBC, comme 1 à 6.

$$\begin{array}{l} o — o. \\ a — a^2. \\ b — b^2. \\ c — c^2. \\ \&c. \\ R^2. — R^2. \\ \hline \tfrac{1}{2} AR^2. — \tfrac{1}{3} AR^2. = \tfrac{1}{6} AR^2. \end{array}$$

COROLLAIRE I.

130. Donc le segment est le quart de la demi-Parabole, car la demi-Parabole vaut les deux tiers ou les quatre sixiémes du rectangle.

COROLLAIRE II.

131. Si la demi-Parabole étoit du second genre, du troisiéme, &c. le segment seroit au rectangle, comme 1 à 4, comme 3 à 10, &c. (*N.* 124.) car les Elemens de ce segment seroient comme les Elemens du triangle ou de la suite o. *a. b. c. d*, &c. moins les Elemens du complement qui seroient comme les troisiémes puissances, comme les quatriémes, &c.

PROPOSITION XLIX.

132. *Les quarrés des Elemens du segment parabolique* AEB *paralelles à l'axe*, (Fig. 54.) *sont au solide du quarré de l'axe ou de la droite* AD *multiplié par la base* AC, *comme* 1 *à* 30.

DEMONSTRATION.

Les Elemens de ce segment par la proposition précédente, sont comme les premieres puissances, moins les secondes puissances, donc leurs quarrés sont comme les quarrés des premieres puissances, moins les secondes. Mais par la proposition 46. (*N.* 124.) ces quarrés sont au plus grand multiplié par le nombre des termes, comme 1. à 30. Donc le solide fait par les quarrés du complement est au quarré de AD multiplié par DB ou AC, comme 1 à 30.

J'ai déja démontré ceci dans la Proposition XLII. où j'ai appellé ce solide *Navette Parabolique*; mais la methode que je viens d'employer ici est beaucoup plus claire, & plus facile, &

je n'ai donné l'autre que pour montrer aux Commençans la facilité que cette Science donne pour résoudre les questions de différentes façons.

COROLLAIRE.

133. Si la demi-Parabole est du second genre, les Elemens du Segment seront comme les premieres puissances moins les troisiémes, & par conséquent leurs quarrés seront comme les quarrés du reste des premieres puissances moins les troisiémes; or ces quarrés sont au plus grand multiplié par le nombre des termes, comme 8 à 105 par la Proposition XLVI. Donc les quarrés de la Navette sont au quarré de AD multiplié par BD, comme 8 à 105.

Et par la même Proposition, on trouvera le rapport des quarrés de la Navette au quarré de AD multiplié par BD, lorsque la Parabole sera du quatriéme genre, du cinquiéme, &c.

PROPOSITION L.

134. *Une demi-Parabole quarrée* ABC *étant donnée;* (Fig. 57.) *si à son sommet* B *on décrit une autre demi-Parabole* ABD *comprise dans le même Parallellogramme circonscrit* ADBC, *& dont le sommet soit aussi* B, *l'espace compris entre les deux lignes paraboliques est le tiers du rectangle circonscrit, & le solide formé par les quarrés de ses Elemens parallelles à la base* AC, *est au quarré de cette base multiplié par la hauteur* CB *comme* 9 *à* 70.

DEMONSTRATION.

Les Elemens de la Parabole ABC ordonnés à son axe BC, sont comme les racines quarrées o. $a^{\frac{1}{2}}$: $b^{\frac{1}{2}}$. $c^{\frac{1}{2}}$, &c. & les Elemens du complement ABC de la Parabole ABD pris du même sens, sont entr'eux comme les quarrés o. a^2: b^2. c^2, &c. Retranchant donc ceux-ci de ceux-là, le reste sera les Elemens de l'espace renfermé entre les deux lignes paraboliques. Ainsi ces Elemens seront comme le reste des racines quarrées moins les quarrés; or par la Proposition XLVII, ce reste est au dernier terme multiplié par le nombre des termes comme $\frac{6}{3 \times 6}$, ou comme $\frac{6}{18}$, ou comme 1 à 3; donc les Elemens de cet axe sont à la base AC multiplié par CB, c'est-à-dire au rectangle circonscrit comme 1 à 3.

Par la même Proposition XLVII. les quarrés du reste des racines quarrées moins les quarrés, sont au dernier multiplié par le nombre des termes $\frac{6 \times 6}{4 \times 7 \times 10} = \frac{36}{280} = \frac{9}{70}$; donc les quarrés des Elemens de l'espace proposé sont au quarré de la base AC multiplié par la hauteur CB, comme 9 à 70.

COROLLAIRE I.

135. Si les demi-Paraboles étoient cubiques, les Elemens de l'espace proposé seroient entr'eux comme les racines cubiques moins les cubes. Or par la Proposition déja citée, le reste des racines cubiques moins les cubes est au dernier terme multiplié par le nombre des termes comme $\frac{24}{4 \times 12} = \frac{24}{48} = \frac{1}{2}$; donc l'espace proposé seroit à la base AC multipliée par la hauteur CB, comme 1 à 2.

Et par la même Proposition, les quarrés du reste sont au dernier terme multiplié par le nombre des termes comme $\frac{24 \times 16}{5 \times 13 \times 21} = \frac{384}{1365} = \frac{128}{455}$. Donc les quarrés des Elemens de l'espace proposé sont au quarré de la base AC multiplié par la hauteur CB comme 128 à 455.

COROLLAIRE III.

136. Et si les demi-Paraboles étoient du troisiéme genre, du quatriéme, &c. alors les Elemens de l'espace proposé seroient comme les racines quatriémes ou cinquiémes, &c. moins les quatriémes puissances, ou les cinquiémes, &c. Et comme les rapports de ces restes ne sont pas contenus dans la Proposition XLVII. que nous n'avons pas poussé plus loin, on les trouveroit en faisant le calcul, comme nous l'avons enseigné. Par exemple, si les Paraboles étoient du troisiéme genre, les Elemens de cet espace seroient comme le reste $0 - 0.\ a^{\frac{1}{4}}. - a^4.\ b^{\frac{1}{4}} - b^4.\ c^{\frac{1}{4}} - c^4$, &c. qui est composé de deux suites dont l'une qui est positive vaut $\frac{4}{5}AR^4$. & l'autre qui est négative vaut $-\frac{1}{5}AR^4$. Et par conséquent le rapport de ces Elemens au dernier terme multiplié par le nombre des termes, c'est-à-dire au rectangle circonscrit seroit $\frac{4}{5} - \frac{1}{5}$, ou $\frac{3}{5}$; & faisant les quarrés des termes du reste, on trouveroit que le rapport du

solide au quarré de la base AC multiplié par la hauteur CB seroit $\frac{75}{189}$, & ainsi des autres.

Restes.	*Quarrés.*
$0 - 0.$	$0.$
$a^{\frac{1}{4}} - a^4.$	$a^{\frac{1}{2}} - 2a^{\frac{17}{4}} + a^8.$
$b^{\frac{1}{4}} - b^4.$	$b^{\frac{1}{2}} - 2b^{\frac{17}{4}} + b^8.$
$c^{\frac{1}{4}} - c^4.$	$c^{\frac{1}{2}} - 2c^{\frac{17}{4}} + c^8.$
&c.	&c.
$R^4 - R^4.$	$R^8 - 2R^4R^4 + R^8.$
$\frac{4}{5}AR^4 - \frac{1}{5}AR^4 = \frac{3}{5}AR^4.$	$\frac{2}{3}AR^8 - \frac{8}{21}AR^8 + \frac{1}{9}AR^8 = \frac{75}{189}AR^8.$

La figure 58 représente le solide dont nous parlons.

PROPOSITION LI.

137. *La somme des Elemens d'un Segment* AB *de Parabole quarrée paralelles à la base* AC, *est au rectangle circonscrit comme* 1 *à* 6, *& la somme des quarrés de ses Elemens est au quarré de la base* AC *multiplié par la hauteur* CB, *comme* 1 *à* 30. (Fig. 59.)

DEMONSTRATION.

Les Elemens de la Parabole perpendiculaires à l'axe BC, sont comme la suite $0.\ a^{\frac{1}{2}}.\ b^{\frac{1}{2}}.\ c^{\frac{1}{2}}$, &c. & ceux du triangle ABC comme la suite $0.\ a.\ b.\ c.\ d$, &c. ôtant donc ceux-ci de ceux-là, les Elemens du segment AB seront comme le reste des racines quarrées moins les premieres Puissances, & par conséquent leur somme sera à AC×CB, comme 1 à 6 par la Proposition XLVIII., c'est-à-dire, le segment est au rectangle circonscrit, comme 1 à 6.

Or par la même Proposition, les quarrés du reste sont au dernier multiplié par le nombre des termes comme 1 à 30. Donc la somme des quarrés des Elemens est au quarré de la base AC multiplié par la hauteur CB, comme 1 à 30.

La figure 60. représente le solide fait par les quarrés des Elemens.

COROLLAIRE.

138. On trouvera de la même façon le rapport du ſegment au rectangle circonſcrit, & des quarrés de ſes Elemens au quarré de la baſe multiplié par la hauteur, quand la demi-Parabole ſera du ſecond genre, du troiſiéme, &c.

PROPOSITION LII.

139. *Si deux demi-Paraboles, l'une du premier genre & l'autre du ſecond, ſont inſcrites dans un même Paralellogramme* ADFB (Fig. 61.) *la figure curviligne compriſe entre les deux Paraboles, eſt au rectangle circonſcrit comme* 1 *à* 12, *& le ſolide fait par le quarré de ſes Elemens paralelles à la baſe* AD, *eſt au quarré de la baſe multiplié par la hauteur* DB, *comme* 1 *à* 110.

DEMONSTRATION.

Les Elemens de la demi-Parabole AEB du ſecond genre, ſont comme o. $a^{\frac{1}{3}}$. $b^{\frac{1}{3}}$. $c^{\frac{1}{3}}$, &c. & ceux de la demi-Parabole ABC du premier genre, comme o. $a^{\frac{1}{2}}$. $b^{\frac{1}{2}}$. $c^{\frac{1}{2}}$, &c. ôtant donc ceux-ci de ceux-là, nous aurons le reſte o—o. $a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{2}}$. $b^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{2}}$, &c. qui eſt compoſé de deux ſuites, dont la premiere vaut $\frac{3}{4}$ AR$^{\frac{1}{3}}$, & la ſeconde $-\frac{2}{3}$ AR$^{\frac{1}{3}}$. Donc le rapport de ce reſte eſt $\frac{3}{4}$ AR$^{\frac{1}{3}}$ $-\frac{2}{3}$ AR$^{\frac{1}{3}}$ $= \frac{1}{12}$ AR$^{\frac{1}{3}}$. Et par conſéquent l'eſpace mixtiligne eſt à la baſe AD multipliée par DB, ou au rectangle circonſcrit comme 1 à 12.

Reſte.	*Quarrés.*
o — o	o — o + o
$a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{2}}$	$a^{\frac{2}{3}} - 2a^{\frac{5}{6}} + a.$
$b^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{2}}$	$b^{\frac{2}{3}} - 2b^{\frac{5}{6}} + b.$
$c^{\frac{1}{3}} - c^{\frac{1}{2}}$	$c^{\frac{2}{3}} - 2c^{\frac{5}{6}} + c.$
&c.	&c. &c. &c.
$R^{\frac{1}{3}} - R^{\frac{1}{3}}$	$R^{\frac{2}{3}} - 2R^{\frac{2}{3}}R^{\frac{1}{3}} + R^{\frac{2}{3}}$

$\frac{3}{4}AR^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}AR^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{12}AR^{\frac{1}{3}}$ $\frac{3}{5}AR^{\frac{2}{3}} - \frac{12}{11}AR^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}AR^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{110}AR^{\frac{2}{3}}$

Et

Et faiſant les quarrés de chaque terme du reſte, nous aurons une nouvelle ſuite compoſée de trois autres, dont la premiere étant celle des racines troiſiémes des quarrés, vaut $\frac{3}{5}AR^{\frac{2}{3}}$, la ſeconde qui eſt double de celle des racines ſixiémes des cinquiémes puiſſances vaut $-\frac{12}{11}AR^{\frac{2}{3}}$, parce qu'elle eſt négative, & la troiſiéme étant celle des premieres puiſſances vaut $\frac{1}{2}AR^{\frac{2}{3}}$. Donc le rapport de ces quarrés eſt $\frac{3}{5}AR^{\frac{2}{3}} - \frac{12}{11}AR^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}AR^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{110}AR^{\frac{2}{3}}$. Ainſi les quarrés des Elemens de l'eſpace mixtiligne AEBC ſont au quarré de la baſe AD multiplié par la hauteur DB, comme 1 à 110.

Ce ſolide eſt repreſenté par la Figure 62.

COROLLAIRE I.

140. Et ſi les deux paraboles étoient l'une du premier, & l'autre du troiſiéme genre, ou du quatriéme, &c. ou bien l'une du ſecond, & l'autre du troiſiéme, quatriéme, &c. on trouveroit par un ſemblable calcul le rapport de la figure mixtiligne, & celui de ſes quarrés.

COROLLAIRE II.

141. Mais ſi on demande le rapport des quarrés des Elemens de la figure mixtiligne paralelles à l'axe, on fera attention que les Elemens du complement AFBC paralelles à l'axe, ſont comme o. a^2. b^2. c^2, &c. & ceux du complement AFBE, comme la ſuite o. a^3. b^3. c^3, &c.

Reſte.	*Quarrés.*
$0 - 0$.	$0 - 0 + 0$.
$a^2 - a^3$.	$a^4 - 2a^5 + a^6$.
$b^2 - b^3$.	$b^4 - 2b^5 + b^6$.
$c^2 - c^3$.	$c^4 - 2c^5 + c^6$.
&c. &c.	&c. &c. &c.
$R^3. - R^3$.	$R^6 - 2R^3R^3 + R^6$.
$\frac{1}{3}AR^3 - \frac{1}{4}AR^3 = \frac{1}{12}AR^3$.	$\frac{1}{5}AR^6 - \frac{2}{6}AR^6 + \frac{1}{7}AR^6 = \frac{1}{105}AR^6$.

Otant donc ceux-ci de ceux-là, on auroit un reste dont le rapport comme on voit ici feroit $\frac{1}{12}AR^3$. Et faisant les quarrés de ce reste, on trouveroit que leur rapport est $\frac{1}{105}AR^6$, & par conséquent le solide fait par les quarrés des Elemens de la figure mixtiligne, feroit au quarré de FA, ou de l'axe BD multiplié par la base AD, comme 1 à 105.

Ce solide est representé par la Figure 63.

CHAPITRE VII.

Des Suites ajoûtées les unes aux autres.

PROPOSITION LIII.

142. *SI l'on ajoûte les termes d'une suite aux termes d'une autre, on pourra connoître non-seulement le rapport de leur somme, mais encore celui des quarrés de cette somme, des cubes, des quatriémes Puissances, &c.*

DEMONSTRATION.

Soit la suite o. a. b. c. d, &c. à laquelle soit ajoûtée la suite o. a^2. b^2. c^2, &c. la somme sera la suite $0+0$, $a+a^2$, $b+b^2$, $c+c^2$, &c. R^2+R^2. Or cette somme est composée de deux suites, dont la premiere étant celle des premieres puissances vaut $\frac{1}{2}AR^2$, & la seconde étant celle des quarrés, vaut $\frac{1}{3}AR^2$, & par conséquent la somme entiere vaut $\frac{1}{2}AR^2+\frac{1}{3}AR^2=\frac{5}{6}AR^2$. Donc cette somme est au dernier terme de l'une ou de l'autre suite multiplié par le nombre des termes comme 5 à 6.

Somme.	*Quarrés.*
$0+0$	$0+0+0$
$a+a^2$.	$a^2+2a^3+a^4$.
$b+b^2$.	$b^2+2b^3+b^4$.
$c+c^2$.	$c^2+2c^3+c^4$.
&c. &c.	&c. &c. &c.
R^2+R^2.	$R^4+2R^2R^2+R^4$.
$\frac{1}{2}AR^2+\frac{1}{3}AR^3=\frac{5}{6}AR^3$.	$\frac{1}{3}AR^4+\frac{2}{4}AR^4+\frac{1}{5}AR^4=\frac{62}{60}AR^4$.

Et faisant les quarrés des termes de cette somme, nous aurons une suite composée de trois autres, dont la premiere étant celle des quarrés vaudra $\frac{1}{3}AR^4$, la seconde étant double de celle des cubes vaudra $\frac{2}{4}AR^4$, & la troisiéme étant celle des quatriémes puissances vaudra $\frac{1}{5}AR^4$; ainsi la suite totale des quarrés de la somme vaudra $\frac{1}{3}AR^4 + \frac{2}{4}AR^4 + \frac{1}{5}AR^4 = \frac{62}{60} = AR^4$. Et par conséquent le rapport de ces quarrés au quarré de l'un ou de l'autre des derniers termes des suites ajoutées multiplié par le nombre des termes est comme 62 à 60, ou comme 31 à 30.

Et faisant les cubes des termes de la somme, nous aurons une suite composée de quatre autres, dont la premiere étant celle des cubes vaut $\frac{1}{4}AR^6$, la seconde étant triple de celle des quatriémes puissances vaut $\frac{3}{5}AR^6$, la troisiéme étant aussi triple des cinquiémes puissances vaut $\frac{3}{6}AR^6$, & la derniere qui est celle des sixiémes puissances vaut $\frac{1}{7}AR^6$.

$$
\begin{array}{llll}
0 & + \; 0 & + \; 0 & + \; 0. \\
a^3 & + 3a^4 & + 3a^5 & + a^6. \\
b^3 & + 3b^4 & + 3b^5 & + b^6. \\
c^3 & + 3c^4 & + 3c^5 & + c^6. \\
R^6 & + 3R^4R^2 & + 3R^2R^4 & + R^6. \\
\hline
\frac{1}{4}AR^6 & + \frac{3}{5}AR^6 & + \frac{3}{6}AR^6 & + \frac{1}{7}AR^6 = \frac{209}{140}AR^6.
\end{array}
$$

Donc la suite des cubes de la somme, vaut $\frac{1}{4}AR^6 + \frac{3}{5}AR^6 + \frac{3}{6}AR^6 + \frac{1}{7}AR^6 = \frac{209}{140}AR^6$. Et par conséquent cette suite est au cube du dernier terme de l'une ou l'autre des suites ajoûtées multiplié par le nombre des termes comme 209 à 140, & de même des autres puissances plus élevées.

Et de la même façon on connoîtra toujours en ajoutant deux suites connuës ensemble quel est le rapport de leur somme, & celui des quarrés, cubes, quatriémes puissances, &c. des termes de cette somme.

APPLICATION A LA GEOMETRIE.

PROPOSITION LIV.

143. *Si l'on ajoûte à un rectangle* ABCD (Fig. 64.) *un triangle* DCE *de même base & de même hauteur, le trapezoïde qui en sera formé sera au rectangle comme* 3 *à* 2, *& la somme des quarrés*

des Elemens du trapezoïde paralelles à la base AE, *sera au quarré de la base* AD *du rectangle multiplié par la hauteur* DC, *comme* 7 *à* 3.

DÉMONSTRATION.

Les Elemens du rectangle sont entr'eux comme les égaux R. R. R, &c. & ceux du triangle comme les premieres puissances o. *a*. *b*. *c*. *d*, &c. R. Ajoûtant donc les uns aux autres, nous aurons une suite composée de deux suites dont la premiere étant celle des égaux, vaut AR ; & la seconde étant celle des premieres puissances, vaut $\frac{1}{2}$AR. Ainsi cette somme vaut $\frac{3}{2}$AR, ou trois moitiés du dernier terme R de l'une des deux multiplié par le nombre des termes ; donc les Elemens du trapezoïde sont à la base AD multipliée par la hauteur DC, comme 3 est à 2.

Somme.	*Quarrés.*
R + o.	RR + o + o.
R + *a*.	RR + 2*a*R + *aa*.
R + *b*.	RR + 2*b*R + *bb*.
R + *c*.	RR + 2*c*R + *cc*.
&c.	&c.
R + R.	RR + 2RR + RR.
AR + $\frac{1}{2}$ AR = $\frac{3}{2}$ AR	AR² + $\frac{2}{2}$ ARR + $\frac{1}{3}$ ARR = $\frac{7}{3}$ AR².

Maintenant faisant les quarrés des termes de la somme, nous aurons une suite composée de trois autres, dont la premiere vaut AR², la seconde $\frac{2}{2}$ AR², & la troisiéme $\frac{1}{3}$ AR² ; & par conséquent la suite vaut AR² + $\frac{2}{2}$ AR² + $\frac{1}{3}$ AR² = $\frac{7}{3}$ AR² ; c'est-à-dire que cette suite est au quarré du dernier terme de l'une ou de l'autre des Suites ajoûtées, multiplié par le nombre des termes comme 7 à 3 ; donc les quarrés des Elemens du trapezoïde, c'est-à-dire la Figure CRSBAPHE (*Fig.* 65.) est au quarré ADZX de la base du rectangle multiplié par la hauteur AB, comme 7 à 3. Ce qui se voit même par l'inspection de la Figure qui est composée du Paralellepipede ZB, du demi-Prisme RSPMZX du demi-Prisme QZDECR, & de la Pyramide QHMZR.

COROLLAIRE.

144. Comme la somme des deux bases DA, DE du rectangle & du triangle est double de la base du rectangle, & que le quarré de cette somme est par conséquent quadruple du quarré de la base du rectangle, il s'ensuit que la Figure CRSBAPHE est au quarré de la somme des bases multiplié par la hauteur AB, comme 7 à quatre fois 3, ou comme 7 à 12.

REMARQUE.

145. Nous supposerons toujours dans ce Chapitre que les derniers termes, c'est-à-dire les bases des figures ajoutées sont égales, parce que si elles étoient inégales les rapports changeroient. Mais si on veut sçavoir ce qu'on doit faire en ce cas, le voici. Supposons donc que la base DE du triangle DCE soit moindre ou plus grande que la base AD du rectangle. Nous appellerons toujours les Elemens du rectangle R. R. R, &c. & ceux du triangle o. *a*. *b*. *c*. *d*, &c. mais au lieu du dernier terme R, nous mettrons *r*, & faisant le calcul à l'ordinaire, nous trouverons $AR + \frac{1}{2} Ar$ qui est le rapport du trapezoïde; & ce rapport signifie que le trapezoïde est égal à la base R du rectangle multipliée par la hauteur AB, plus la moitié de la base *r* du triangle multipliée par la même hauteur.

$R + o$.	$RR + oR + oo$.
$R + a$.	$RR + 2aR + aa$.
$R + b$.	$RR + 2bR + bb$.
$R + c$.	$RR + 2cR + cc$.
&c.	&c.
$R + r$.	$RR + 2rR + rr$.
$AR + \frac{1}{2} Ar$.	$ARR + \frac{2}{2} ArR + \frac{1}{3} Arr$.

Et pour le solide fait par les quarrés des Elemens du trapezoïde, son rapport $ARR + \frac{2}{2} ArR + \frac{1}{3} Ar^2$, marquera que ce solide est égal au quarré de la base du rectangle multiplié par sa hauteur AB, plus la moitié de deux rectangles faits sous les bases inégales multipliés par la même hauteur, plus le tiers du quarré de la base du triangle multiplié par la hauteur.

PROPOSITION LV.

146. *Si l'on ajoûte une demi-Parabole quarrée.* ABC *à un rec-*

tangle ADCE *de même base & de même hauteur* (Fig. 66.) *la somme sera au rectangle comme* 5 *à* 3, *& les quarrés des Elemens de cette somme paralelles à la base* BD, *seront au quarré de la base* AD *du rectangle multiplié par la hauteur* AC, *comme* 17 *à* 6.

DEMONSTRATION.

Les Elemens du rectangle sont comme les égaux R. R. R, &c. & ceux de la Parabole comme les racines quarrées o. $a^{\frac{1}{2}}$. $b^{\frac{1}{2}}$. $c^{\frac{1}{2}}$. $d^{\frac{1}{2}}$, &c. R. Ainsi leur somme est $AR + \frac{2}{3} AR = \frac{5}{3} AR$, c'est-à-dire $\frac{5}{3}$ du rectangle.

Et faisant les quarrés des Elemens de cette somme, nous trouverons que leur rapport est $AR^2 + \frac{4}{3} AR^2 + \frac{1}{2} AR^2 = \frac{17}{6} AR^2$; & par conséquent la somme de ces quarrés est au quarré de la base du rectangle multiplié par sa hauteur comme 17 à 6.

$R + o$.	$RR + 2oR + o$.
$R + a^{\frac{1}{2}}$	$RR + 2a^{\frac{1}{2}}R + a$.
$R + b^{\frac{1}{2}}$	$RR + 2b^{\frac{1}{2}}R + b$.
$R + c^{\frac{1}{2}}$	$RR + 2c^{\frac{1}{2}}R + c$.
&c.	&c.
$R + R$	$RR + 2RR + RR$.
$AR + \frac{2}{3} AR = \frac{5}{3} AR$.	$AR^2 + \frac{4}{3} AR^2 + \frac{1}{2} AR^2 = \frac{17}{6} AR^2$.

COROLLAIRE.

147. Si la demi-Parabole étoit du second genre, du troisiéme, &c. la somme seroit au rectangle comme 7 à 4, comme 9 à 5, &c. & la somme des quarrés seroit au quarré de la base du rectangle multiplié par la hauteur comme 31 à 10, comme 49 à 15, &c. & ainsi des autres.

PROPOSITION LVI.

148. *Si l'on ajoûte un complement* BAC *de Parabole cubique à un rectangle* ACED (Fig. 67.) *la somme sera au rectangle comme* 5 *à* 4; *& les quarrés de la somme seront au quarré de la base* AD *du rectangle multiplié par la hauteur* DE, *comme* 23 *à* 14.

DEMONSTRATION.

Les Elemens du rectangle paralelles à BD, R^3. R^3, &c. étant ajoûtés à ceux du complement o. a^3. b^3. c^3, &c. R^3, donnent une somme qui vaut $\frac{5}{4}$ AR^3. Donc la somme est à la base du rectangle multipliée par la hauteur comme 5 à 4.

Et faisant les quarrés des Elemens de la somme, leur valeur est comme on voit ici $\frac{23}{14}$ AR^6. Donc ces quarrés sont à celui de la base AD du rectangle multiplié par la hauteur DE, comme 23 à 14.

$R^3 + o.$	$R^6 + oR^3 + o.$
$R^3 + a^3.$	$R^6 + 2a^3R^3 + a^6.$
$R^3 + b^3.$	$R^6 + 2b^3R^3 + b^3.$
$R^3 + c^3.$	$R^6 + 2c^3R^3 + c^6.$
&c.	&c.
$R^3 + R^3.$	$R^6 + 2R^3R^3 + R^6.$
$AR^3 + \frac{1}{4}AR^3 = \frac{5}{4}AR^3.$	$AR^6 + \frac{2}{4}AR^6 + \frac{1}{7}AR^6 = \frac{23}{14}AR^6.$

COROLLAIRE.

149. Et si le complement appartenoit à une Parabole du premier genre, ou du troisiéme, &c. on trouveroit de la même façon le rapport de la somme, & celui du solide formé par ses quarrés.

PROPOSITION LVII.

150. *Si l'on ajoûte une demi-Parabole quarrée* ABC *à un triangle* ADC *de même hauteur & de même base*, (Fig. 68.) *la somme sera à la base* AD *multipliée par la hauteur* AC, *comme* 7 *à* 6; *& les quarrés des Elemens de cette somme paralelles à* BD, *seront au quarré de la base* AD *multiplié par la hauteur* AC, *comme* 49 *à* 30.

DEMONSTRATION.

Les Elemens de la demi-Parabole o. $a^{\frac{1}{2}}$. $b^{\frac{1}{2}}$. $c^{\frac{1}{2}}$, &c. & étant ajoûtés à ceux du triangle o. a. b. c. d, &c. donnent une somme dont le rapport est $\frac{7}{6}$ AR. Donc la somme est au dernier terme ou à la base AD du triangle multipliée par la hauteur AC, comme 7 à 6.

Et faisant les quarrés des Elemens de cette somme, leur rapport est $\frac{49}{30}AR^2$. Donc le solide fait par ces quarrés, est au quarré de la base AD multiplié par la hauteur AC, comme 49 à 30.

$0 + 0$	$0 + 0 + 0.$
$a^{\frac{1}{2}} + a.$	$a + 2a^{\frac{3}{2}} + aa.$
$b^{\frac{1}{2}} + b.$	$b + 2b^{\frac{3}{2}} + bb.$
$c^{\frac{1}{2}} + c.$	$c + 2c^{\frac{3}{2}} + cc.$
&c.	&c.
$R + R.$	$RR + 2R \times R + RR.$
$\frac{2}{3}AR + \frac{1}{2}AR = \frac{7}{6}AR.$	$\frac{1}{2}AR^2 + \frac{4}{5}AR^2 + \frac{1}{3}AR^2 = \frac{49}{30}AR^2.$

Et par un semblable calcul, on trouvera le rapport de la somme & du solide quand la Parabole sera du second genre, du troisiéme, &c.

PROPOSITION LVIII.

151. *Si l'on ajoûte un complement* ABC *de Parabole quarrée* (Fig. 69.) *à un triangle* ADC *de même base & de même hauteur, la somme sera au rectangle de la base* AD *du triangle par sa hauteur* AC, *comme* 5 *à* 6. *Et les quarrés de ses Elemens paralelles à* DB *seront au quarré de la même base multiplié par la hauteur* AC, *comme* 62 *à* 60, *ou comme* 31 *à* 30. (Fig. 69.)

DEMONSTRATION.

Les Elemens du complement sont comme $0.\ a^2.\ b^2.\ c^2.\ d^2$, &c. R^2, & ceux du triangle comme $0.\ a,\ b.\ c.\ d$, &c. RR. & le rapport de leur somme est comme $\frac{5}{6}AR^2$. Donc cette somme est à la base AD multipliée par la hauteur AC, comme 5 à 6.

Et faisant les quarrés des Elemens de la somme, leur rapport est $\frac{62}{60}AR^4$. Donc ces quarrés sont à celui de la base AD multiplié par la hauteur AC comme 62 à 60, ou 31 à 30.

$0 + 0$,

$o + o.$	$o + o + o.$
$a^2 + a.$	$a^4 + 2a^3 + aa.$
$b^2 + b.$	$b^4 + 2b^3 + bb.$
$c^2 + c.$	$c^4 + 2c^3 + cc.$
&c.	&c.
$R^2 + R^2.$	$R^4 + 2R^2R^2 + R^4.$
$\frac{1}{3}AR^2 + \frac{1}{2}AR^2 = \frac{5}{6}AR^2.$	$\frac{1}{5}AR^4 + \frac{2}{4}AR^4 + \frac{1}{3}AR^4 = \frac{62}{60}AR^4.$

Et par un semblable calcul on trouvera le rapport de la somme & du solide, quand le complement appartiendra à une Parabole du second genre, du troisiéme, &c.

PROPOSITION LIX.

152. *Si l'on ajoûte une demi-Parabole* ABC *du premier genre à son complement* ADC (Fig. 70.) *la somme sera à la base* AB *de la demi-Parabole multipliée par la hauteur comme* 1 *à* 1. *Et les quarrés des Elemens de cette somme seront au quarré de la base* AB *mnltiplié par la hauteur* AC *comme* 89 *à* 70.

DEMONSTRATION.

Les Elemens de la demi-Parabole sont comme o. $a^{\frac{1}{2}}$. $b^{\frac{1}{2}}$. $c^{\frac{1}{2}}$, &c. RR, & ceux du complement comme o. a^2. b^2. c^2, &c. RR, & le rapport de leur somme est AR^2. Donc cette somme est à la base AB multipliée par la hauteur AC, comme 1 à 1.

Et faisant les quarrés des Elemens de cette somme, leur rapport est $\frac{89}{70}AR^4$. Donc ces quarrés sont au quarré de la base AB multiplié par la hauteur AC, comme 89 à 70.

$o + o.$	$o.$
$a^{\frac{1}{2}} + a^2.$	$a + 2a^{\frac{5}{2}} + a^4.$
$b^{\frac{1}{2}} + b^2.$	$b + 2b^{\frac{5}{2}} + b^4.$
$c^{\frac{1}{2}} + c^2.$	$c + 2c^{\frac{5}{2}} + c^4.$
&c.	&c.
RR RR.	$R^4 + 2R^2R^2 + R^4.$
$\frac{2}{3}AR^2 + \frac{1}{3}AR^2 = AR^2.$	$\frac{1}{2}AR^4 + \frac{4}{7}AR^4 + \frac{1}{5}AR^4 = \frac{89}{70}AR^4.$

Et par un semblable calcul, on trouvera le rapport de la somme & du solide quand la Parabole sera du second genre, du troisiéme, &c.

PROPOSITION LX.

153. *L'Hyperboloïde décrit par la circonvolution d'une demi-hyperbole* GBC *autour de son axe* (Fig. 71. 72.) *est à sa base multipliée par sa hauteur* GB *comme la moitié du premier axe* BH, *plus le tiers de l'abscisse* BG *à la somme du premier axe* BH *& de l'abscisse* BG.

DEMONSTRATION.

Par la nature de l'hyperbole, les quarrés de ses Elemens ordonnés à l'axe sont entr'eux comme les rectangles HD × DB, HE × EB, HF × FB, &c. Or le rectangle HD × DB, est égal au rectangle HB × BD plus le quarré de DB, le rectangle HE × EB, est égal au rectangle HB × BE plus le quarré de BE; le rectangle HF × FB, est égal au rectangle HB × BF plus le quarré de BF, & ainsi de suite. Donc les quarrés des Elemens sont entr'eux comme la suite $HB \times BD + \overline{BD}^2$, $HB \times EB + \overline{EB}^2$, $HB \times FB + \overline{FB}^2$, &c. laquelle est composée de deux autres suites dont la premiere est une suite de rectangles qui ayant tous la même hauteur, sont entr'eux comme leurs bases BD, BE, BF, &c. ou comme les premieres puissances o. a. b. c. d, &c. R; & la seconde est celle des quarrés qui sont comme o. a^2. b^2. c^2. d^2, &c. Supposant donc que les deux derniers termes soient égaux, & par conséquent HB = BG, & prenant pour les rectangles la suite oR, aR, bR, &c. RR, les quarrés des ordonnées seront entr'eux comme la suite oR + o. aR + a^2. bR + b^2, &c. dont le rapport est $\frac{1}{2}AR^2 + \frac{1}{3}AR^2$. Donc les quarrés des ordonnées sont au plus grand $\overline{GC}^2$ multiplié par le nombre des termes BG, comme $\frac{1}{2}AR^2 + \frac{1}{3}AR^2$ est à $AR^2 + AR^2$, ou comme $\frac{1}{2}R + \frac{1}{3}R$ est à $R + R$, c'est-à-dire comme la moitié de l'axe HB plus le tiers de l'abscisse BG à la somme HB + BG de l'axe & de l'abscisse.

$$\begin{array}{l} oR + o. \\ aR + a^2. \\ bR + b^2. \\ cR + c^2. \\ \&c. \\ R^2 + R^2. \\ \hline \frac{1}{2}AR^2 + \frac{1}{3}AR^2. \end{array}$$

Or les Elemens en tournant autour de BG décrivent des cercles qui sont entr'eux comme les quarrés de ces Elemens; donc la somme de ces cercles ou l'Hyperboloïde est à sa base multipliée par le nombre des termes comme la moitié de l'axe plus le tiers de l'abscisse est à la somme de l'axe & de l'abscisse.

COROLLAIRE I.

154. Quand l'axe BH est égal à l'abscisse BG, la somme des cercles ou l'Hyperboloïde est à sa base multipliée par la hauteur, comme $\frac{5}{6}$ HB est à HB + BG. Car HB étant égal à BG, on a $\frac{1}{2}R + \frac{1}{3}R = \frac{5}{6}R = \frac{5}{6}HB$, ou $\frac{5}{6}BG$.

COROLLAIRE. II.

155. Lorsque l'axe BH est plus grand ou moindre que l'abscisse BG, on prendra pour l'expression des rectangles qui ont même hauteur la suite or. ar. br. cr, &c. rR, ou la lettre r marque la hauteur commune BH, mais pour le dernier terme on prendra rR, c'est-à-dire l'xae BH $= r$ multiplié par R, c'est-à-dire par BG, parce que le dernier de ces rectangles est en effet rR, ou BH $\times$ BG, & pour l'expression des quarrés on prendra o. a^2. b^2. c^2, &c. R^2. Ainsi les quarrés des Elemens seront comme $or + o$. $ar + a^2$. $br + r^2$, &c. $rR + R^2$, dont le rapport sera $\frac{1}{2}ArR + \frac{1}{3}AR^2$, & par conséquent les quarrés des Elemens seront au plus grand multiplié par le nombre des termes comme $\frac{1}{2}ArR + \frac{1}{3}AR^2$ est à $ArR + AR^2$, ou bien en divisant par AR, comme $\frac{1}{2}r + \frac{1}{3}R$ est à $r + R$, c'est-à-dire comme $\frac{1}{2}$HB $+ \frac{1}{3}$BG est à HB + BG de même que ci-dessus.

$$\begin{array}{l} or + o. \\ ar + a^2. \\ br + b^2. \\ cr + c^2. \\ \&c. \\ rR + R^2. \\ \hline \frac{1}{2}ArR + \frac{1}{3}AR^2. \end{array}$$

COROLLAIRE III.

156. Puisque les quarrés des Elemens sont entr'eux comme la suite $oR + o$. $aR + a^2$. $bR + b^2$. $cR + c^2$, &c. $RR + R^2$, ou comme $or + o$. $ar + a^2$. $br + b^2$. $cr + c^2$, &c. $rR + R^2$, il s'ensuit que les racines de ces quarrés, c'est-à-dire les Ele-

mens ſont entr'eux comme la ſuite $\sqrt{oR+o}$, $\sqrt{aR+a^2}$, $\sqrt{bR+b^2}$, $\sqrt{cR+c^2}$, &c. $\sqrt{R^2+R^2}$, ou comme la ſuite $\sqrt{or+o}$, $\sqrt{ar+a^2}$, $\sqrt{br+b^2}$, $\sqrt{cr+c^2}$, &c. $\sqrt{rR+R^2}$. Ainſi ſi on pouvoit trouver le rapport de ces racines, la quadrature de l'hyperbole ſeroit trouvée, mais c'eſt à quoi on n'eſt point encore parvenu.

CHAPITRE VIII.

Des Suites qui ſe multiplient d'une maniere inverſe.

PROPOSITION LXI.

157. *SI l'on multiplie les termes d'une ſuite par ſes même termes ou par les termes d'une autre, d'une maniere inverſe, c'eſt-à-dire, en multipliant le premier terme de l'une par le dernier terme de l'autre; le ſecond par le penultiéme, & ainſi de ſuite, le produit aura un rapport qu'on pourra connoître, à moins que les termes de ce produit ne ſoient des racines compoſées de deux termes retranchés l'un de l'autre.*

DEMONSTRATION.

Soient les termes de la ſuite des premieres puiſſances o. a. b. c. d, &c. R à multiplier par ces mêmes termes pris d'une maniere inverſe; la ſuite de ces termes, en commençant par le dernier, ſera R — o, R — a, R — b, R — c, &c. R — R. ce qui eſt évident; car ces termes ayant toujours la même différence, le penultiéme ſera égal au dernier moins la différence, c'eſt-à-dire R — a, l'antipenultiéme ſera égal au dernier moins deux fois la différence, c'eſt-à-dire, R — $2a$ ou R — b, parce que b eſt égal à $2a$, & ainſi de ſuite. Multipliant donc les termes de la ſuite directe par les termes de l'inverſe, le produit ſera la ſuite oR, aR — aa, bR — bb, cR — cc, dR — dd, &c. RR—RR compoſée de deux ſuites, dont la premiere étant celle des premieres puiſſances, vaut $\frac{1}{2}$ AR², & la ſeconde étant celle des quarrés, vaut — $\frac{1}{3}$ AR², parce

oR
aR — aa.
bR — bb.
cR — cc.
dd — dd.
&c.
RR — RR.

$\frac{1}{2}AR^2. - \frac{1}{3}AR^2. = \frac{1}{6}AR^2.$

qu'elle eſt négative. Donc le produit ſera $\frac{1}{2}$ AR². — $\frac{1}{3}$ AR². = $\frac{1}{6}$ AR², & par conſéquent ſon rapport au dernier terme multiplié par le nombre des termes ſera comme 1 à 6.

Soient auſſi les termes de la ſuite des ſecondes puiſſances o. $a^2. b^2. c^2. d^2$, &c. R². à multiplier par ces mêmes termes pris d'une maniere inverſe. Les termes de cette ſuite étant les quarrés de la ſuite o. *a. b. c. d*, &c. R, ces termes pris inverſement ſeront par conſéquent les quarrés de R — o, R — *a*, R — *b*, R — *c*, &c. R — R, ou les quarrés de la ſuite inverſe des premieres puiſſances. Ainſi ces quarrés ſeront RR — o + o, RR — 2*a*R + *aa*, RR — 2*b*R + *bb*, RR — 2*c*R + *cc*, &c. RR — 2RR + RR. Multipliant donc les termes de la ſuite directe par ceux de l'inverſe, le

$$\begin{array}{lll}
o\mathrm{RR} - & o + & o. \\
aa\mathrm{RR} - & 2a^3\mathrm{R} + & a^4. \\
bb\mathrm{RR}. - & 2b^3\mathrm{R} + & b^4. \\
cc\mathrm{RR} - & 2c^3\mathrm{R} + & c^4. \\
dd\mathrm{RR} - & 2d^3\mathrm{R} + & d^4. \\
\&c. & & \\
\mathrm{R}^4. - & 2\mathrm{R}^2\mathrm{R}^2. + & \mathrm{R}^4. \\
\hline
\end{array}$$

$$\tfrac{1}{3}\,\mathrm{AR}^4. - \tfrac{2}{4}\,\mathrm{AR}^4. + \tfrac{1}{5}\,\mathrm{AR}^4. = \tfrac{1}{30}\,\mathrm{AR}^4.$$

produit ſera compoſé de trois ſuites, dont la premiere vaut $\frac{1}{3}$ AR⁴, la ſeconde qui eſt négative, vaut — $\frac{2}{4}$ AR⁴, & la troiſiéme $\frac{1}{5}$ AR⁴. Donc ce produit vaudra $\frac{1}{3}$ AR⁴. — $\frac{2}{4}$ AR⁴. + $\frac{1}{5}$ AR⁴. = $\frac{1}{30}$ AR⁴, & par conſéquent ſon rapport au dernier terme R⁴. multiplié par le nombre des termes, eſt comme 1 à 30.

Soient encore la ſuite des premieres puiſſances o. *a. b. c. d*, &c. RR à multiplier par la ſuite des quarrés pris inverſement, ou par RR — o + o, RR — 2*a*R — *aa*, RR — 2*b*R — *bb*, &c. RR — 2RR + RR, le produit, comme on voit ici, ſera $\frac{1}{2}$ AR⁴. — $\frac{2}{3}$ AR⁴. + $\frac{1}{4}$ AR⁴. = $\frac{1}{12}$ AR⁴, & par conſéquent ſon rapport au dernier terme multiplié par le nombre des termes, ſera comme 1 à 12.

$$\begin{array}{lll}
o\mathrm{RR} - & o + & o. \\
a\mathrm{RR} - & 2a^2\mathrm{R}^2 + & a^3. \\
b\mathrm{RR} - & 2b^2\mathrm{R}^2 + & b^3. \\
c\mathrm{RR} - & 2c^2\mathrm{R}^2 + & c^3. \\
\&c. & & \\
\mathrm{R}^4. - & 2\mathrm{R}^3\mathrm{R} + & \mathrm{R}^2\mathrm{R}^2. \\
\hline
\end{array}$$

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{AR}^4. - \tfrac{2}{3}\,\mathrm{AR}^4. + \tfrac{1}{4}\,\mathrm{AR}^4. = \tfrac{1}{12}\,\mathrm{AR}^4.$$

Dans ce produit j'appelle — 2R³. le dernier terme de la ſuite

$-2a^2. -2b^2. -2c^2$, &c. parce que ces termes ſont les produits des termes de la ſuite des premieres puiſſances o. a. b. c, &c. dont le dernier terme eſt R^2, par les termes $-2o -2a -2b -2c$, &c. de la ſuite inverſe des quarrés, deſquels termes le dernier eſt $-2R$. C'eſt pourquoi R^2. multiplié par $-2R$, fait $-2R^3$. & ceci fera comprendre pourquoi j'appelle R^2R^2 le dernier terme de la ſuite $a^3. b^3. c^3$, &c.

Soient encore la ſuite o. $a^{\frac{1}{2}}. b^{\frac{1}{2}}. c^{\frac{1}{2}}$, &c. R à multiplier par la ſuite inverſe des premieres puiſſances, c'eſt-à-dire, par R—o, R—a, R—b, &c. R—R le ptoduit vaut $\frac{2}{3}AR^2. - \frac{2}{5}AR^2. = \frac{4}{15}AR^2$. & par conſéquent ce produit eſt à ſon dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme 4 à 15, & ainſi des autres.

$$
\begin{array}{l}
oR - o. \\
a^{\frac{1}{2}}R - a^{\frac{3}{2}}. \\
b^{\frac{1}{2}}R - b^{\frac{3}{2}}. \\
c^{\frac{1}{2}}R - c^{\frac{3}{2}}. \\
\text{\&c.} \\
RR - RR. \\
\hline
\frac{2}{3}ARR - \frac{2}{5}ARR = \frac{4}{15}AR^2.
\end{array}
$$

Mais ſi l'on demandoit de multiplier, par exemple, les termes des premieres puiſſances o. a. b. c. d, &c. R par les termes de la ſuite o. $a^{\frac{1}{2}}$. $b^{\frac{1}{2}}$. $c^{\frac{1}{2}}$, &c. R pris inverſement. Alors cette ſeconde ſuite étant compoſée des racines quarrées de la ſuite o. a. b. c. d, &c. R, ſes termes pris inverſement ſeroient les racines quarrées des termes des premieres puiſſances pris inverſement, & par conſéquent ils ſeroient $\sqrt{R-o}$, $\sqrt{R-a}$, $\sqrt{R-b}$, $\sqrt{R-c}$, &c. $\sqrt{R-R}$, ainſi le produit des deux ſuites ſeroit $o\sqrt{R-o}$, $a\sqrt{R-a}$, $b\sqrt{R-b}$, &c. $R\sqrt{R-R}$, & comme ces racines ne ſont pas des racines d'une puiſſance des nombres o. 1. 2. 3. 4, &c. on ne pourroit pas en connoître les rapports par les regles que nous avons données juſqu'ici. Nous découvrirons dans la ſuite par d'autres voyes le rapport de quelques-unes de ces ſuites de racines compoſées de deux termes, & nous ferons voir pourquoi il s'en trouve beaucoup dont on ne ſçauroit connoitre les rapports.

APPLICATION À LA GEOMETRIE.

PROPOSITION LXII.

158. *La Sphere est à son grand cercle multiplié par le diametre, ou au Cylindre circonscrit comme 2 à 3.*

DEMONSTRATION.

Soit le demi-cercle APB, (*Fig.* 73.) dont le diametre AB soit coupé en parties infiniment petites qui seront ses Elemens, & de chacun de ces Elemens soient élevées les perpendiculaires CI, DO, EP, &c. qui seront les Elemens du demi-cercle. Par la proprieté du cercle les quarrés des Elemens CI, DO, EP, &c. sont égaux aux rectangles des parties du diametre qu'elles coupent, c'est-à-dire, $\overline{CI}^2 = AC \times CB$, $\overline{DO}^2 = AD \times DB$, &c. & ainsi des autres. Or les parties du diametre prises du côté de A, c'est-à-dire, les parties AC, AD, AE, &c. sont comme la suite o. *a. b. c. d*, &c. R & les parties prises du côté de B, c'est-à-dire, les parties CB; DB, EB, &c. sont comme la suite R—o, R—*a*, R—*b*, R—*c*, &c. R—R; ou comme les termes de la suite o. *a. b. c*, &c. pris inversement. Ainsi multipliant ces deux suites l'une par l'autre, nous aurons la suite oR—R, *a*R—*aa*, *b*R—*bb*, *c*R—*cc*, &c. RR—RR, qui sera une suite de rectangles égaux aux quarrés des Elemens du demi-cercle, chacun à chacun. Or par la Proposition précédente, cette suite vaut $\frac{1}{2}$ ARR—$\frac{1}{3}$ARR = $\frac{1}{6}$ ARR, donc les quarrés des Elemens du demi-cercle, valent aussi $\frac{1}{6}$ ARR; c'est-à-dire, la somme de ces quarrés est au quarré RR du diametre multiplié par le nombre des termes AB, comme 1 à 6, mais le nombre des termes est égal au diametre, donc les quarrés des Elemens sont au quarré du diametre multiplié par le diametre, c'est-à-dire au cube du diametre, comme 1 à 6. Or le quarré du diametre est quadruple du quarré du rayon, donc la somme des quarrés est au quarré du rayon ou au plus grand quarré multiplié par le diametre, comme 4 à 6, ou comme 2 à 3.

Mais le demi-cercle tournant autour de son diametre produit la Sphere, & ses Elemens produisent des cercles qui sont entr'eux comme les quarrés des Elemens, donc la somme de ces

cercles où la Sphere est au cercle du rayon TS, c'est-à-dire, au grand cercle multiplié par le diametre, comme 2 est à 3. Et comme le grand cercle multiplié par le diametre est égal au Cylindre circonscrit, la Sphere est donc au Cylindre circonscrit, comme 2 à 3.

COROLLAIRE.

158. Puisque la suite oR—o, aR—aa, bR—bb, cR—cc; &c. RR—RR, est égale aux quarrés des Elemens, tirant la racine quarrée, il s'ensuit que la suite $\sqrt{oR-o}$, $\sqrt{aR-aa}$, $\sqrt{bR-bb}$, $\sqrt{cR-cc}$, &c. $\sqrt{RR-RR}$, est égale à la somme des Elemens. Donc si on pouvoit trouver les rapports de cette suite, la quadrature du cercle seroit trouvée.

Nous parlerons plus au long du cercle & de la Sphere au chapitre suivant.

PROPOSITION LXIII.

159. *Si l'on multiplie les Elemens d'un triangle* ABC (Fig. 74.) *pour les Elemens d'un autre triangle* ABD, *de même base & de même hauteur pris inversement, le produit qui en sera formé sera au quarré de l'une ou de l'autre base* AC *ou* BD *multipliée par la hauteur* BA, *comme* 1 *à* 6.

DEMONSTRATION.

Les Elemens du triangle pris directement sont comme o. a. b. c. d, &c. R, & les Elemens du même triangle ou d'un triangle égal pris inversement, sont comme R—o, R—a, R—b, R—c, &c. R—R. Multipliant donc les uns par les autres le produit est comme la suite oR—o, aR—aa, bR—bb, cR—cc, &c. RR—RR. Or le rapport de cette suite par les deux Propositions précédentes, est $\frac{1}{6}$ AR². donc le solide formé par le produit de ces Elemens, est au quarré de l'une ou de l'autre base multiplié par BA comme 1 à 6.

COROLLAIRE I.

160. Si l'on prend des moyennes proportionnelles entre les Elemens d'un triangle pris directement, & les mêmes Elemens pris inversement, & que la hauteur BC soit égale à la base CD ou AB, (*Fig.* 75.) ces moyennes proportionnelles seront égales aux Elemens d'un demi-cercle qui auroit pour diametre la hauteur BC

BC du triangle. Car les quarrés de ces moyennes proportionnelles feroient égaux au rectangle des Elemens multipliés les uns par les autres, & ces rectangles sont comme la suite oR — o, aR — aa, bR — bb, &c. ou comme la suite des rectangles égaux aux quarrés des Elemens d'un demi-cercle. (*N.* 157.) Donc, &c.

COROLLAIRE II.

161. Si les deux triangles ont les bases inégales, alors au lieu du quarré de la base de l'un des deux, il faut prendre le rectangle des deux bases, & dire que le solide fait par le produit des Elemens du premier triangle pris directement & par les Elemens du second pris inversement, est au rectangle des deux bases multiplié par la hauteur toujours comme 1 à 6. Et pour le prouver, supposons que les Elemens du second triangle soient doubles des Elemens du premier, si nous appellons ceux du premier o. a. b, c. d, &c. R, ceux du second seront o. $2a$, $2b$, $2c$, &c. 2R, & ces Elemens pris inversement, seront 2R — o, 2R — $2a$, 2R — $2b$, 2R — $2c$, &c. 2R — 2R, & multipliant les Elemens du premier par ceux-ci, le produit sera 2Ro — o, $2a$R — $2aa$, $2b$R — $2bb$, $2cr$ — $2cc$, &c. 2RR — 2RR, dont le rapport est $\frac{2}{6}$ RR. ainsi le produit des Elemens est au quarré de la base du premier triangle multipliée par le nombre des termes, comme 2 à 6. Mais le rectangle des deux bases est double du quarré de la premiere, donc le produit des Elemens est au rectangle des deux bases, comme 2 à 12, ou comme 1 à 6; & en effet, si au lieu d'appeller 2R le dernier terme du second triangle, nous l'appellons r, substituant cette valeur dans le rapport $\frac{2RR}{6}$ nous aurons $\frac{1}{6}r$R.

2R — o.
$2a$R — $2aa$.
$2b$R — $2bb$.
$2c$R — $2cc$.
&c.
2RR — 2RR.

$\frac{2}{2}$ ARR — $\frac{2}{3}$ ARR = $\frac{2}{6}$ ARR = $\frac{1}{6}$ ArR.

PROPOSITION XLIV.

162. *Le Spheroïde allongé est au cercle qui a pour rayon le demi petit axe, multiplié par le grand axe, c'est-à-dire au Cylindre circonf-*

crit, comme 2 à 3, & le Spheroïde applati est au cercle qui a pour rayon le grand axe, multiplié par le petit axe comme 2. à 3.

DEMONSTRATION.

Soit la demi-Ellipse FAB (*Fig.* 77.) dont le grand axe soit FB, & le petit axe AC; soit divisé le grand axe en ses Elemens, & sur chacun des Elemens soient élevées des perpendiculaires, qui seront les ordonnées à cet axe, & en même tems les Elemens de la demi-Ellipse. Par la nature de l'Ellipse les Elemens de cette demi-Ellipse sont entr'eux comme les Elemens d'un demi-cercle qui auroit pour diametre le grand axe. Donc les quarrés ou les cercles décrits par ces Elemens sont entr'eux comme les quarrés ou les cercles des Elemens du demi-cercle. Mais les cercles décrits par les Elemens du demi-cercle, sont au plus grand multiplié par le nombre des termes, comme 2 à 3. Donc le spheroïde ou les cercles décrits par les Elemens de la demi-Ellipse, sont au plus grand ou au cercle décrit par le demi petit axe AO, multiplié par le grand axe FB, comme 2 à 3.

Et on prouvera de la même façon que les cercles décrits par les Elemens de la demi-Ellipse HAB ordonnés au petit axe HB, (*Fig.* 76.) sont au plus grand ou au cercle décrit par le demi grand axe AO, multiplié par le petit axe HB, comme 2 à 3, les Elemens de cette demi-Ellipse étant entr'eux comme ceux d'un demi cercle qui auroit pour diametre le petit axe. Donc, &c.

COROLLAIRE.

163. Deux triangles de même base étant donnés, mais dont la hauteur commune AC est plus grande que l'une ou l'autre base, (*Fig.* 78.) si l'on prend des moyennes proportionnelles entre les Elemens de l'un pris directement, & les Elemens de l'autre pris inversement, ces moyennes proportionnelles formeront une demi Ellipse, dont l'axe auquel elles seront ordonnées sera la hauteur AC, & l'autre axe sera égal à la moitié de la base AB ou CD. Car les deux Elemens des triangles qui se trouveront précisement au milieu des triangles seront égaux, & par conséquent la moyenne proportionnelle OH sera encore égale à l'un ou à l'autre de ces Elemens, ou à la moitié de la base AB ou CD, & par conséquent elle sera ou moindre ou plus grande que la moitié de la hauteur AC. Donc les moyennes proportionelles au lieu de former un demi cercle, comme dans la proposition

précédente, formeront une Ellipse dont la hauteur AC sera l'axe auquel seront ordonnées les moyennes proportionelles. Et OH sera la moitié de l'autre ; & par conséquent le double de OH, c'est-à-dire la base AB ou la base CD sera l'autre axe.

PROPOSITION LXV.

164. *Si l'on multiplie les Elemens d'une demi-Parabole* ABC *du premier genre, par les Elemens d'un triangle* ABD *de même base & de même hauteur pris inversement,* (Fig. 79.) *le solide produit sera au quarré de la base* BC *ou de la base* AD, *multiplié par la hauteur* AB, *comme 4 à 15.*

DEMONSTRATION.

Les Elemens de la demi-Parabole sont comme o. $a^{\frac{1}{2}}$. $b^{\frac{1}{2}}$. $c^{\frac{1}{2}}$, &c. R, & ceux du triangle pris inversement, sont comme R—o, R—a, R—b, &c. R—R, multipliant donc les uns par les autres, le produit est comme oR—o, $a^{\frac{1}{2}}$R—$a^{\frac{3}{2}}$, $b^{\frac{1}{2}}$R—$b^{\frac{3}{2}}$, &c. RR—RR; or le rapport de cette suite est $\frac{2}{3}$ARR — $\frac{2}{5}$ARR = $\frac{4}{15}$ARR, donc le produit des Elemens, est au quarré de la base BC ou AD multiplié par AB comme 4 à 15.

$$\begin{array}{l} oR - o. \\ a^{\frac{1}{2}}R - a^{\frac{3}{2}}. \\ b^{\frac{1}{2}}R - b^{\frac{3}{2}}. \\ c^{\frac{1}{2}}R - c^{\frac{3}{2}}. \\ \&c. \\ RR - RR. \\ \hline \frac{2}{3}ARR - \frac{2}{5}ARR = \frac{4}{15}ARR. \end{array}$$

COROLLAIRE I.

165. Et par un semblable calcul on trouvera le rapport du solide quand la Parabole sera du second genre, du troisiéme, &c.

COROLLAIRE II.

166. Et si la base du triangle étoit moindre ou plus grande que la base de la demi-Parabole. Alors au lieu du quarré de la base BC ou AD, il faudroit prendre le rectangle des deux bases, & dire que le produit des Elemens est à ce rectangle multiplié par la hauteur, comme 4 à 15. Car appellant le dernier Element

du triangle r, le rapport précédent se changeroit en celui-ci $\frac{3}{5}$ $ArR - \frac{1}{3} ArR = \frac{4}{15} ArR$.

PROPOSITION LXVI.

167. *Si l'on multiplie les Elemens d'un complement* ADB *de Parabole du premier genre, dont* B *est le sommet par les Elemens d'un triangle* ABC *de même base & de même hauteur* (Fig. 80.) *pris inversement, le produit sera au quarré de la base* BC *ou de la base* AD, *multiplié par la hauteur* AB *comme* 1 *à* 12.

DEMONSTRATION.

Les Elemens du complement sont comme o. a^2. b^2. c^2. d^2, &c. R^2. & ceux du triangle pris inversement comme $R^2 - o$, $R^2 - a$, $R^2 - b$, &c. $R^2 - R^2$. multipliant donc les uns par les autres le produit sera comme $oR^2 - o$, $a^2R^2 - a^3$, $b^2R^2 - b^3$, $c^2R^2 - c^3$, &c. $R^4 - R^4$. Or le rapport de cette suite est $\frac{1}{3} AR^4 - \frac{1}{4} AR^4 = \frac{1}{12} AR^4$. Donc le solide est au quarré de la base BC ou AD multiplié par la hauteur AB comme 1 à 12.

$oR^2 -$ o.
$a^2R^2 -$ a^3.
$b^2R^2 -$ b^3.
$c^2R^2 -$ c^3.
&c.
$R^4 - R^2R^2$.

$\frac{1}{3} AR^4 - \frac{1}{4} AR^4 = \frac{1}{12} AR^4$.

Et de la même façon on trouvera le rapport du solide, soit que le complement appartienne à une Parabole du second genre, du troisiéme, &c. ou que les bases soient inégales.

PROPOSITION LXVII.

168. *Si l'on multiplie les Elemens d'un complement* ABD *de demi-Parabole du premier genre, dont* B *est le sommet, par les mêmes Elemens pris d'une maniere inverse, le solide produit sera au quarré de la base* BC *multiplié par la hauteur* AB *comme* 1 *à* 30. (Fig. 81.)

DEMONSTRATION.

Les Elemens du complement sont comme o. a^2. b^2. c^2, &c.

R^2; & ces Elemens pris inversement étant les quarrés de la suite $R-0, R-a, R-b, R-c$, &c. $R-R$, sont comme $RR-0+0$, $RR-2aR+aa$, $RR-2bR+bb$, &c. $RR-2R^2+R^2$. Multipliant donc les uns par les autres, le produit est comme $0R^2.-0+0$, $aaR^2.-2a^3R+a^4$, &c. $R^4.-2R^2R^2.+R^4$, or le rapport de cette suite est $\frac{1}{3}AR^4.-\frac{2}{4}AR^4.+\frac{1}{5}AR^4.=\frac{1}{30}AR^4.$ donc le solide est au quarré de la base BC multiplié par la hauteur AB, comme 1 à 30.

$$\begin{array}{lll} 0RR- & 0+ & 0. \\ aaRR- & 2a^3R+ & a^4. \\ bbRR- & 2b^3R+ & b^4. \\ c^2RR- & 2c^3R+ & c^4. \\ \&c. & & \\ RR\times R^2.-2R^2R^2.+R^4. & & \end{array}$$

$$\frac{1}{3}AR^4.-\frac{2}{4}AR^4.+\frac{1}{5}AR^4.=\frac{1}{30}AR^4.$$

Et de la même façon on trouvera le rapport du solide lorsque le complement appartiendra à une Parabole du second genre, du troisiéme, &c. ou lorsque les bases seront inégales.

PROPOSITION LXVIII.

169. *Si l'on multiplie les Elemens d'une demi-Parabole quarrée* ABC, *dont* A *est le sommet par les Elemens de son complement* ADB *pris inversement*; (Fig. 82.) *le solide produit sera au quarré de la base* BC *ou* AD *multiplié par la hauteur* AB, *ou au cube de la base* BC, *parce qu'en ce cas* AB *est égal à* BC, *comme* 16 *à* 105.

DEMONSTRATION.

Les Elemens de la demi-Parabole sont comme $0.\ a^{\frac{1}{2}}.\ b^{\frac{1}{2}}.\ c^{\frac{1}{2}}$, &c. R^2. & ceux du complement pris d'une maniere inverse, comme $RR-0+0$, $RR-2aR+aa$, $RR-2bR+bb$, $RR-2cR+cc$, &c. $RR-2R^2+R^2$; multipliant donc les uns par les autres nous aurons un produit, dont le rapport est comme

$$\begin{array}{lll} 0RR- & 0.+ & 0. \\ a^{\frac{1}{2}}RR- & 2a^{\frac{3}{2}}R+ & a^{\frac{5}{2}}. \\ b^{\frac{1}{2}}RR- & 2b^{\frac{3}{2}}R+ & b^{\frac{5}{2}}. \\ c^{\frac{1}{2}}RR- & 2c^{\frac{3}{2}}R+ & c^{\frac{5}{2}}. \\ \&c. & & \\ R^4.-2R^2R^2.+R^2R^2. & & \end{array}$$

$$\frac{2}{3}AR^4.-\frac{4}{5}AR^4.+\frac{2}{7}AR^4.=\frac{16}{105}AR^4.$$

on voit ici, $\frac{2}{3} AR^4 - \frac{4}{5} AR^4 + \frac{2}{7} AR^4 = \frac{16}{105} AR^4$. Donc le ſolide eſt au quarré de la baſe multiplié par la hauteur, ou au cube de la baſe, comme 16 à 105.

Et par un ſemblable calcul on trouvera le rapport du ſolide quand la Parabole ſera du ſecond genre, du troiſiéme, &c.

REMARQUE.

170. On pourroit former à l'exemple de ces ſolides une infinité d'autres, dont il ſeroit également facile de trouver les rapports; par exemple, on pourroit multiplier les Elemens d'une Parabole du premier genre par ceux du complément d'une Parabole du ſecond genre, du troiſiéme, pris inverſement, & ainſi des autres. Mais ſi le produit étoit une ſuite de racines compoſées de deux termes, alors ou le rapport de cette ſuite ne pourroit ſe trouver, ou s'il ſe pouvoit, ce ſeroit par d'autres voyes dont nous parlerons plus bas.

Par exemple, ſi l'on propoſoit de multiplier les Elemens d'une demi-Parabole quarrée ABC, (*Fig.* 83.) par les mêmes Elemens pris d'une maniere inverſe. Les Elemens pris directement ſeroient o, $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, &c. $\sqrt{R}$, & ces mêmes Elemens pris inverſement, $\sqrt{R-o}$, $\sqrt{R-a}$, $\sqrt{R-b}$, $\sqrt{R-c}$, &c. $\sqrt{R-R}$, & multipliant les uns par les autres, le produit ſeroit la ſuite o$\sqrt{R-o}$, $\sqrt{aR-aa}$, $\sqrt{bR-bb}$, $\sqrt{cR-cc}$, $\sqrt{RR-RR}$, qui eſt la même ſuite qui exprime le rapport qu'ont entr'eux les Elemens du cercle. Ainſi les plans qui compoſeroient le ſolide ſeroient entr'eux comme les Elemens du cercle dont on n'a pas encore trouvé le moyen de connoître le rapport.



CHAPITRE IX.

Des Suites ajoûtées les unes aux autres, & retranchées les unes des autres, puis multipliées les unes par les autres.

PROPOSITION LXIX.

171. *SI d'une part on ajoûte les termes d'une suite aux termes d'une autre, & que d'autre part on retranche les termes d'une suite des termes d'un autre, & qu'on vienne à multiplier la somme des deux premieres par le reste des deux secondes, on pourra connoître le rapport du produit, à moins qu'il ne se trouve dans ce produit une suite de racines composées de deux termes, auquel cas, si ce rapport peut se trouver, ce sera par les voyes dont nous parlerons plus bas.*

DEMONSTRATION.

Soit par exemple d'une part la suite des égaux R, R, R, &c. R, à laquelle on ajoute la suite des premieres puissances o. a. b. c, &c. R, & d'autre part soit la même suite des égaux de laquelle on retranche la même suite des premieres puissances, la somme des deux premieres sera R + o, R + a, R + b, R + c, R + R, & le reste des deux secondes sera R — o, R — a, R — b, R — c, &c. R — R. Et multipliant la somme par le reste nous aurons la suite RR — o, RR — aa, RR — bb, &c. RR — RR, laquelle est composée de deux suites, dont la premiere étant celle des égaux vaut ARR, & la seconde étant celle des quarrés vaut — $\frac{1}{3}$ ARR, parce qu'elle est négative. Donc le produit vaut ARR — $\frac{1}{3}$ ARR = $\frac{2}{3}$ ARR; & par conséquent ce produit est au quarré RR du dernier terme de la suite des égaux multiplié par le nombre des termes comme 2 à 3.

RR — oo.
RR — aa.
RR — bb.
RR — cc.
&c.
RR — RR.

ARR — $\frac{1}{3}$ ARR = $\frac{2}{3}$ ARR.

Soit de même la ſuite des égaux à laquelle on ajoûte les premieres puiſſances, & d'autre part la ſuite des mêmes égaux, de laquelle on a retranché les racines quarrées des premieres puiſſances. La ſomme des deux premieres ſera $R+o$, $R+a$, $R+b$, $R+c$, &c. $R+R$, & le reſte des deux ſecondes ſera $R-o$, $R-a^{\frac{1}{2}}$, $R-b^{\frac{1}{2}}$, $R-c^{\frac{1}{2}}$, &c. $R-R$, & le produit de deux ſommes ſera composé de quatre ſuites dont les rapports ajoûtés enſemble,

$$RR - o + o - o.$$
$$RR - a^{\frac{1}{2}}R + aR - a^{\frac{3}{2}}.$$
$$RR - b^{\frac{1}{2}}R + bR - b^{\frac{3}{2}}.$$
$$RR - c^{\frac{1}{2}}R + cR - c^{\frac{3}{2}}.$$
&c.
$$RR - RR + RR - RR.$$

$$AR^2 - \tfrac{2}{3}AR^2 + \tfrac{2}{4}AR^2 - \tfrac{2}{5}AR^2 = \tfrac{13}{30}AR^2.$$

comme on voit ici, font le rapport total $\frac{13}{30}AR^2$. Ainſi le produit eſt au dernier terme R^2 multiplié par le nombre des termes, comme 13 à 30, & de même des autres.

Mais ſi par exemple après avoir ajoûté d'une part la ſuite des premieres puiſſances à celle des égaux, & retranché d'autre part la ſuite des premieres puiſſances de celles des égaux, on propoſoit de multiplier les racines quarrées de la ſomme, c'eſt-à-dire la ſuite $\sqrt{R+o}$, $\sqrt{R+a}$, $\sqrt{R+b}$, $\sqrt{R+c}$, &c. $\sqrt{R+R}$ par les racines quarrées du reſte, c'eſt-à-dire par la ſuite $\sqrt{R-o}$, $\sqrt{R-a}$, $\sqrt{R-b}$, $\sqrt{R-c}$, &c. $\sqrt{R-R}$, le produit ſeroit $\sqrt{RR-oo}$, $\sqrt{RR-aa}$, $\sqrt{RR-bb}$, $\sqrt{RR-cc}$, &c. $\sqrt{RR-RR}$, & le rapport de cette ſuite ne pourroit ſe connoître, car nous allons bientôt voir que la connoiſſance de ce rapport donneroit celle de la quadrature du cercle, & de même des autres ſuites qui ſont les racines composées de deux termes.

PROPOSITION LXX.

172. *La ſomme des quarrés des Elemens du cercle eſt au cube du diametre comme 2 eſt à 3.* (Fig. 84.).

DEMONSTRATION.

Soit le rayon CO diviſé en ſes Elemens, & de chacun de ces Elemens ſoient élevées des perpendiculaires qui ſeront les Elemens

Elemens du quart du cercle AOC. Par la nature du cercle les quarrés de ces Elemens, commençant par AO sont égaux aux rectangles des parties du diametre qu'ils coupent, c'est-à-dire aux rectangles EO×OC, ER×RC, ES×SC, ET×TC, &c. Or les parties O, OR, OS, OT, &c. sont entr'elles comme les nombres o. 1. 2. 3, &c. ou comme o. *a. b. c. d*, &c. R, ainsi les parties EO, ER, ES, ET, &c. seront R+o, R+*a*, R+*b*, &c. R+R, & les parties CO, CR, CS, CT, &c. seront R—o, R—*a*, R—*b*, &c. R—R; multipliant donc les unes par les autres, nous aurons la suite RR—o, RR—*aa*, RR—*bb*, RR—*cc*, &c. RR—RR, qui exprimera la suite des rectangles égaux aux quarrés des Elemens. Mais le rapport de cette suite est $AR^2. - \frac{1}{3} AR^2. = \frac{2}{3} AR^2$. donc les quarrés des Elemens du quart de cercle sont au quarré R^2. du rayon multiplié par le nombre des termes comme 2 à 3. Or le nombre des termes A est égal au rayon, donc les quarrés sont au cube du rayon, comme 2 à 3.

RR—o
RR—*aa*.
RR—*bb*.
RR—*cc*.
&c.
RR—RR.

$AR^2. - \frac{1}{3} ARR = \frac{2}{3} ARR.$

Maintenant si nous prolongeons les Elemens du quart de cercle AOC jusqu'à l'autre quart de cercle COD, ils deviendront doubles d'eux-mêmes, & par conséquent leurs quarrés seront au quadruple du cube du rayon, comme 2 à 3, & par la même raison les quarrés des Elemens du demi-cercle restant AED seront au quadruple du cube du rayon, comme 2 à 3, donc la somme des quarrés des Elemens du cercle entier sera à huit fois le cube du rayon comme 2 à 3. Mais huit cubes du rayon sont égaux au cube du diametre, parce que le diametre est double du rayon; donc enfin la somme des quarrés des Elemens est au cube du diametre comme 2 à 3.

COROLLAIRE I.

173. Il est évident que si on pouvoit tirer les racines de la suite RR—o, RR—*aa*, RR—*bb*, &c. on auroit la valeur des Elemens du quart du cercle, & par conséquent la quadrature.

COROLLAIRE II.

174. Si l'on tire la diagonale FO du quarré AFCO circons-

crit au quart de cercle AOC, le triangle rectangle OCF sera isocelle, c'est-à-dire OC=CF, & à cause des triangles semblables, on aura OR=R*r*, OS=S*s*, OT=T*t*, &c. Or le quarré de l'Element R*i* est égal au rectangle ER×RC qui vaut RR—*aa*, ou $\overline{CO}^2 - \overline{OR}^2$, & $\overline{CO}^2 - \overline{OR}^2$ est égal à $\overline{Rz}^2 - \overline{Rr}^2$, donc le quarré de l'Element R*i* est égal à $\overline{Rz}^2 - \overline{Rr}^2$; on prouvera de la même façon que le quarré de l'Element S*u* est égal à $\overline{Sn}^2 - \overline{Ss}^2$, & ainsi des autres. Donc les quarrés des Elemens du quart de cercle sont égaux aux quarrés des Elemens du quarré AFCO moins les quarrés des Elemens du triangle OCF, c'est-à-dire au cube du rayon moins la Pyramide de même base & de même hauteur que ce cube.

Et par la même raison, on trouvera que les quarrés des Elemens du demi-cercle ACD sont égaux aux quarrés des Elemens du rectangle circonscrit AFGD moins les quarrés du triangle FOG, & enfin que les quarrés des Elemens du cercle entier sont égaux aux quarrés des Elemens du quarré circonscrit HFGI moins les quarrés des Elemens des deux triangles FOG, HOI.

COROLLAIRE III.

175. Il suit du Corollaire précédent que les quarrés des Elemens d'un segment *u*C*q* sont égaux aux quarrés des Elemens du rectangle correspondant *n*FGM moins les quarrés des Elemens correspondans du triangle tronqué *s*FG*x*; & si le segment est plus grand que le demi-cercle, comme par exemple le segment 2C3, les quarrés de ses Elemens sont égaux aux quarrés des Elemens du rectangle correspondant PFGQ moins les quarrés des Elemens du triangle FOG, moins encore les quarrés de ceux du triangle ZOV, & ainsi des autres. Car partout le quarré d'un Element du cercle est égal au quarré de l'Element du rectangle circonscrit moins celui de l'Element correspondant du triangle.

COROLLAIRE IV.

176. Les cercles étant entr'eux comme les quarrés de leurs diametres, si au lieu des quarrés des Elemens du cercle, nous prenons les cercles dont ils sont les diamétres, & au lieu du cube du diametre nous prenons le cylindre circonscrit (*Fig.* 85.)

la somme des cercles qui composent la Sphere sera égale au cylindre HFGI moins les deux cônes FOG, HOI; le segment *u*C*q* sera égal au cylindre *n*FGM moins le cône tronqué *s*FG*x*, & le segment 2C3 sera égal au cylindre PFGQ moins le cône FOG, moins encore le cône *t*ZOV, & ainsi des autres.

COROLLAIRE V.

177. Les Elemens d'une Ellipse perpendiculaires au grand axe étant proportionnels aux Elemens d'un cercle qui auroit pour diametre le grand axe, il s'ensuit que les quarrés des Elemens d'une Ellipse HABC (*Fig.* 86.) sont au quarré du petit axe multiplié par le grand, comme 2 à 3. Car les Elemens du quart d'Ellipse ABO sont aux Elemens du quart du cercle MBO, comme AO est à MO; & par conséquent les quarrés des uns sont aux quarrés des autres comme $\overline{AO}^2$ à $\overline{MO}^2$. Or les quarrés des Elemens du quart de cercle sont au quarré $\overline{MO}^2$ du plus grand multiplié par le nombre des termes OB, comme 2 à 3. Donc les quarrés des Elemens du quart d'Ellipse sont au quarré $\overline{AO}^2$ du plus grand multiplié par le nombre des termes OB, comme 2 à 3.

Donc prolongeant les Elemens du quart d'Ellipse AOB jusqu'à l'autre quart OBC, les quarrés des Elemens de la demi-Ellipse ABC seront au quarré du plus grand AC ou du petit axe multiplié par OB comme 2 à 3; & comme les quarrés des Elemens de l'autre demi-Ellipse seront au quarré $\overline{AC}^2$ multiplié par OH ou par OB, comme 2 à 3; il s'ensuit que les quarrés des Elemens de l'Ellipse entiere seront au quarré $\overline{AC}^2$ du petit axe multiplié par OB + OH, ou par le grand axe, comme 2 à 3.

COROLLAIRE VI.

178. Si l'on tire la Diagonale DO, du rectangle DAOB circonscrit au quart d'Ellipse AOB (*Fig*, 86.), & la diagonale RO du quarré MRBO circonscrit au quart de cercle MBO; le triangle DBO sera au triangle RBO, comme DB à RB, à cause que ces deux triangles ont la hauteur commune BO; donc les Elemens de l'un seront aux Elemens de l'autre comme

DB à RB, ou comme AO à MO, c'est-à-dire, comme les Elemens de l'Ellipse aux Elemens du quart de cercle, & les Elemens du rectangle DBAO seront aux Elemens du quarré MRBO aussi comme DB à RB, à cause de la hauteur commune OB; c'est-à-dire que les Elemens du rectangle DBOA & du quarré RBOM, ceux du triangle DBO, & du triangle RBO, & enfin ceux du quart d'Ellipse & du quart de cercle seront tous dans la même raison de AO à MO; & par conséquent leurs quarrés seront aussi dans la même raison. Or les quarrés des Elemens du quart de cercle sont égaux aux quarrés des Elemens du quarré circonscrit moins les quarrés du triangle ROB, donc les quarrés des Elemens du quart d'Ellipse sont égaux aux quarrés des Elemens du rectangle circonscrit ADBO, moins les quarrés des Elemens du triangle DOB.

Et de la même façon on prouvera que les quarrés des Elemens d'une demi-Ellipse ABC sont égaux aux quarrés des Elemens du rectangle ADEC moins les quarrés des Elemens du triangle DOE, que les quarrés des Elemens de l'Ellipse entiere sont égaux aux quarrés des Elemens du rectangle FDEG, moins les quarrés des Elemens des deux triangles DOE, FOG, que les quarrés des Elemens du segment 2B3 sont égaux aux quarrés des Elemens du rectangle *t*DE*r* moins les quarrés des Elemens du triangle tronqué 4DB5, &c.

Et au lieu des quarrés des Elemens mettant les cercles dont ces Elemens sont les diametres, on trouvera que l'Ellipsoïde est au cylindre circonscrit comme 2 à 3 (*Fig.* 87.), ou qu'il est égal au cylindre circonscrit moins les deux cônes DOE, FOG, que le segment 2B3 est égal au cylindre *t*DE*r* moins le cône tronqué 4DE5, le segment *m*B*n* égal au cylindre PDEQ moins le cône DOE moins encore le cône *x*O*z*, & ainsi des autres.

PROPOSITION LXXI.

179. *Si l'on ajoûte aux Elemens d'un rectangle* ABCD *ceux d'un triangle* DCE *de même base & de même hauteur* (Fig. 88.), *& que des Elemens du même rectangle on ôte les Elemens du même triangle, ce qui donnera un reste qui sera un triangle* AFB *de même base & de même hauteur, & qu'on multiplie la somme* ACEB *par le reste* AFB, *le solide produit sera au quarré de la base* AC *du rectangle multiplié par la hauteur* AB, *comme 2 à 3.*

DEMONSTRATION.

Les Elemens du rectangle joints à ceux du triangle, composent la suite R+o. R+a. R+b. R+c, &c. R+R, & les Elemens du même rectangle moins ceux du triangle composent la suite R—o. R—a. R—b, &c. R—R; multipliant donc les uns par les autres, nous aurons la suite RR—o, RR—aa, RR—bb, RR—cc, &c. RR—RR. Or le rapport de cette suite est ARR—$\frac{1}{3}$ARR=$\frac{2}{3}$ARR, donc le solide est au quarré RR de la base AC multiplié par la hauteur AB, comme 2 à 3.

COROLLAIRE I.

180. Si la hauteur AB est égale à la base AC, le solide est égal à la somme des quarrés des Elemens d'un quart de cercle dont le rayon est AB ou AC; car alors le rapport $\frac{2}{3}$ AR^2 se change en $\frac{2}{3}$ R^3, qui est le rapport des quarrés des Elemens d'un quart de cercle, comme on a vu ci-dessus.

COROLLAIRE II.

181. D'où il suit que si après avoir ajoûté à un quarré ABCD (*Fig.* 89.) un triangle BCE de même base & de même hauteur, & retranché du même quarré le même triangle, on prend des moyennes proportionnelles entre les Elemens de la somme ABCED, & ceux de reste AFB; ces moyennes proportionnelles seront les Elemens d'un quart de cercle AGB, car la somme de leurs quarrés sera égale aux $\frac{2}{3}$ du cube de AB.

Et si après avoir ajoûté les Elemens d'un rectangle ABCE (*Fig.* 90.) à ceux d'un triangle de même base & de même hauteur, & retranché des mêmes Elemens un triangle de même base & de même hauteur, on prend des moyennes proportionnelles entre les Elemens de la somme ABDE, & ceux du reste AEF; ces moyennes proportionnelles seront les Elemens d'un quart d'Ellipse dont la hauteur AE sera le demi-axe des ordonnées, & la base AG sera l'autre demi-axe; car la somme de leurs quarrés sera égale aux $\frac{2}{3}$ de ARR, c'est-à-dire du quarré de AB ou de AG multiplié par la hauteur AE.

PROPOSITION LXXII.

182. *Si l'on multiplie les Elemens d'une demi-Parabole quarrée*

ACB *paralelles à l'axe* AC *par les Elemens d'un triangle* ABE *de même base & de même hauteur* (Fig. 91.), *le solide produit sera au quarré de l'axe* AC *multiplié par la base* AB, *comme* 1 *à* 4.

DEMONSTRATION.

Les Elemens de la demi-Parabole paralelles à l'axe sont égaux aux Elemens du rectangle circonscrits moins ceux du complement ; ainsi en commençant du côté de l'axe, ils sont comme RR—o, RR—a^2, RR—b^2, RR—c^2, &c. RR—RR, & ceux du triangle ABC, sont comme o. *a*. *b*. *c*. *d*, &c. RR. Multipliant donc les uns par les autres, on aura la suite oR^2—o. *a*R^2—*aaa*. *b*R^2—*bbb*, &c. R^4—R^4, dont le rapport est $\frac{1}{2}AR^4 - \frac{1}{4}AR^4 = \frac{1}{4}AR^4$; donc le solide est au quarré de l'axe AC multiplié par la base AB, comme 1 à 4.

$$\begin{array}{l} oR^2 - o. \\ aR^2 - aaa. \\ bR^2 - bbb. \\ cR^2 - ccc. \\ dR^2 - ddd. \\ \&c. \\ R^2R^2 - R^4. \\ \hline \frac{1}{2}AR^4 - \frac{1}{4}AR^4 = \frac{1}{4}AR^4. \end{array}$$

Et de la même façon, on trouveroit le rapport du solide, si la demi-Parabole étoit du second genre, du troisiéme, &c.

COROLLAIRE I.

183. Si les Elemens du triangle étoient pris inversement, (*Fig.* 92.) les Elemens seroient comme RR—o. RR—*a*. RR—*b*. RR—*c*, &c. RR—RR, & ceux de la demi-Parabole pris du même côté, c'est-à-dire du côté de l'axe seroient RR—o. RR—*aa*. RR—*bb*, &c. RR—RR. Et multipliant les uns par les autres, on auroit une suite telle qu'on voit ici, dont le rapport est $\frac{10}{24}$ AR, & par conséquent le solide seroit au quarré de l'axe multiplié par la base AB, comme 10 à 24, ou comme 5 à 12.

$$\begin{array}{l} R^4 - o. \\ R^4 - aR^2 - aaR^2 + a^3. \\ R^4 - bR^2 - bbR^2 + b^3. \\ R^4 - cR^2 - ccR^2 + c^3. \\ \&c. \\ R^4 - R^2R^2 - R^4 + R^2R^2. \\ \hline AR^4 - \frac{1}{2}AR^4 - \frac{1}{3}AR^4 + \frac{1}{4} = \frac{10}{24}AR^4. \end{array}$$

Corollaire II.

184. Et si aux Elemens d'un triangle EDF (*Fig.* 93.) on ajoûte ceux d'un rectangle ADEB, & qu'on multiplie la somme par les Elemens d'une demi-Parabole quarrée de même hauteur & de même base pris paralellement à l'axe, les Elemens de la somme pris du côté de l'axe, seront R^2+o. R^2+a. R^2+b. R^2+c, &c. $RR+RR$, & ceux de la demi-Parabole seront R^2-o. R^2-a^2. R^2-b^2. R^2-c^2, &c. R^2-R^2. Multipliant donc les uns par les autres, on auroit une suite dont le rapport, comme on voit ici, seroit $\frac{22}{24}AR^4$.

$$
\begin{array}{l}
R^4+o-o-o.\\
R^4+aR^2-a^2R^2-a^3.\\
R^4+bR^2-b^2R^2-b^3.\\
\text{\&c.}\\
R^4+R^2R^2-R^2R^2-R^2R^2.\\
\hline
AR^4+\frac{1}{2}AR^4-\frac{1}{3}AR^4-\frac{1}{4}AR^4=\frac{22}{24}AR^4.
\end{array}
$$

Et par conséquent le solide seroit au quarré de l'axe AC multiplié par la base AB comme 22 à 24, ou comme 11 à 12.

Corollaire III.

185. Et si on mettoit la somme ADFB inversement (*Fig.* 94.) alors les Elemens de cette somme pris du côté de l'axe seroient $2R^2-o$. $2R^2-a$. $2R^2-b$. $2R^2-c$, &c. $2R^2-2R^2$, & ceux de la demi-Parabole R^2-o. R^2-a^2. R^2-b^2, &c. R^2-R^2. Multipliant donc les uns par les autres, on auroit une suite dont le rapport est, comme on voit ici $\frac{26}{24}AR^4$. Donc le solide seroit au quarré de l'axe AC multiplié par la base AB comme 26 à 24, ou comme 13 à 12.

$$
\begin{array}{l}
2R^4-o-o+o.\\
2R^4-aR^2-2a^2R^2+a^3.\\
2R^4-bR^2-2b^2R^2+b^3.\\
\text{\&c.}\\
2R^4-R^2R^2-2b^2R^2+R^2R^2.\\
\hline
2AR^4-\frac{1}{2}AR^4-\frac{2}{3}AR^4+\frac{1}{4}AR^4=\frac{26}{24}AR^4.
\end{array}
$$

Proposition LXXIII.

186. *Si l'on multiplie les Elemens d'un complement* ABC *de Pa-*

rabole quarrée dont le sommet est C *pris perpendiculairement à l'axe* (Fig. 95.) *par ceux d'un triangle* ADB, *le solide produit sera au quarré de la base* BC *ou* AD *multiplié par la hauteur* AB, *comme* 3 *à* 10.

DEMONSTRATION.

Les Elemens du complement perpendiculaires à l'axe, sont égaux aux Elemens du rectangle circonscrit moins les Elemens de la demi-Parabole. Par conséquent ils sont comme R—o. R—$a^{\frac{1}{2}}$. R—$b^{\frac{1}{2}}$. R—$c^{\frac{1}{2}}$, &c. R—R, & ceux du triangle sont comme o. *a*. *b*. *c*. *d*, &c. Multipliant donc les uns par les autres, le produit est comme oR—o. *a*R—$a^{\frac{3}{2}}$. *b*R—$b^{\frac{3}{2}}$, &c. RR—RR dont le rapport est $\frac{1}{2}$AR² — $\frac{2}{5}$AR = $\frac{1}{10}$ AR². Donc le solide est au quarré de la base BC multiplié par la hauteur AB, comme 1 à 10.

$$\begin{array}{l} oR - o. \\ aR - a^{\frac{3}{2}}. \\ bR - b^{\frac{3}{2}}. \\ bR - c^{\frac{3}{2}}. \\ \&c. \\ RR - RR. \\ \hline \frac{1}{2}ARR - \frac{2}{5}ARR = \frac{1}{10}AR^2. \end{array}$$

Et on trouveroit par un semblable calcul le rapport du solide si le complement apparte-noît à une Parabole du second genre, du troisiéme, &c.

COROLLAIRE I.

187. Si on prenoit les Elemens du triangle inversement; (*Fig. 96.*) ces Elemens seroient comme R—o. R—*a*, R—*b*, &c. R—R, & ceux du complement, comme R—o. R—$a^{\frac{1}{2}}$. R—$b^{\frac{1}{2}}$. R—$c^{\frac{1}{2}}$ &c. R—R, & multipliant les uns par les autres, on auroit une suite dont le rapport, comme on voit ici, est $\frac{7}{30}$ AR².

$$\begin{array}{l} RR - o - o + o. \\ RR - aR - a^{\frac{1}{2}}R + a^{\frac{3}{2}}. \\ RR - bR - b^{\frac{1}{2}}R + b^{\frac{3}{2}}. \\ \&c. \\ RR - RR - RR + RR. \\ \hline AR^2 - \frac{1}{2}AR^2 - \frac{2}{3}AR^2 + \frac{2}{5}AR^2 = \frac{7}{30}AR^2. \end{array}$$

Donc

Donc le solide seroit au quarré de la base multiplié par la hauteur AB, comme 7 à 30.

COROLLAIRE II.

188. Si aux Elemens d'un triangle EHI pris directement; (*Fig.* 97.) on ajoûte les Elemens d'un rectangle HIBA de même base & de même hauteur, & qu'on multiplie la somme par les Elemens du complement ABC de Parabole quarrée pris perpendiculairement à l'axe CO, les Elemens de la somme, en commençant

$$\begin{array}{l} RR - o + o - o. \\ RR - a^{\frac{1}{2}}R + aR - a^{\frac{3}{2}}. \\ RR - b^{\frac{1}{2}}R + bR - b^{\frac{3}{2}}. \\ \&c. \\ RR - RR + RR - RR. \\ \hline AR - \frac{2}{3}ARR + \frac{1}{2}AR^2 - \frac{2}{5}AR^2 = \frac{13}{30}AR^2. \end{array}$$

du côté de B, seront comme $R + o$. $R + a$. $R + b$, &c. $R + R$, & les Elemens du complement à commencer du même côté sont comme $R - o$. $R - a^{\frac{1}{2}}$. $R - b^{\frac{1}{2}}$, &c. $R - R$, & multipliant les uns par les autres, on aura un produit dont le rapport est $\frac{13}{30}AR^2$. Donc le solide est à la base BC multipliée par la hauteur AB, comme 13 à 30.

COROLLAIRE III.

189. Et si on prenoit inversement la somme du triangle & du rectangle, (*Fig.* 98.) les Elemens de cette somme, en commençant du côté de B seroit $2R - o$. $2R - a$. $2R - b$. $2R - c$, &c.

$$\begin{array}{l} 2RR - o - o + o. \\ 2RR - 2a^{\frac{1}{2}}R - aR + a^{\frac{3}{2}}. \\ 2RR - 2b^{\frac{1}{2}}R - bR + b^{\frac{3}{2}}. \\ \&c. \\ 2RR - 2RR - RR + RR. \\ \hline 2AR^2 - \frac{4}{3}AR^2 - \frac{1}{2}AR^2 + \frac{2}{5}AR^2 = \frac{17}{30}AR^2. \end{array}$$

$2R - 2R$, & ceux du complement $R - R$. $R - a^{\frac{1}{2}}$. $R - b^{\frac{1}{2}}$. $R - c^{\frac{1}{2}}$, &c. $R - R$. Et multipliant les uns par les autres, le

R

rapport du produit seroit $\frac{17}{30}$ AR². Donc le solide seroit à la base BC multipliée par la hauteur AB, comme 17 à 30.

PROPOSITION LXIV.

190. *Si l'on multiplie les Elemens d'un complement* ABC *de Parabole quarrée pris perpendiculairement à l'axe* CD *par les Elemens du segment parabolique* COBR *pris aussi perpendiculaires à l'axe, le solide produit sera à la base* AC *ou* BD *multipliée par la hauteur* AB, *comme* 1 *à* 15. (Fig. 99.)

DEMONSTRATION.

Les Elemens du complement pris du côté de AC, sont comme $R - o$. $R - a^{\frac{1}{2}}$. $R - b^{\frac{1}{2}}$, &c. $R - R$, & les Elemens du segment pris du même côté sont comme $o - o$. $a^{\frac{1}{2}} - a$. $b^{\frac{1}{2}} - b$. $c^{\frac{1}{2}} - c$, &c. $R - R$, c'est-à-dire, comme les Elemens de la Parabole moins ceux du triangle CBD. Multipliant donc les uns par les autres, on aura un produit dont le rapport est $\frac{1}{15}$ AR². Donc le solide est à la base BD multiplié par la hauteur AB, comme 1 à 15.

$$oR - o - o - o.$$
$$a^{\frac{1}{2}}R - aR - a + a^{\frac{3}{2}}.$$
$$b^{\frac{1}{2}}R - bR - b + b^{\frac{3}{2}}.$$
$$c^{\frac{1}{2}}R - cR - c + c^{\frac{3}{2}}.$$
&c.
$$RR - RR - RR - RR.$$
$$\frac{2}{3}AR^2 - \frac{1}{2}AR^2 - \frac{1}{2}AR^2 + \frac{2}{5}AR^2 = \frac{1}{15}AR^2.$$

Ce solide se fait en élevant aux extremités des Elemens du segment COBR des perpendiculaires égales à ces Elemens, lesquelles on multipliera par les Elemens correspondans du complement en faisant les rectangles des uns par les autres.

COROLLAIRE I.

191. Et si l'on multiplie les Elemens du complément pris perpendiculaires à l'axe par ceux de la demi-Parabole aussi per-

pendiculaires à l'axe (*Fig.* 100.) les deux suites prises du côté de AB sont R—o. R—$a^{\frac{1}{2}}$. R—$b^{\frac{1}{2}}$ &c. R, & o. $a^{\frac{1}{2}}$. $b^{\frac{1}{2}}$, &c. R. Et le rapport de leur produit est $\frac{1}{6}$ARR; donc le solide est à la base AB ou DC multipliée par la hauteur AC, comme 1 à 6.

oR — o.
$a^{\frac{1}{2}}$R — a.
$b^{\frac{1}{2}}$R — b.
&c.
RR—RR.

$\frac{2}{3}$ARR — $\frac{1}{2}$ARR = $\frac{1}{6}$ARR.

COROLLAIRE II.

192. Si on multiplie les Elemens d'un complement ABC de Parabole quarrée dont le sommet est B pris paralelles à l'axe, par les Elemens de la même demi-Parabole paralelles à l'axe; (*Fig.* 101.) les Elemens du complement seront comme o. a^2. b^2. c^2, &c. R^2, & ceux de la demi-Parabole R^2 — o. R^2 — a^2. R^2—b^2, &c. R^2—R^2. Et multipliant les uns par les autres, le rapport du produit est $\frac{2}{15}$ AR^4. Donc le solide est à l'axe AC multipliée par la base AB, comme 2 à 15.

oR — o.
a^2R^2— a^4.
b^2R^2 — b^4.
c^2R^2 — c^4.
&c.
R^4 —R^4.

$\frac{1}{3}AR^4$ — $\frac{1}{5}AR^4$ = $\frac{2}{15}$ AR^4.

COROLLAIRE III.

193. Si on multiplie les Elemens d'un complement ABC de Parabole quarrée dont le sommet est B, pris paralelles à l'axe par les Elemens du segment CDBE aussi paralelles à l'axe (*Fig.* 102.) les Elemens du complement seront comme o. a^2. b^2. c^2, &c. R^2, & ceux du segment comme o—o. a—a^2. b—b^2. c—c^2, &c. R^2—R^2; puisqu'ils sont égaux aux Elemens du triangle ABC moins les Elemens du complement ABCD. Multipliant donc les uns par les autres, le rapport du produit sera $\frac{1}{20}$ AR^4. Donc le solide sera au quarré de l'axe AC multiplié par la base AB, comme 1 à 20.

o — o.
a^3 — a^4.
b^3 — b^4.
c^3 — c^4.
&c. &c.
R^4 — R^4.

$\frac{1}{4}AR^4$. — $\frac{1}{5}AR^4$. = $\frac{1}{20}AR^2$.

Ce ſolide ſe fait en élevant aux extremités des Elemens du ſegment des perpendiculaires égales à ces Elemens que l'on multipliera par ceux du complement, en faiſant les rectangles des uns par les autres.

COROLLAIRE IV.

194. Si l'on multiplie les Elemens d'une demi-Parabole quarrée dont le ſommet eſt B, pris paralellement à l'axe BC par ceux du ſegment AOBE auſſi paralelles à l'axe, (*Fig.* 103.) les Elemens de la Parabole feront comme RR—o. RR—a^2. RR—b^2, &c. RR—RR, puiſqu'ils ſont comme les Elemens du rectangle circonſcrit moins les Elemens du complement AHOB, & ceux du ſegment feront comme les Elemens du triangle AHB moins ceux du complement AHBO, ou

$$oRR - o - o + o.$$
$$aRR - a^2R^2 - a^3 + a^4.$$
$$bRR - b^2R^2 - b^3 + b^4.$$
&c.
$$R^4 - R^2R^2 - R^2R^2 + R^4.$$
$$\frac{1}{2}AR^4 - \frac{1}{3}AR^4 - \frac{1}{4}AR^4 + \frac{1}{5}AR^4 = \frac{14}{120}AR^4.$$

comme o—o. $a-a^2$. $b-b^2$, &c. R^2-R^2. Multipliant donc les uns par les autres, le rapport du produit ſera $\frac{14}{120}AR^4$. Donc le ſolide eſt au quarré de l'axe BC multiplié par la baſe AC ou BH, comme 14 à 120, ou comme 7 à 60.

COROLLAIRE V.

195. Si l'on multiplie les Elemens d'une demi-Parabole quarrée ABC dont B eſt le ſommet, perpendiculaires à l'axe par les Elemens du ſegment AOBE auſſi perpendiculaires à l'axe (*Fig.* 104.) les Elemens de la demi-Parabole feront comme o. $a^{\frac{1}{2}}$. $b^{\frac{1}{2}}$. $c^{\frac{1}{2}}$, &c. & ceux du ſegment comme les mêmes Elemens de la Parabole moins ceux du triangle ABC, & par conſéquent comme o—o. $a^{\frac{1}{2}}-a$. $b^{\frac{1}{2}}-b$. $c^{\frac{1}{2}}-c$, &c. Multipliant donc les

$$o - o$$
$$a - a^{\frac{3}{2}}$$
$$b - b^{\frac{3}{2}}$$
$$c - c^{\frac{3}{2}}$$
&c.
$$RR - RR.$$
$$\frac{1}{2}AR^2 - \frac{2}{5}AR^2 = \frac{1}{10}AR^2.$$

uns par les autres, le rapport du produit sera $\frac{1}{10}$ AR^2. Donc le solide est au quarré de la base AC multiplié par la hauteur CB, comme 1 à 10.

REMARQUE.

196. On pourroit former une infinité d'autres solides à l'imitation des précédens, en prenant des Paraboles du second genre, du troisiéme, &c. & trouver leurs rapports avec la même facilité. C'est pourquoi je ne m'y arrêterai pas d'avantage, & je finirai ce Chapitre par un Probleme assez curieux touchant le cercle & les trois sections coniques.

PROPOSITION LXXV.

197. *Trouver le solide fait par la somme des rectangles égaux aux quarrés des Elemens d'une demi-Parabole, d'un demi-cercle, d'une demi-Ellipse, & d'une demi-hyperbole, & comparer ces solides entr'eux.*

Pour la Parabole.

Faites un rectangle *acbd* (*Fig.* 105.) dont la base *ac* soit égale au parametre DB de la demi-Parabole quarrée ABC, & la hauteur *cb* égale à la hauteur CB. Faites aussi un triangle rectangle *bce* dont la base *ce* & la hauteur *bc* soient chacune égales à la hauteur CB de la demi-Parabole, multipliez les Elemens du rectangle paralelles à la base par les Elemens du triangle, & le produit ou le coin *fadbce* sera égal à la somme des rectangles égaux aux quarrés des ordonnées.

DEMONSTRATION.

Le triangle rectangle *bce* ayant la base égale à la hauteur, ses Elemens paralelles à la base *ce* sont égaux aux abcisses correspondantes de la hauteur *bc*, & comme la hauteur *bc* est égale à la hauteur BC de la Parabole, les Elemens du triangle sont égaux aux abscisses BI, BR, RS, &c. de la hauteur BC. De même la base *ac* du rectangle *acbd* étant égale au parametre DB, les Elemens de ce rectangle sont chacun égaux au parametre, donc les Elemens du triangle multipliés par ceux du rectangle sont égaux aux abscisses BI, BR, BS, &c. multipliées par le parametre; or par la nature de la Parabole quarrée les quarrés des ordonnées sont égaux aux rectangles des abscisses correspondan-

tes multipliées par le paramettre. Donc les Elemens du triangle multipliés par ceux du rectangle sont égaux aux quarrés des ordonnées, & par conséquent le coin *fadbce* est égal à la somme des quarrés des ordonnées ou des rectangles égaux à ces quarrés.

COROLLAIRE.

198. Si nous appellons le paramettre r, les Elemens du rectangle *acbd* formeront la suite des égaux r, r, r, &c. r; & appellant la hauteur BC, R, les Elemens du triangle formeront la suite o. *a. b. c*, &c. R, & le produit des uns par les autres sera or, ar, br, cr, &c. rR, donc le rapport sera $\frac{1}{2}ArR$, c'est-à-dire, que la somme des rectangles égaux aux quarrés des ordonnées où le coin *fadbce* sera au rectangle du paramettre par la hauteur multiplié par le nombre des termes A, comme 1 à 2, & comme le nombre des termes A est égal à la hauteur R, le rapport sera $\frac{1}{2}rR^2$, c'est-à-dire, le coin est au quarré de la hauteur multiplié par le paramettre. comme 1 à 2.

Enfin si nous supposons le paramettre égal à la hauteur le rapport sera $\frac{1}{2}R^3$, & par conséquent le coin sera au cube de la hauteur, comme 1 à 2.

Pour le demi-Cercle.

Faites un triangle rectangle ABC (*Fig.* 106.), dont la base AC & la hauteur AB soient égales chacune au diametre *ab* du demi-cercle, & multipliez les Elemens pris directement par les Elemens d'un triangle ADC égal & équiangle au triangle ABC pris inversement, le produit ou le coin ABCD sera égal à la somme des rectangles égaux aux quarrés des Elemens du demi-cercle *aoc*.

DEMONSTRATION.

Le triangle ABC ayant la base AC & la hauteur AB égales; ses Elemens sont égaux aux abscisses de sa base, & par conséquent ils sont égaux aux abscisses *ac*, *ad*, *ae*, &c. du diametre du cercle, de même les Elemens du même triangle ou ceux de son égal ACD pris inversement, sont égaux aux restes des abscisses, ou à la base AC moins les abscisses, c'est-à-dire aux parties *bc*, *bd*, *be*, &c. du diametre, donc les produits des uns par les autres sont égaux aux rectangles $ac \times bc$, $ad \times db$, $ae \times be$, &c.

des abscisses du diametre par les parties correspondantes; or ces rectangles sont égaux aux quarrés des ordonnées du demi-cercle, donc le coin ABCD est égal à la somme des rectangles égaux aux quarrés des ordonnées du cercle.

COROLLAIRE I.

199. Si nous appellons les Elemens du triangle ABC, o. *a. b. c. d. e*, &c. R, ceux du triangle ACD pris inversement seront R—o, R—*a*, R—*b*, R—*c*, &c. R—R, & le produit des uns par les autres oR—o, *a*R—*aa*, *b*R—*bb*, *c*R—*cc*, &c. RR—RR, dont le rapport est $\frac{1}{6}$ AR². comme nous avons vû plus haut, donc le coin est au quarré de la base AC ou du diametre du cercle multiplié par le nombre des termes A, comme 1 à 6, & comme le nombre des termes A est égal à R, le rapport est $\frac{1}{6}$ R3, & par conséquent le coin ou la somme des rectangles égaux aux quarrés des ordonnées du demi-cercle est au cube du diametre comme 1 à 6.

Or le diametre étant double du rayon son quarré est quadruple du quarré du rayon; donc si au lieu du quarré du diametre multiplié par la hauteur ou par le diametre, nous mettons le quarré du rayon multiplié par le diametre, le coin ou la somme des rectangles sera au quarré du rayon multiplié par le diametre comme 4 à 6, ou comme 2 à 3, qui est le même rapport que nous avons trouvé plus haut.

COROLLAIRE II.

200. Si l'on prend une demi-Parabole quarrée dont l'axe & le parametre soient égaux chacun au diametre d'un demi-cercle, le coin parabolique sera au coin égal à la somme des rectangles du demi-cercle, comme 3 à 1. Car le rapport du coin parabolique sera $\frac{1}{2}$R3 (*N.* 198.) ou $\frac{3}{6}$ R3. & par conséquent le coin sera au cube de l'axe, comme 3 à 6, & le coin du demi-cercle sera au cube du diametre égal à l'axe, comme 1 à 6; donc le coin parabolique sera au coin du demi-cercle, comme 3 à 1, c'est-à-dire, qu'en ce cas le coin de la Fig. 106, ne sera que le tiers du coin de la Fig. 105.

COROLLAIRE III.

201. Donc le Paraboloïde décrit par la circonvolution d'une demi-Parabole dont le parametre & l'axe sont égaux chacun au

diametre d'un demi-cercle, est à la Sphere décrite par la circonvolution de ce demi-cercle, comme 3 à 1. (*Fig.* 107.) Car les cercles formés par la circonvolution des ordonnées à la demi-Parabole, & ceux qui sont formés par la circonvolution des ordonnées au demi-cercle inscrit, sont comme les quarrés de ces ordonnées. Or les quarrés des ordonnées de la demi-Parabole sont égaux au coin parabolique, & les quarrés des ordonnées au demi-cercle sont égaux au coin du demi-cercle, & ces coins sont entr'eux, comme 3 à 1. Donc, &c.

D'où il suit, que si du Paraboloïde on ôte la Sphere, le reste sera à la Sphere, comme 2 à 1, & au Paraboloïde comme 2 à 3.

COROLLAIRE IV.

202. Nous avons dit dans la *Théorie & Pratique des Geometres*, que la Cycloïde est au cercle generateur, comme 3 à 1. Donc en supposant les mêmes choses que dans les deux Corollaires précédens, la Cycloïde est au cercle generateur comme la Paraboloïde à la Sphere inscrite.

Pour l'Ellipse.

203. Faites un triangle rectangle ABC, dont la hauteur AB soit égale à la hauteur *ab*, ou au grand axe de la demi-Ellipse, & la base AC égale au petit axe ou au double de *he*. (*Fig.* 108.) Et multipliez les Elemens pris directement par les mêmes Elemens, ou par ceux d'un autre triangle CDB égal & semblable au triangle ABC pris inversement, & le produit ou le coin ACBD sera égal à la somme des rectangles égaux aux quarrés des ordonnées à la demi-Ellipse.

DEMONSTRATION.

Si nous appellons les Elemens du triangle ABC pris directement o. *a*. *b*. *c*. *d*, &c. R, ces mêmes Elemens pris inversement seront R—o, R—*a*, R—*b*, &c. R—R, & leur produit sera oR—o, *a*R—*aa*, *b*R—*bb*, &c. RR—RR. Or la valeur de ce produit est $\frac{1}{6}$ AR², donc le coin ABCD est au quarré de AC ou du petit axe multiplié par le nombre des termes A, ou par le grand axe comme 1 à 6. Et au lieu du quarré du petit axe mettant le quarré du demi-petit axe qui est quatre fois plus petit, le coin sera au quarré du demi-petit axe multiplié par le grand, comme 4 à 6, ou comme 2 à 3. Or les quarrés des ordonnées sont

sont au quarré du demi-petit axe multiplié par le grand aussi comme 4 à 6, donc le coin est égal aux quarrés des ordonnées à la demi-Ellipse, & par conséquent aux rectangles égaux à ces quarrés.

COROLLAIRE I.

204. Le coin de la demi-Ellipse est à celui du demi-cercle qui auroit pour diametre le grand axe, comme le quarré du petit axe au quarré du grand. Car appellant le grand axe R & le petit A, le coin, dont l'expression trouvée ci-dessus est $\frac{1}{6}$ AR^2, sera présentement $\frac{1}{6}$ A^2R, or le coin du demi-cercle est $\frac{1}{6}$ R^3, dont les deux coins sont entr'eux comme $\frac{1}{6}$ A^2R à $\frac{1}{6}$ R^3, & divisant par $\frac{1}{6}$ R, les coins sont entr'eux A^2 à R^2, c'est-à-dire, comme le quarré du petit axe au quarré du grand.

COROLLAIRE II.

205. En supposant que le parametre & l'axe d'une demi-Parabole quarrée soient chacun égaux au diametre du demi-cercle ou au grand axe de la demi-Ellipse, le coin de la Parabole est $\frac{1}{2}$ R^3, ou $\frac{3}{6}$ R^3, donc le coin de la Parabole, celui du cercle, & celui de l'Ellipse sont entr'eux comme $\frac{3}{6}$ R^3, $\frac{1}{6}$ R^3, $\frac{1}{6}$ A^2R, & divisant par R, ils sont comme $\frac{3}{6}$ R^2, $\frac{1}{6}$ R^2, $\frac{1}{6}$ A^2, ou comme $3R^2$, R^2, A^2.

Pour l'Hyperbole.

Prenez une ligne DA (*Fig.* 109.) dont la partie DC soit égale à *dc*, & la partie CA égale à *ca*, coupez DA en deux également en O, & du point O pris pour centre décrivez un demi-cercle DHA dont DA soit le diametre. Du point C élevez la perpendiculaire CH, qui sera moyenne proportionnelle entre DC & CA, & par conséquent son quarré sera égal au rectangle DC×CA, ou *dc*×*ca*. De l'extremité H tirez les droites HD, HA, & portez la grandeur de la base *bc* de H en R, d'où vous tirerez MQ paralelle à DA, le triangle MHQ étant rectangle, la droite HR sera moyenne proportionnelle entre les deux extremes MR, RQ, & par conséquent $\overline{HR}^2$ ou $\overline{bc}^2 = MR \times RQ$, portez la grandeur RQ de M en P, puis faites un rectangle *pq* TX, dont la base *pq* soit égale à PR & la hauteur *q*T égale à la hauteur *ac* de la demi-Hyperbole. Ajoûtez à ce rectangle un

S

triangle *mp*X de même hauteur & dont la base *mp* soit égale à MP, ce qui vous donnera un trapezoïde *mq*TX, dont la base sera égale à MR, enfin multipliez les Elemens de ce trapezoïde paralelle à la base *mq* par ceux d'un triangle T*qs*, de même hauteur, & dont la base *qs* soit égale à RQ, & le produit ou le coin *mq*SZXT sera égal à la somme des quarrés des ordonnées à la demi-Hyperbole.

DEMONSTRATION.

Il est évident que la base *mq*SZ est égale par la construction au rectangle MR×RQ, & par conséquent au quarré $\overline{HR}^2$ ou bc^2 de l'ordonnée *bc*. Maintenant si vous prenez deux extremes à l'ordonnée *hf*, de même que nous avons fait à l'ordonnée *bc*, puis deux extremes à l'ordinaire *iu*, & ainsi de suite, les rectangles de ces extremes seront égaux au quarrés des ordonnées correspondantes, & il est encore visible par la construction, que ces extremes seront proportionnelles aux droites *df*, *fa*; *di*, *ia*, &c. dont les rectangles sont entr'eux comme les quarrés des ordonnées, donc les premieres de ces extremes, c'est-à-dire celles qui seroient du côté de M, seroient entr'elles comme les droites *dc*, *df*, *di*, &c. & les dernieres extremes ou celles qui seroient du côté de RQ, seroient comme les droites *ac*, *af*, *ai*, &c. mais les droites *dc*, *df*, *di*, &c. sont entr'elles comme les Elemens d'un trapezoïde composé d'un rectangle & d'un triangle, car elles ont toutes la partie *da* égale, laquelle prise autant de fois qu'il y a d'ordonnées composeroit le rectangle, & les autres parties *ad*, *af* *ai*, &c. composeroient les Elemens d'un triangle; donc les premieres extremes doivent aussi être comme les Elemens d'un trapezoïde; & comme les parties *ac*, *af*, *ai*, &c. composeroient encore un triangle égal au précédent, il s'ensuit que les secondes extremes doivent aussi composer un triangle. Mais nous avons trouvé MR pour la base du trapezoïde, & RQ pour la base du triangle, donc MP égal à RQ doit être la base du triangle qui compose le trapezoïde avec le rectangle; & la hauteur, tant du trapezoïde que du triangle de la base RQ, doit être égale à la hauteur *ac* de la demi-hyperbole; car tout cela posé, il est sûr que les rectangles faits par les Elemens du trapezoïde *m*XT*q*, & par ceux du triangle T*qs* seront entr'eux comme les rectangles correspondans aux ordonnées, & par consé-

quent comme les quarrés des ordonnées, mais le dernier rectangle $mqSZ$, est égal au quarré de la derniere ordonnée bc, donc la somme des rectangles est égal à la somme des quarrés.

COROLLAIRE I.

206. Supposons que l'axe da soit égal à l'abscisse ac, alors les Elemens du rectangle qui fait partie du trapezoïde seront comme les égaux R, R, R, &c. & les Elemens du triangle qui fait aussi partie du trapezoïde seront comme o. a, b, c, d, &c. R, ainsi les Elemens du trapezoïde seront $R+o$, $R+a$, $R+b$, $R+c$, &c. $R+R$, & ceux de l'autre triangle étant aussi o. a. b. c. d, &c. R, le produit de ces Elemens multipliés les uns par les autres sera $oR+o$, $aR+aa$, $bR+bb$, &c. $RR+RR$, dont le rapport est $\frac{1}{2}AR^2+\frac{1}{3}AR^2=\frac{5}{6}AR^2$. Donc le coin est au quarré qS^2 de la base du triangle TqS multiplié par la hauteur qT ou ca, comme 5 à 6.

$oR+ \quad o.$
$aR+ \quad aa.$
$bR+ \quad bb.$
$cR+ \quad cc.$
&c.
$RR+RR.$

$\frac{1}{2}AR^2+\frac{1}{3}AR^2=\frac{5}{6}AR^2.$

Or dans cette supposition la base mr du trapezoïde sera double de la base qs du triangle, & par conséquent le rectangle $mqSZ$ ou le quarré $\overline{bc}^2$ de la base bc de la demi-hyperbole sera double du quarré de qs, ainsi appellant A la base bc & R la hauteur ac, le coin seroit $\frac{5}{12}A^2R$. Donc supposant une demi-Parabole dont le parametre & l'axe seroient chacun égaux au diametre d'un demi-cercle, une demi-Ellipse dont le grand axe seroit égal à ce même diametre, & un hyperbole dont l'axe & l'abscisse seroient égaux chacun au diametre du demi-cercle, le coin de la demi-Parabole, ceux du demi-cercle, de la demi-Ellipse & de la demi-hyperbole, seroient entr'eux comme $\frac{1}{2}R^3$, $\frac{1}{6}R^3$, $\frac{1}{6}A^2R$, $\frac{5}{12}A^2R$, ou comme $\frac{6}{12}R^3$, $\frac{2}{12}R^3$, $\frac{2}{12}A^2R$, $\frac{5}{12}A^2R$, ou enfin comme $6R^2$, $2R^2$, $2A^2$, $5A^2$.

COROLLAIRE. II.

207. Si l'axe da n'est pas égal à l'abscisse ac le rectangle qui fait partie du trapezoïde, n'a pas la base égale à celle du triangle qui fait aussi partie de ce même trapezoïde. Ainsi les Elemens du rectangle étant R, R, R, &c. R, ceux du triangle

feront o. a. b, &c. r, & les Elemens du trapezoïde feront $R+o$, $R+a$, $R+b$, $R+c$, &c. $R+r$, lesquels étant multipliés par ceux de l'autre triangle, qui feroient encore o. a. b. c, &c. r, donneroient pour produit une suite dont la valeur feroit $\frac{1}{2}ArR + \frac{1}{3}Arr$, c'est-à-dire, que le coin feroit égal à la moitié du rectangle de la base pq par la base qs multiplié par la hauteur, plus le tiers du quarré de la base qs multiplié par la même hauteur; ce que la figure du coin fait voir évidemment, car elle est composée du demi-paralellepipede KpqSTX, & de la pyramide mpKZX, d'où il suit que les quarrés des ordonnées feroient au plus grand multiplié par le nombre des termes comme $\frac{1}{2}ArR + \frac{1}{3}Arr$, est à $ArR + Arr$, ou comme $\frac{1}{2}R + \frac{1}{3}r$ à $R+r$; c'est-à-dire comme la moitié de l'axe plus le tiers de l'abscisse à la somme de l'axe de l'abscisse.

$$\begin{array}{l} oR + o. \\ aR + aa. \\ bR + bb. \\ \&c. \\ rR + rr. \\ \hline \frac{1}{2}ArR + \frac{1}{3}Arr. \end{array}$$

COROLLAIRE III.

208. Les coins dont nous venons de parler étant égaux aux quarrés des ordonnées, & les quarrés des ordonnées étant entr'eux comme les cercles des ordonnées, il s'ensuit que les solides formés par ces cercles, c'est-à-dire, le paraboloïde, la Sphere, l'Ellipsoïde allongé, & l'hyperboloïde, en supposant les mêmes choses que nous avons supposées au Corollaire I. sont entr'eux comme $6R^2$, $2R^2$, $2a^2$, $5a^2$.

REMARQUE.

209. Il ne nous reste plus qu'à faire voir comment on peut trouver les racines des termes d'une suite qui est le reste de deux suites retranchées l'une de l'autre, & comme nous nous servirons pour cela de la table de la Proposition XLIV, où les rapports marqués composent les suites des nombres figurés, nous allons auparavant expliquer quelques proprietés de ces nombres qui sont nécessaires pour l'intelligence de ce que nous devons dire.

CHAPITRE X.

De quelques proprietés des Nombres figurés.

PROPOSITION LXXVI.

210. T*Rouver la somme d'une suite finie composée de nombres naturels* 0. 1. 2. 3. 4, *&c.*

Nous avons vû dans le second Chapitre qu'en faisant la somme des deux premiers termes 0. 1. celle des trois premiers 0. 1. 2. & ainsi de suite, chacune de ces sommes étoit à son dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme 1 à 2. Donc multipliant le dernier terme par le nombre des termes, & prenant la moitié du produit, on aura la somme de la suite proposée. Soit par exemple, la suite finie 0. 1. 2. 3. 4. 5, &c. je multiplie le dernier terme 5 par le nombre des termes qui est 6, ce qui me donne 30, dont la moitié 15 est la somme de cette suite, & ainsi des autres.

Et pour donner une formule algebrique de ceci, appellons le dernier terme x, le nombre des termes sera $x+1$, à cause que le premier terme de la suite est zero. Ainsi multipliant x par $x+1$, on aura $xx+x$ qui sera le produit du dernier terme par le nombre des termes, & divisant par 2 on aura $\frac{xx+x}{2}$, qui marquera la somme de la suite.

PROPOSITION LXXVII.

211. *Trouver la somme d'une suite finie composée des quarrés* 0. 1. 4. 9, *&c. des nombres naturels* 0. 1. 2. 3, *&c.*

Dans le même second Chapitre (*N.* 10. *&* 11.) nous avons vû qu'en prenant la somme des deux premiers quarrés 0. 1. celle des trois premiers 0. 1. 4. celle des quatre premiers 0. 1. 4. 9. & ainsi de suite, chacune de ces sommes étoit à son dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme 1. à 3, & de plus, comme 1 est à la racine quarrée du dernier terme multipliée par 6. Donc multipliant le dernier terme par le nombre des termes, & divisant le produit par 3, puis divisant le même produit aussi par le sextuple de la racine quarrée du dernier

terme, la somme des deux quotiens sera la somme de la suite.

Par exemple, soit la suite finie 0. 1. 4. 9. 16. je multiplie 16 par le nombre des termes 5, ce qui fait 80, je divise 80 par 3, & le quotient est $26\frac{2}{3}$, je divise encore 80 par 24, c'est-à-dire par la racine quarrée 4 du dernier terme multipliée par 6, & le quotient est $3\frac{1}{3}$. Ajoûtant donc les deux quotients ensemble la somme 30 est égale à la suite 0. 1. 4. 9. 16. & ainsi des autres.

Où il faut observer que le nombre des termes est toujours égal à la racine quarrée du dernier terme augmentée de l'unité; car les racines des quarrés 0. 1. 4. 9. 16, &c. composent la suite 0. 1. 2. 3. 4, &c. dont le nombre des termes surpasse toujours le dernier terme d'une unité à cause que le premier terme est zero.

0.	1.	2.	3.	4.
0.	1.	4.	9.	16.

Donc si nous appellons le dernier quarré xx, le nombre des termes sera $x+1$, & le dernier quarré multiplié par le nombre des termes, sera x^3+x^2, & la somme de la suite sera $\frac{x^3+x^2}{3}+\frac{x^3+x^2}{6x}$.

PROPOSITION LXXVIII.

212. *Trouver la somme d'une suite finie composée des cubes 0. 1. 8. 27, &c. des nombres 0. 1. 2. 3, &c.*

Dans le même Chapitre II. (*N.* 10. 11.) nous avons vû qu'en prenant la somme des deux premiers cubes 0. 1. celle des trois premiers 0. 1. 8. celle des quatre premiers 0. 1. 8. 27. & ainsi de suite, chacune de ces sommes étoit à son dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme 1 à 4, & de plus, comme 1 est à la racine cubique du dernier terme multipliée par 4. Donc multipliant le dernier terme par le nombre des termes, & divisant le produit par 4, puis divisant le même produit par le quadruple de la racine cubique du dernier terme, la somme des deux quotients sera égale à la somme de la suite proposée.

Soit par exemple la suite finie 0. 1. 8. 27. 64. je multiplie 64 par le nombre des termes 5, ce qui me donne 320, que je divise par 4, & le quotient est 80, je divise encore 320 par 16, c'est-à-dire, par le quadruple de la racine cubique 4 du dernier terme, & le quotient est 20; ajoûtant donc les deux quotients, la somme 100 est égale à la suite 0. 1. 8. 27. 64, & ainsi des autres.

Appellant donc le dernier terme x^3, le nombre des termes sera $x+1$, & le dernier terme multiplié par le nombre des termes, sera x^4+x^3. donc la somme de la suite sera $\frac{x^4+x^3}{4}+\frac{x^4+x^3}{4x}$.

REMARQUE.

213. La somme d'une suite finie des quatriémes puissances, des cinquiémes, &c. ne peut pas se trouver facilement par la même induction, mais nous la trouverons dans la suite d'une autre façon.

DEFINITION.

214. Nous avons dit (*N.* 118.) que les nombres triangulaires o. 1. 3. 6. 10, &c. se formoient par l'addition des nombres naturels o. 1. 2. 3. 4, &c. c'est-à-dire, que le second nombre triangulaire 3, étoit la somme des trois premiers nombres naturels, o. 1. 2. le triangulaire 6 étoit la somme des quatre premiers naturels o. 1. 2. 3. & ainsi des autres. C'est pourquoi nous appellerons *côté* d'un nombre triangulaire, le dernier terme de la progression naturelle dont il est formé. Ainsi le côté du nombre triangulaire 3 sera le dernier terme 2 de la progression o. 1. 2. dont ce nombre triangulaire est composé. Le côté du nombre triangulaire 6 sera 3, qui est le dernier terme de o. 1. 2. 3, & ainsi des autres; & nous appellerons la suite o. 1. 2. 3. 4. 5, &c. *suite des Lateraux*. Il faut en lisant ceci jetter les yeux sur la table des nombres figurés que nous avons donnés ci-dessus (*N.* 118.)

PROPOSITION LXXIX.

215. *Le côté d'un nombre triangulaire étant donné, trouver le nombre.*

Multipliez le côté donné par ce même côté augmenté de l'unité, & divisez le produit par 2, le quotient sera le nombre triangulaire proposé.

Soit par exemple le côté donné 6, je multiplie 6 par 7 ce qui fait 42, & divisant 42 par 2, le quotient 21 est le nombre triangulaire demandé, & ainsi des autres.

DEMONSTRATION.

Tout nombre triangulaire est la somme d'une suite o. 1. 2. 3. 4, &c. dont le dernier terme est égal au côté donné. Or cette suite est égale à la moitié du produit de son dernier terme multiplié par le nombre des termes; donc le nombre triangulaire est égal à la moitié du produit de son côté multiplié par le nombre des termes, ou par le même côté augmenté de l'unité.

COROLLAIRE.

216. Appellant donc le côté x, le nombre des termes sera $x+1$, & le nombre triangulaire sera $\frac{xx+x}{2}$.

PROPOSITION LXXX.

217. *Le côté d'un nombre pyramidal étant donné, trouver ce nombre.*

Doublez le côté donné, ajoûtez à ce double le cube du côté, & le triple du quarré du même côté, & divisez le tout par 6, le quotient sera le nombre pyramidal demandé.

Soit par exemple le côté donné 5, dont le double est 10, j'ajoûte à 10 le cube 125, ce qui fait 135, & à 135 j'ajoûte 75 ou trois fois le quarré 25, ce qui fait 210; je divise 210 par 6, & le quotient 35 est le nombre pyramidal, ainsi qu'on peut voir par la table donnée ci-dessus. (*N.* 118.)

DEMONSTRATION.

Tout nombre pyramidal se forme par l'addition des nombres triangulaires, de même que tout nombre triangulaire se forme par l'addition des lateraux. Apellant donc les lateraux o. a. b. c. d, &c. jusqu'au dernier terme que nous appellerons x, les triangulaires formés par le premier, par l'addition des deux premiers, des trois premiers, des quatre premiers, &c. seront o. $\frac{a^2+a}{2}$ $\frac{b^2+b}{2}$, $\frac{c^2+c}{2}$, &c. $\frac{x^2+x}{2}$, & le nombre pyramidal formé par l'addition de ces triangulaires sera égal à la somme de ces triangulaires. Or en négligeant le diviseur 2, cette somme est composée de deux suites finies, dont l'une étant celle des quarrés depuis

depuis o. jusqu'à xx, vaut $\frac{x^3+x^2}{3}+\frac{x^3+x^2}{6x}$, & l'autre étant celle des premieres puissances depuis o. jusqu'à x, vaut $\frac{xx+x}{2}$. Donc cette somme vaut $\frac{x^3+x^2}{3}+\frac{x^3+x^2}{6x}+\frac{xx+x}{2}$, ou $\frac{x^3+x^2}{3}+\frac{x^2+x}{6}+\frac{xx+x}{2}$, ou bien en multipliant le numérateur & le dénominateur de la premiere fraction par 2, & ceux de la troisiéme fraction par 3, $\frac{2x^3+2x^2}{6}+\frac{xx+x}{6}+\frac{3xx+3x}{6}$ ce qui se reduit à $\frac{2x^3+6x^2+4x}{6}$; & divisant cette somme par 2, à cause du diviseur 2 que nous avions négligé, nous aurons $\frac{x^3+3x^2+2x}{6}$ qui exprime la valeur du nombre pyramidal, dont le côté est x. Or cette valeur est composée du cube du côté x, plus trois quarrés de ce côté, plus deux fois ce côté, le tout divisé par 6. Donc, &c.

o
a^2+a.
b^2+b.
c^2+c.
d^2+d.
&c.
x^2+x.

PROPOSITION LXXXI.

218. *Le côté d'un nombre figuré du quatriéme ordre étant donné, trouver ce nombre.*

Prenez la quatriéme puissance du côté donné, ajoûtez-y six fois son cube, plus onze fois son quarré, plus six fois le côté, & divisez le tout par 24, le quotient sera le nombre demandé.

Soit par exemple le côté donné 4, je prens sa quatriéme puissance 256, six fois son cube 64, ce qui fait 384, onze fois son quarré 16, ce qui fait 176, & six fois ce côté, ce qui fait 24, j'ajoûte le tout ensemble, & divisant la somme 840 par 24, le quotient 35 est le nombre demandé du quatriéme ordre, comme on peut voir par la table donnée ci-dessus. (*N.* 118.)

256	
384	
176	
24	
840	
24	
840	35
120	
0	

DEMONSTRATION.

Tout nombre du quatriéme ordre est formé par l'addition des nombres pyramidaux; ainsi appellant les côtés des pyramidaux o. a. b. c. d, &c. jusqu'au dernier x égal au côté donné, les nombres pyramydaux qui répondent à ces côtés sont o. $\frac{a^3+3a^2+2a}{6}$.

$\frac{b^3+3b^2+2b}{6}$, $\frac{c^3+3c^2+2c}{6}$, $\frac{d^3+3d^2+2d}{6}$ &c. $\frac{x^3+3x^2+2x}{6}$, &

& par conséquent le nombre du quatriéme ordre qu'on demande, est égal à la somme de ces nombres pyramidaux. Or cette somme en négligeant le diviseur 6 comprend trois suites finies, dont la premiere étant celle des cubes, vaut $\frac{x^4+x^3}{4}+\frac{x^4+x^3}{4x}$, ou $\frac{x^4+x^3}{4}+\frac{x^3+x^2}{4}$. La seconde étant triple des quarrés, vaut $\frac{2x^3+3x^2}{3}+\frac{3x^3+3x^2}{6x}$ ou $\frac{2x^3+3x^2}{3}+\frac{3x^2+3x}{6}$, & la troisiéme étant double des premieres puissances, vaut $\frac{2x^2+2x}{2}$ donc cette somme vaut $\frac{x^4+x^3}{4}$ et $\frac{x^3+x^2}{4}+\frac{3x^3+3x^2}{3}+\frac{3x^2+3x}{6}+\frac{2x^2+2x}{2}$ ou $\frac{x^4+x^3}{4}+\frac{x^3+x^2}{4}$ $+x^3+x^2+\frac{x^2+x}{2}+x^2+x$, & multipliant le numérateur & le dénominateur de la fraction $\frac{x^2+x}{2}$ par 2, & reduisant les entiers en fraction, on aura $\frac{x^4+x^3}{4}+\frac{x^3+x^2}{4}+\frac{4x^3+4x^2}{4}+\frac{2x^2+2x}{4}+\frac{4x^2+4x}{4}$, qui se reduit à $\frac{x^4+6x^3+11x^2+6x}{4}$; & divisant par le diviseur 6, que nous avions négligé, nous aurons $\frac{x^4+6x^3+11x^2+6x}{24}$, qui sera la valeur du nombre demandé du quatriéme ordre.

0
a^3+3a^2+2a.
b^3+3b^2+2b.
c^3+3c^2+2c.
d^3+3d^2+2d.
&c.
x^3+3x^2+2x.

Or ce nombre contient la quatriéme puissance du côté donné x, plus six fois son cube, plus onze fois son quarré, plus six fois son côté, le tout divisé par 24. Donc, &c.

COROLLAIRE I.

219. Maintenant si l'on considére la table des nombres figurés (*N.* 118.), le premier rang horisontal d'enhaut contient les unités dont le dernier terme est toujours un, de même que le premier rang perpendiculaire à gauche. Le second rang horisontal de même que le second perpendiculaire contient les lateraux, dont le dernier terme est toujours x quelque part où l'on s'arrête; le troisiéme rang horisontal, de même que le troisiéme perpendiculaire, contient les triangulaires dont le dernier terme est toujours $\frac{xx+x}{2}$; le quatriéme rang horisontal de même que le qua-

triéme perpendiculaire, contient les pyramidaux dont le dernier terme est toujours $\frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{6}$, & le cinquiéme horisontal de même que le cinquiéme perpendiculaire, contient les nombres du quatriéme ordre, dont le dernier terme est toujours $\frac{x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x}{24}$. Ainsi les caracteres de ces cinq premiers rangs sont 1, x, $\frac{x^2 + x}{2}$, $\frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{6}$, $\frac{x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x}{24}$, or ces nombres sont formés par la multiplication successive de ceux-ci 1, $\frac{x}{1}$, $\frac{x+1}{2}$, $\frac{x+2}{3}$, $\frac{x+3}{4}$, &c. car 1 multiplié par $\frac{x}{1}$ fait $\frac{1x}{1} = x$, & x multiplié par $\frac{x+1}{2}$ fait $\frac{x^2 + x}{2}$, & $\frac{x^2 + x}{2}$ multiplié par $\frac{x+2}{3}$ fait $\frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{6}$, & $\frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{6}$ multiplié par $\frac{x+3}{4}$ fait $\frac{x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x}{24}$. Donc multipliant ce dernier produit par $\frac{x+4}{5}$ le produit $\frac{x^5 + 10x^4 + 35x^3 + 50x^2 + 24x}{120}$ sera le caractere des nombres du sixiéme rang horisontal, ou du sixiéme perpendiculaire, qui sont les nombres du cinquiéme ordre. Et multipliant ce dernier produit par $\frac{x+5}{6}$ nous aurons $\frac{x^6 + 15x^5 + 85x^4 + 225x^3 + 274x^2 + 120x}{720}$ qui sera le caractere des nombres du septiéme rang horisontal ou du septiéme perpendiculaire, qui sont les nombres du sixiéme ordre; & continuant à multiplier de la même façon, on aura les caracteres des nombres des autres rangs, soit horisontaux, soit perpendiculaires, tels qu'on les voit ici.

Les Unités.	1.
Les Lateraux.	x.
Les triangulaires.	$\frac{x^2 + x}{2}$
Les pyramidaux.	$\frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{6}$
Le 4e. ordre.	$\frac{x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x}{24}$
Le 5e. ordre.	$\frac{x^5 + 10x^4 + 35x^3 + 50x^2 + 24x}{120}$
Le 6e. ordre.	$\frac{x^6 + 15x^5 + 85x^4 + 225x^3 + 274x^2 + 120x}{720}$
Le 7e. ordre, &c.	$\frac{x^7 + 21x^6 + 175x^5 + 735x^4 + 1624x^3 + 1764x^2 + 720x}{5040}$

Et pour montrer la justesse de cette induction, supposons que le côté d'un nombre du cinquiéme ordre soit 3, je prens selon la formule du cinquiéme ordre 243, qui est la cinquiéme puissance de 3, plus 810 ou dix fois sa quatriéme puissance; plus 945, ou trente-cinq fois son cube; plus 450, ou cinquante fois son quarré; plus 72, ou vingt-quatre fois le côté 3; & ajoûtant le tout ensemble, la somme est 2520, laquelle étant divisée par 120, donne 21 qui est effectivement le nombre du cinquiéme ordre dont le côté est 3, comme il paroît par la Table, & ainsi des autres.

243
810
945
450
72
2520

120		
2520		21
120		
0		

COROLLAIRE II.

220. Par le moyen des formules précédentes, on peut trouver la valeur d'une suite finie de quatriémes puissances, de cinquiémes, de sixiémes, des nombres 0. 1. 2. 3. 4, &c. Car supposons une suite finie de quatriémes puissances dont la derniere soit appellée x^4, les racines quatriémes de ces puissances seront 0. a. b. c. d, &c. x. Or examinant les formules précédentes, je vois par la formule $\frac{x^4+6x^3+11x^2+6x}{24}$ que chaque nombre du quatriéme ordre contient la quatriéme puissance de son côté plus six fois son cube, plus onze fois son quarré, plus six fois le côté, le tout divisé par 24. D'où il suit que retranchant de chacun six fois le cube de son côté, plus onze fois le quarré de ce côté, plus six fois le côté, le tout divisé par 24, le reste sera la quatriéme puissance de ce côté. Je fais donc les nombres du quatriéme ordre correspondans aux côtés 0. a. b. c. d, &c. x; & j'ai 0. $\frac{a^4+6a^3+11a^2+6a}{24}$, $\frac{b^4+6b^3+11b^2+6b}{24}$, $\frac{c^4+6c^3+11c^2+6c}{24}$, &c. $\frac{x^4+6x^3+11x^2+6x}{24}$. Or la somme de ces nombres est égale au nombre du cinquiéme ordre dont le côté est x; & par conséquent cette somme est égale à $\frac{x^5+10x^4+35x^4}{120}$

$\frac{+ 50x^2 + 24x}{120}$. Mais cette somme en négligeant le diviseur 24, est égale à quatre suites dont la premiere est celle des quatriémes puissances que nous cherchons, la seconde étant sextuple des cubes, vaut $\frac{6x^4 + 6x^3}{4} + \frac{6x^4 + 6x^3}{4x}$, ou $\frac{6x^4 + 6x^3}{4} + \frac{6x^3 + 6x^2}{4}$, la troisiéme étant onze fois plus grande que celle des quarrés, vaut

$$0 + 0 + 0 + 0.$$
$$a^4 + 6a^3 + 11a^2 + 6a.$$
$$b^4 + 6b^3 + 11b^2 + 6b.$$
$$c^4 + 6c^3 + 11c^2 + 6c.$$
&c.
$$x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x.$$

$\frac{11x^3 + 11x^2}{3} + \frac{11x^3 + 11x^2}{6x}$, ou $\frac{11x^3 + 11x^2}{3} + \frac{11x^2 + 11x}{6}$; enfin la la quatriéme étant six fois plus grande que celle des premieres puissances, vaut $\frac{6x^2 + 6x}{2}$, ou $3x^2 + 3x$. Ajoûtant donc ces trois dernieres suites ensemble, leur somme est $\frac{6x^4 + 6x^3}{4} + \frac{6x^3 + 6x^2}{4} + \frac{11x^3 + 11x^2}{3} + \frac{11x^2 + 11x}{6} + 3x^2 + 3x$, & divisant le numérateur & le dénominateur des deux premieres fractions par 2, puis les multipliant par 3; ensuite multipliant ceux de la troisiéme fraction par 2, & enfin réduisant les deux entiers en fractions, on aura $\frac{9x^4 + 9x^3}{6} + \frac{9x^3 + 9x^2}{6} + \frac{22x^3 + 22x^2}{6} + \frac{11x^2 + 11x}{6} + \frac{18x^2 + 18x}{6}$, qui se réduit à $\frac{9x^4 + 40x^3 + 60x^2 + 29x}{6}$.

Or à cause du diviseur 24 que nous avons négligé, il faudroit diviser cette somme par 24 & la retrancher ensuite de la somme des nombres du quatriéme ordre correspondans aux côtés o. *a*. *b*. *c*, &c. *x*, ou du nombre du cinquiéme ordre $\frac{x^5 + 10x^4 + 35x^3}{120}$ $\frac{+ 50x^2 + 24x}{120}$ qui est égal à la somme des nombres du quatriéme ordre; après quoi le reste seroit la somme des quatriémes puissances divisées par 24. Mais sans faire cette division, je multiplie $\frac{x^5 + 10x^4 + 35x^3 + 50x^2 + 24x}{120}$ par 24, & le produit est $\frac{x^5 + 10x^4 + 35x^3 + 50x^2 + 24x}{5}$; ainsi retranchant de ce produit la somme $\frac{9x^4 + 40x^3 + 60x^2 + 29x}{6}$ des trois dernieres suites, le reste sera la somme des quatriémes puissances qu'on demande. Or réduisant ces deux fractions en même dénomination, & fai-

sant ensuite la soustraction, le reste $\frac{6x^5 + 15x^4 + 10x^3 - 0x^2 - x}{30}$ est la somme des quatriémes puissances qu'on cherche.

Et cette somme peut se réduire à cette expression $\frac{6x^5 + 6x^4 + 9x^4 + 9x^3 + x^3 + x^2 - x^2 - x}{30}$ qui se réduit enfin à $\frac{x^5 + x^4}{5} + \frac{3x^4 + 3x^3}{10} + \frac{x^3 + x^2}{30} - \frac{x^2 - x}{30}$.

Soit par exemple une Suite finie de quatriémes puissances ; dont le dernier terme soit 2401, dont la racine quatriéme est 7 ; je prens la formule $\frac{6x^5 + 15x^4 + 10x^3 - 0x^2 - x}{30}$, & suivant cette formule, je prens la cinquiéme puissance de 7 multiplié par 6, ce qui fait 100842 ; je prens aussi la quatriéme puissance de 7 multipliée par 15, ce qui fait 36015 ; je prens encore la troisiéme puissance de 7 multiplié par 10, ce qui fait 3430 ; j'ajoûte ces trois produits ensemble, & de la somme 140287, je retranche 7, & le reste est 140280, lequel divisé par 30, donne 4676 qui est la somme des quatriémes puissances, dont le dernier terme est 2401.

$$\begin{array}{r} 100842 = 6x^5 \\ 36015 = 15x^4 \\ 3430 = 10x^3 \\ \hline 140287 \\ 7 = x \\ \hline 140280 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 30 & \\ 140280 & 4676 \\ \hline 20.2 & \\ \hline 22.8 & \\ \hline 18.0 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Et effectivement, si l'on prend les quatriémes puissances des nombres 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. leur somme sera comme on voit ici 4676, qui est la même que la formule vient de nous faire trouver.

$$\begin{array}{r} 1 = a^4 \\ 16 = b^4 \\ 81 = c^4 \\ 256 = d^4 \\ 625 = e^4 \\ 1296 = f^4 \\ 2401 = x^4 \\ \hline 4676 \end{array}$$

Et on pourroit de la même façon trouver des formules pour les cinquiémes puissances, sixiémes, septiémes, &c.

CHAPITRE XI.

Maniere de trouver les Racines des Suites qui sont les restes de deux autres retranchées l'une de l'autre, & les Racines des quarrés, des cubes, des quatriémes Puissances, &c. de ces mêmes restes.

221. IL n'est pas possible de trouver en general ces sortes de Racines, mais il en est quelques-unes en particulier qu'on peut découvrir par la Méthode dont nous allons parler.

La Table de la Proposition XLIV. (*Page* 81.) contient non-seulement les rapports des restes de la Suite des égaux moins celles des premieres racines, des secondes, des troisiémes, &c. mais encore les rapports des quarrés de ces restes, des cubes, des quatriémes puissances, &c. Prenons donc cette Table pour tâcher de découvrir les racines de ces restes, ou des quarrés, des cubes, &c. de ces restes; & laissons des rangs vuides entre les rangs horisontaux & entre les rangs perpendiculaires, pour placer dans les vuides les rapports que nous pourrons trouver.

PREMIERE TABLE.

Suite des Egaux moins la Suite

		Egaux.		Restes.		Quarrés des Restes.		Cubes les Restes.		4es. puissances les Cubes.
Des Egaux.		1		1		1		1		1
Des 1eres Racines.		1		2		3		4		5
Des 2es. Racines.		1		3		6		10		15
Des 3es. Racines.		1		4		10		20		35
Des 4es. Racines.		1		5		15		35		70

Cette Table étant ainsi disposée : j'observe d'abord que les puissances marquées en haut, c'est-à-dire les égaux, les restes, les quarrés de ces restes, leurs cubes, &c. sont en progression géométrique, & leurs exposans 0. 1. 2. 3, 4, &c. en progression arithmetique ; ainsi pour remplir les places vuides, je dois mettre des puissances moyennes géométriques entre les puissances marquées, & ces puissances auront pour exposans les moyens arithmetiques entre les exposans 0. 1. 2. 3, &c. Car si je veux prendre une puissance moyenne géométrique entre la puissance premiere a, & la puissance seconde a^2, il faut que je multiplie a par a^2, & que je tire la racine quarrée du produit a^3 ; or selon les regles du calcul des exposans, pour multiplier a^1 par a^2, on doit ajoûter les deux exposans 1 & 2 ensemble, ce qui fait 3, & pour tirer la racine quarrée du produit a^3, il faut diviser l'exposant 3 par l'exposant 2, c'est-à-dire prendre la moitié de la somme 3 des deux exposans, ce qui est la même chose que de prendre une moyenne arithmétique entre les deux nombres 1 & 2. Donc prenant entre les exposans 0. 1. 2. 3. 4, &c. des moyens arithmétiques, la suite $-\frac{1}{2}$. 0. $\frac{1}{2}$. 1. $1\frac{1}{2}$. 2. $2\frac{1}{2}$. 3. $3\frac{1}{2}$. 4, &c. representera les exposans des puissances qui rempliront le rang d'enhaut, & ces puissances seront $a^{-\frac{1}{2}}$.. a^0. $a^{\frac{1}{2}}$. a^1. $a^{\frac{3}{2}}$. a^2. $a^{\frac{5}{2}}$. a^3. $a^{\frac{7}{2}}$. a^4, &c. ou les réciproques des racines quarrées des restes, les égaux, les racines quarrées des restes, les restes, les racines quarrées des cubes des restes, les quarrés des restes, les racines quarrées de leurs cinquiémes puissances, leurs troisiémes puissances, les racines quarrées de leurs septiémes puissances, leurs quatriémes puissances &c.

De même, les exposans des puissances marquées dans le premier rang perpendiculaire à gauche, sont $\frac{0}{0}$. $\frac{1}{1}$. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$, ou les dénominateurs sont en progression arithmétique ; donc si je veux remplir les vuides, il faut que je prenne entre ces exposans d'autres exposans dont les dénominateurs soient moyens arithmetiques entre les dénominateurs 0. 1. 2. 3. 4, &c. Or la suite des uns & des autres est $-\frac{1}{\frac{1}{2}}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{1}{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{\frac{3}{2}}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{\frac{5}{2}}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{\frac{7}{2}}$, $\frac{1}{4}$, ou -2, 0, 2, 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{4}$; donc les puissances qui rempliront ce rang seront a^{-2}, a^0, a^2, a^1, $a^{\frac{2}{3}}$, $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{2}{5}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{2}{7}}$, $a^{\frac{1}{4}}$, &c. c'est-à-dire les réciproques des quarrés, les égaux, les

les secondes puissances, les premieres, les quarrés des racines troisiémes, les racines secondes, les quarrés des racines cinquiémes, les racines troisiémes, les quarrés des racines septiémes, les racines quatriémes, &c. des nombres 0. 1. 2. 3. 4, &c.

Je fais donc une seconde Table semblable à la précédente, où je remplis les vuides du premier rang horisontal, & du premier perpendiculaire, selon ce que je viens de trouver.

Maintenant pour remplir les celulles du troisiéme rang horisontal, j'observe que les rapports qui y sont marqués composant la suite des unités toujours égales entr'elles, les vuides de ce rang doivent aussi être remplis par des unités.

De même les rapports du cinquiéme rang horisontal composant la progression arithmétique 1. 2. 3. 4, &c. je dois remplir les vuides, en sorte que tous les termes soient en progression arithmétique; ainsi ce rang sera $\frac{1}{2}$ 1. $\frac{3}{2}$ 2. $\frac{5}{2}$ 3. $\frac{7}{2}$ 4, &c.

Les rapports du septiéme rang horisontal composent la suite 1. 3. 6. 10. 15, &c. des triangulaires dont les côtés sont les nombres 1. 2. 3. 4, &c. Donc les vuides de ce rang doivent être remplis par des nombres triangulaires dont les côtés sont les nombres des vuides du cinquiéme rang. Je fais donc ces nombres triangulaires en suivant les regles enseignées ci-dessus (*N.* 215.) & ce septiéme rang est $\frac{3}{8}$, 1. $\frac{7}{18}$, 3. $4\frac{3}{8}$, 6. $7\frac{7}{8}$, 10. $12\frac{3}{8}$, 15, &c.

Les rapports du neuviéme rang horisontal sont des nombres pyramidaux dont les côtés sont les nombres du cinquiéme rang. Donc pour remplir les vuides, je dois mettre des pyramidaux dont les côtés soient les nombres des vuides du cinquiéme rang. Je fais donc ces pyramidaux selon les regles enseignées ci-dessus (*N.* 217.) & les nombres de ces rangs sont $\frac{15}{48}$, 1, $2\frac{9}{48}$, 4, $6\frac{27}{48}$, &c.

Les rapports du onziéme rang sont des nombres figurés du quatriéme ordre dont les côtés sont les nombres 1. 2. 3. 4, &c. du cinquiéme rang. Donc je dois remplir les vuides de ce rang de nombres du quatriéme ordre dont les côtés soient les nombres qui rempliront les vuides du cinquiéme rang. Je fais donc ces nombres du quatriéme ordre selon les régles enseignées ci-dessus (*N.* 218.), & les nombres de ce onziéme rang sont $\frac{105}{384}$, 1, &c.

Le troisiéme rang perpendiculaire, le cinquiéme, le septiéme,

SECONDE TABLE

	Réciproques des Racines secondes.	Egaux.	Racines secondes des Restes.	Restes.	Racines secondes de leurs Cubes.	Quarrés des Restes.	Racines secondes des 5es. Puissances.	Cubes.	Racines secondes des 7es. Puissances.	Quatriémes Puissances.
Réciproques des Quarrés.	∞	1		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{15}{48}$		$\frac{105}{384}$
Egaux.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Quarrés.		1		$1\frac{1}{2}$		$1\frac{7}{8}$		$1\frac{9}{48}$		$2\frac{177}{384}$
1eres. puissanc. ou Racines.	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{8}$	3	$3\frac{1}{8}$	4	$4\frac{1}{2}$	5
Quarrés des 3es. Racines.		1		$2\frac{1}{2}$		$4\frac{3}{8}$		$6\frac{27}{48}$		$9\frac{9}{384}$
Secondes Racines.	$\frac{3}{8}$	1	$1\frac{7}{8}$	3	$4\frac{3}{8}$	6	$7\frac{7}{8}$	10	$12\frac{3}{8}$	15
Quarrés des 5es. Racines.		1		$3\frac{1}{2}$		$7\frac{3}{8}$		$14\frac{21}{48}$		$23\frac{177}{384}$
Troisiémes Racines.	$\frac{15}{48}$	1	$2\frac{9}{48}$	4	$6\frac{27}{46}$	10	$14\frac{21}{48}$	20	$26\frac{39}{48}$	35
Quarrés des 7es. Racines.		1		$4\frac{1}{2}$		$12\frac{3}{8}$		$26\frac{49}{48}$		$50\frac{105}{384}$
Quatriémes Racines.	$\frac{105}{384}$	1	$2\frac{177}{384}$	5	$9\frac{9}{384}$	15	$23\frac{177}{384}$	35	$50\frac{105}{384}$	70

Suite des Egaux, moins la Suite des

le neuviéme & le onziéme se rempliront de la même façon, puisque leurs nombres sont les mêmes que ceux du troisiéme horisontal, du 5e. 7e. 9e. & 11e, &c. & quant aux autres rangs horisontaux ou perpendiculaires, il n'est pas possible de remplir les vuides restans, à cause qu'on ne connoît point le caractère de la suite des nombres qui s'y trouvent.

Pour faire usage de cette Table, supposons qu'ayant ôté de la suite des égaux celle des quarrés des nombres 0. 1. 2. 3. 4, &c. on veuille sçavoir le rapport des racines quarrées du reste, on cherchera dans le premier rang perpendiculaire l'endroit où est écrit *Quarrés*, & dans le premier rang horisontal l'endroit où est écrit *Racines secondes des Restes*; & cherchant dans les celulles où sont écrits les rapports, celle qui répond à ces deux endroits, on la trouvera vuide, ce qui fait voir que ce rapport est inconnu; & en effet, si ce rapport pouvoit se trouver la quadrature du cercle seroit trouvée; car nous avons vû ci-dessus (*N.* 172.) que les quarrés des Elemens du cercle sont comme les restes de la suite des égaux moins celles des quarrés, & par conséquent les Elemens sont comme les racines de ces restes.

De même, si après avoir ôté de la suite des égaux la suite des racines quarrées des nombres 0. 1. 2. 3. 4, &c. on veut sçavoir le rapport des racines quarrées du reste, on cherchera dans le premier rang perpendiculaire l'endroit où est écrit *Racines quarrées*, & dans le premier horisontal celui où est écrit *Racines quarrées des Restes*, & cherchant dans les celulles des Rapports, celle qui répond à ces deux endroits, on trouvera $1\frac{7}{8}$, ce qui marque que les racines quarrées du reste sont à la derniere multipliée par le nombre des termes, comme 1 à $1\frac{7}{8}$, ou comme 8 à 15, & ainsi des autres.

APPLICATION A LA GEOMETRIE.

PROPOSITION LXXXII.

222. *Si l'on prend des moyennes proportionnelles entre les Elemens d'un rectangle* ABCD, *& ceux d'un complement* BED *de Parabole quarrée pris perpendiculairement à l'axe* EH, *la somme de ces moyennes proportionnelles sera à la plus grande multipliée par le nombre des termes, comme* 8 *à* 15. (Fig. 110.)

DEMONSTRATION.

Les Elemens du rectangle ABCD font comme R. R. R. R, &c. & ceux du complement pris perpendiculairement à l'axe, font comme les Elemens du rectangle circonfcrit moins les Elemens de la Parabole, & par conféquent comme $R - o$. $R - a^{\frac{1}{2}}$. $R - b^{\frac{1}{2}}$. $R - c^{\frac{1}{2}}$, &c. $R - R$. Multipliant donc les uns par les autres, le produit eft $RR - o$. $RR - a^{\frac{1}{2}}R$. $RR - b^{\frac{1}{2}}$, &c. $RR - RR$, c'eft-à-dire comme le refte de la fuite des égaux moins la fuite des Racines quarrées. Or les moyennes proportionnelles entre les Elemens du rectangle & ceux du complement, font les racines quarrées de ce refte ; donc par la derniere Table ci-deffus la fomme de ces moyennes ou de ces Racines eft à la plus grande, &c. comme 1 à $1\frac{7}{8}$, ou comme 8 à 15.

$$RR - o.$$
$$RR - a^{\frac{1}{2}}R.$$
$$RR - b^{\frac{1}{2}}R.$$
$$RR - c^{\frac{1}{2}}R.$$
&c.
$$RR - RR.$$

$$1AR^2 - \tfrac{2}{3}AR^2 = \tfrac{1}{3}AR^2.$$

REMARQUE.

223. Les quarrés des moyennes proportionnelles étant égaux aux produits des extrêmes, c'eft-à-dire des Elemens du rectangle par ceux du complement, & ces produits étant au plus grand multiplié par le nombre des termes, comme 1 à 3, comme on voit par le calcul, il s'enfuit que les quarrés des moyennes proportionnelles font au plus grand multiplié par le nombre des termes, comme 1 eft à 3. Or ce rapport étant le même que celui des Elemens d'une Pyramide rectiligne, il femble d'abord qu'on puiffe dire que ces quarrés font entr'eux comme les Elemens d'une Pyramide rectiligne, & que par conféquent leurs racines, c'eft-à-dire les moyennes proportionnelles font entr'elles comme les racines des Elemens de la Pyramide, ou comme les Elemens d'un triangle. Mais cependant on fe tromperoit d'en tirer cette conféquence ; car 1°. nous avons fait obferver dans le cours de cet Ouvrage (*N.* 98.) que quoique le rapport d'une Suite foit le même que celui d'une autre, il ne s'enfuit pas que les termes de cette Suite foient entr'eux comme

les termes de l'autre. 2°. Nous avons vû (Proposition XXV.) que les moyennes proportionnelles entre les Elemens d'un rectangle & ceux d'un complement de Parabole quarrée pris paralellement à l'axe sont entr'elles comme les Elemens d'un triangle ; or les Elemens du complement paralelles à l'axe ne sont pas entreux comme les Elemens pris perpendiculaires à l'axe, donc puisque les moyennes proportionnelles entre les Elemens d'un rectangle & les Elemens du complement paralelles à l'axe, forment un triangle, les moyennes proportionnelles entre les Elemens du rectangle & ceux du complement perpendiculaires à l'axe, doivent former une autre figure.

Mais quelle est donc cette figure ? c'est ce que nous allons voir, la somme de ces Elemens doit être plus grande que celle des Elemens du triangle, puisque le rapport de cette somme est $\frac{8}{15}$, au lieu que celui des Elemens du triangle est $\frac{8}{16}$, mais il faut que les quarrés d'une partie de ces Elemens soient plus grands que les quarrés d'une partie des Elemens du triangle, & que les quarrés de l'autre partie soient moindres, de sorte qu'il se fasse une compensation qui rende la somme totale des uns égale à la somme totale des autres ; c'est-à-dire que cette somme de quarrés de part & d'autre soit au plus grand multiplié par le nombre des termes comme 1 à 3. Or pour cela il faut nécessairement que la ligne qui passe par les extrêmités des moyennes proportionnelles soit une courbe dont la concavité soit en partie tournée en dedans, & en partie en dehors, à peu près comme elle est representée dans la Figure.

La Figure HILMN represente la Pyramide que doivent former les quarrés des moyennes proportionnelles.

PROPOSITION LXXXIII.

224. *Si l'on prend des moyennes proportionnelles entre les Elemens d'un complement* ABC *de Parabole quarrée pris perpendiculaires à l'axe* AH, *& ceux de la somme d'un rectangle* BCED *& de la demi-Parabole* DEF, *la somme de ces moyennes proportionnelles sera à la plus grande multipliée par le nombre des termes, comme 2 à 3.* (Fig. 111.)

DEMONSTRATION.

Les Elemens du complement sont comme $R - o$. $R - a^{\frac{1}{2}}$. $R - b^{\frac{1}{2}}$, &c. $R - R$, &c. & ceux de la somme du rectangle

& de la demi-Parabole, comme $R + o$. $R + a^{\frac{1}{2}}$. $R + b^{\frac{1}{2}}$, &c. $R + R$. Multipliant donc les uns par les autres, le produit est comme $RR - o$. $RR - a$. $RR - b$, &c. $RR - RR$, ou comme la suite des égaux moins la suite des premieres puissances ou des premieres racines. Or selon la seconde Table ci-dessus, les racines de ces restes sont à la plus grande multipliée par le nombre des termes, comme 1 à $1\frac{1}{2}$, ou comme 2 à 3. Donc les moyennes proportionnelles égales à ces racines sont aussi à la derniere multipliée par le nombre des termes, comme 2 à 3.

$$\begin{array}{l} RR - o \\ RR - a. \\ RR - b. \\ RR - c. \\ \&c. \\ RR - RR. \\ \hline ARR - \frac{1}{2}ARR = \frac{1}{2}ARR. \end{array}$$

La Figure MNSPQ represente le solide fait par le complement, & la somme du rectangle & de la demi-Parabole, & la Figure RXYZT représente le solide fait par les quarrés des moyennes proportionnelles.

REMARQUE.

225. La Figure formée par les moyennes proportionnelles est une demi-Parabole quarrée égale à la demi-Parabole DEF; car non-seulement leur rapport est égal à celui des Elemens de la demi-Parabole, mais encore le rapport $\frac{1}{2}$ de leurs quarrés est égal au rapport des quarrés des Elemens de la demi-Parabole, & les derniers termes sont égaux, ce qui ne sçauroit être sans une parfaite égalité de part & d'autre, parce qu'il peut se faire à la vérité que deux ou plusieurs suites differentes de quarrés différens, ayent un même rapport à leur dernier terme multiplié par le nombre des termes, mais alors les racines de ces différentes suites n'ont pas le même rapport à leur dernier terme multiplié par le nombre des termes; & par conséquent s'il se trouve que le rapport soit le même dans les suites des racines, & que le dernier terme & le nombre des termes soit égal de part & d'autre, comme il arrive ici, il y a nécessairement une égalité parfaite de toutes parts.

Et pour démontrer visiblement ce qui vient d'être dit. Soit le triangle ABC (*Fig.* 112.) dont le rapport à sa base multipliée par la hauteur est comme 1 à 2. Si je veux sur une même base

& une même hauteur faire une Figure dont le rapport soit aussi comme 1 à 2. Je le puis aisément; car je n'ai qu'à diminuer d'un côté la longueur des Elemens, & l'augmenter d'autre part d'autant, ce qui me donnera une Figure différente du triangle, & cependant de même rapport, telle qu'est par exemple la Figure *cdegba*. Mais je dis qu'alors les quarrés de cette Figure n'auront pas le même rapport que ceux du triangle; car si les Elemens de cette Figure sont plus grands par le haut & moindre par les bas, les quarrés d'enhaut deviendront moins grands que ceux d'en bas ne deviendront petits; par exemple le quarré de l'Element *sd* étant égal $\overline{sr}^2 + 2sr \times rd + \overline{rd}^2$ surpassera le quarré $\overline{sr}^2$ de l'Element du triangle de $2sr \times rd + \overline{rd}^2$; & au contraire le quarré de l'Element *ho* étant égal à $\overline{hx}^2 - 2ho \times ox + \overline{xo}^2$ sera moindre que le quarré $\overline{hx}^2$ de l'Element du triangle de $2ho \times ox + \overline{ox}^2$; or comparant l'excès $2sr \times rd + \overline{rd}^2$ du quarré de *sd* avec le défaut $2ho \times ox + \overline{ox}^2$ du quarré $\overline{ho}^2$, nous avons $\overline{rd}^2 = \overline{ox}^2$; mais $2sr \times rd$ est moindre que $2ho \times ox$, & par conséquent $\overline{ho}^2$ perd plus que le quarré $\overline{sd}^2$ ne gagne. Donc les quarrés $\overline{sd}^2$, $\overline{ho}^2$ pris ensemble valent moins que les quarrés $\overline{sr}^2$, $\overline{hx}^2$ des Elemens correspondans du triangle pris ensemble, & comme cela arrivera toujours en comparant les quarrés des Elemens augmentés avec ceux des Elemens diminués, il s'ensuit que la somme des quarrés des Elemens du triangle sera plus grande que la somme des quarrés de la Figure égale au triangle; & par conséquent le rapport au quarré de la même base multiplié par la même hauteur, ne sera pas égal de part & d'autre.

Si l'on augmentoit les Elemens par le bas & qu'on les diminuat par le haut, on prouveroit de la même façon que les quarrés de la Figure seroient plus grands que ceux du triangle; en un mot de quelque maniere qu'on augmente ou qu'on diminue en conservant toujours l'égalité dans les sommes des Elemens, jamais il n'y aura égalité dans les sommes des quarrés.

Et de même s'il se trouve égalité de rapports dans deux sommes de différens quarrés, le dernier terme & le nombre de termes étant égal de part & d'autre, il n'y aura point égalité de rapports dans les deux sommes des racines, puisque si cette

égalité se rencontroit, elle ne pourroit être dans les sommes des quarés, comme nous venons de le démontrer.

PROPOSITION LXXXIV.

226. *Si l'on prend des moyennes proportionnelles entre les Elemens d'un rectangle* ABCD *& ceux d'un complement* DCE *de parabole du second genre pris perpendiculairement à l'axe, ces moyennes proportionnelles seront à la plus grande multipliée par le nombre des termes, comme* 48 *à* 105.

DEMONSTRATION.

Les Elemens du rectangle sont comme R. R. R, &c. R; & ceux du complement comme R — o. R — $a^{\frac{1}{3}}$. R — $b^{\frac{1}{3}}$, &c. R — R. Multipliant donc les uns par les autres, le produit est comme RR — oR. RR — $a^{\frac{1}{3}}$R. RR — $b^{\frac{1}{3}}$R, &c. RR — RR, ou comme le reste de la somme des égaux moins la suite des troisiémes racines. Donc par la seconde Table précédente, la somme des racines de ce reste est à la derniere multiplié par le nombre des termes, comme 48 à 105. Or les moyennes proportionnelles sont comme ces racines; donc, &c.

RR — o
RR — $a^{\frac{1}{3}}$R
RR — $b^{\frac{1}{3}}$R
&c.
RR — RR.

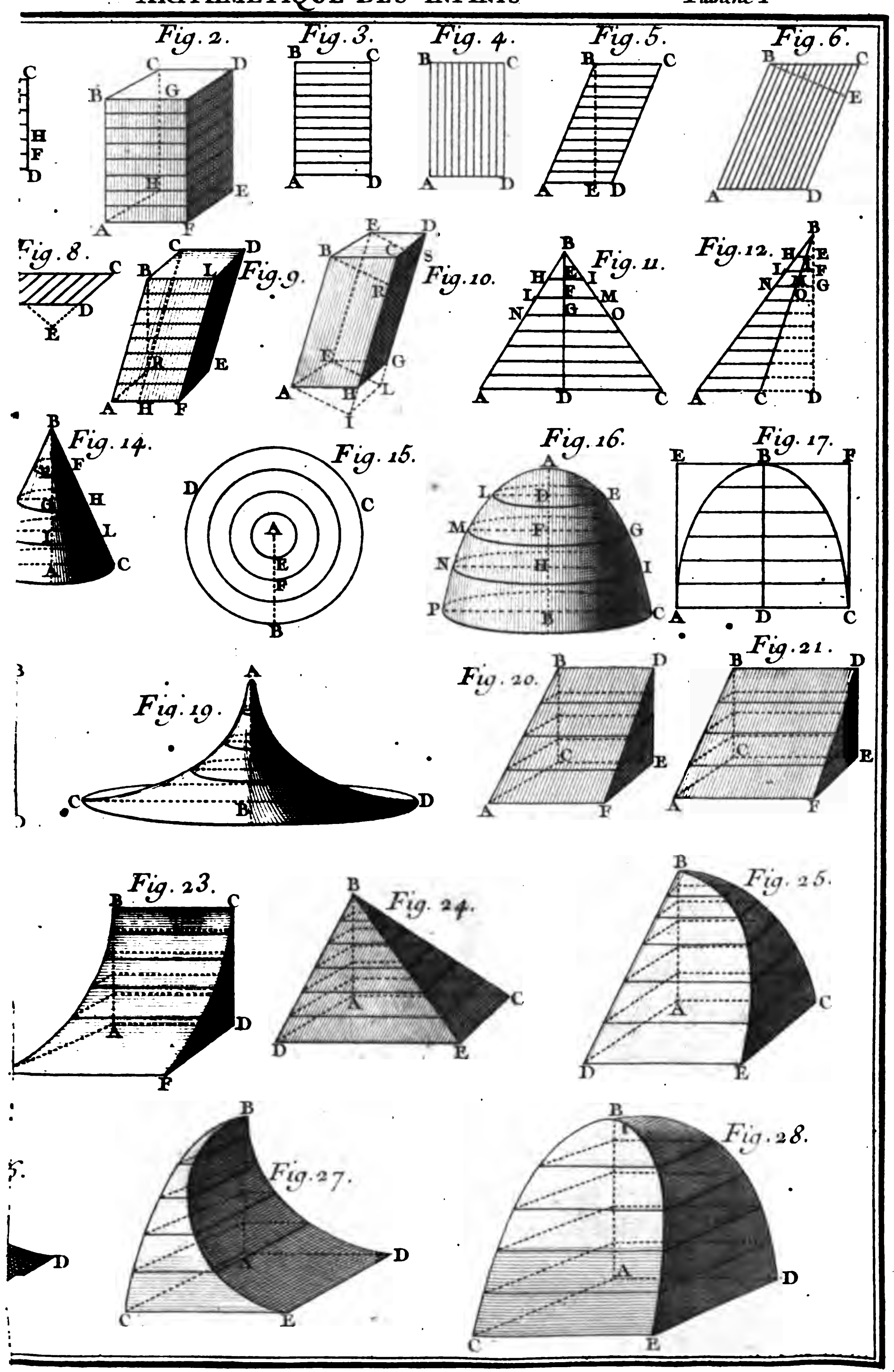
ARR — $\frac{3}{4}$ AR^2 = $\frac{1}{4}$ AR^2.

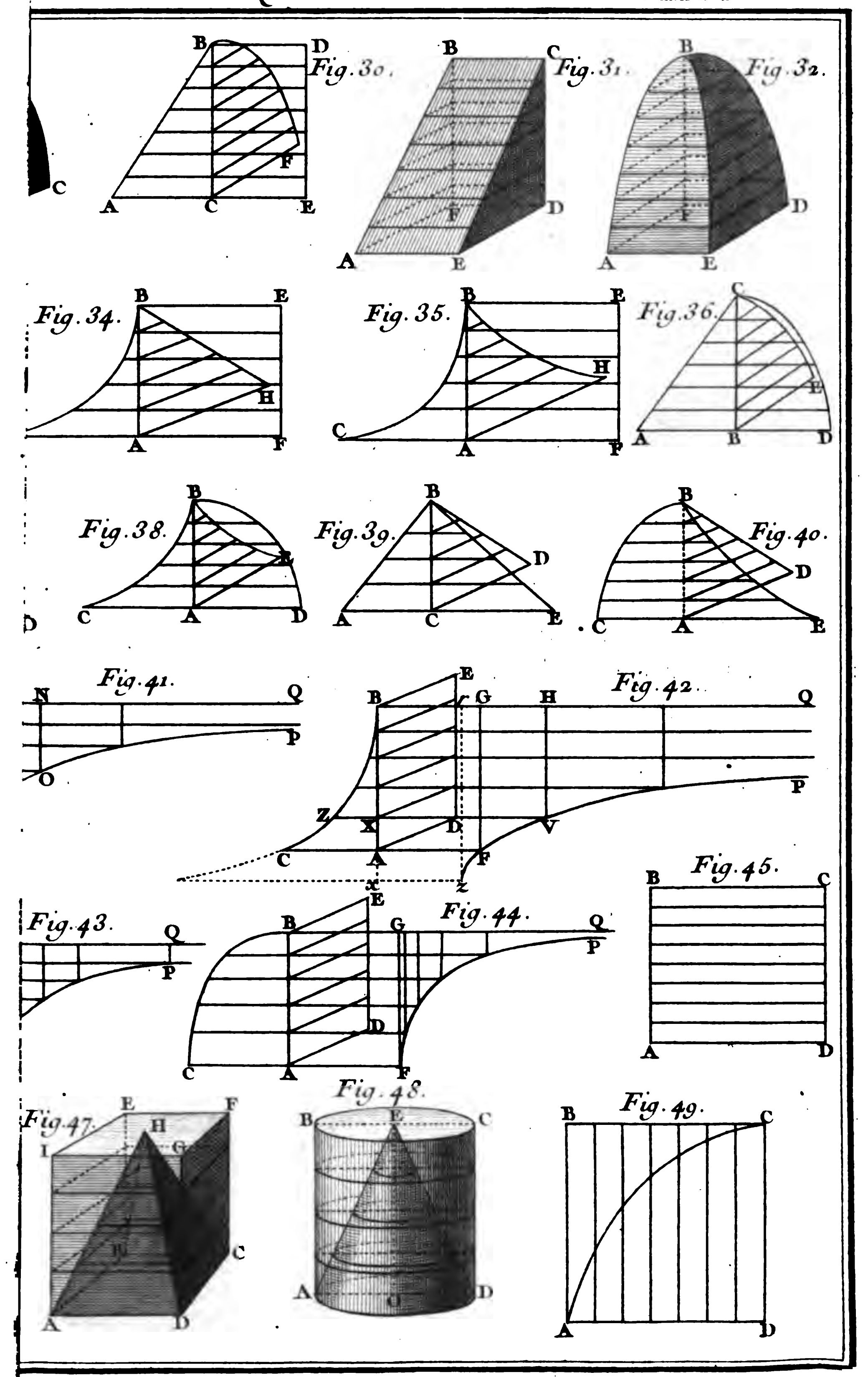
Le courbe qui passe par les extrémités des moyennes proportionnelles a sa concavité partie en dedans & partie en dehors, parce que les moyennes proportionnelles deviennent plus grandes par le bas par rapport à leur petite extrême, qu'elles ne le sont par le haut.

La Figure *abcdef* represente le solide fait par le produit des Elemens du rectangle & du complement, & la Figure MNOPQ represente le solide fait par les quarrés des moyennes proportionnelles. L'un & l'autre de ces solides est au quarré de la base AD ou BC du rectangle multiplié par la hauteur, comme 1 à 4.

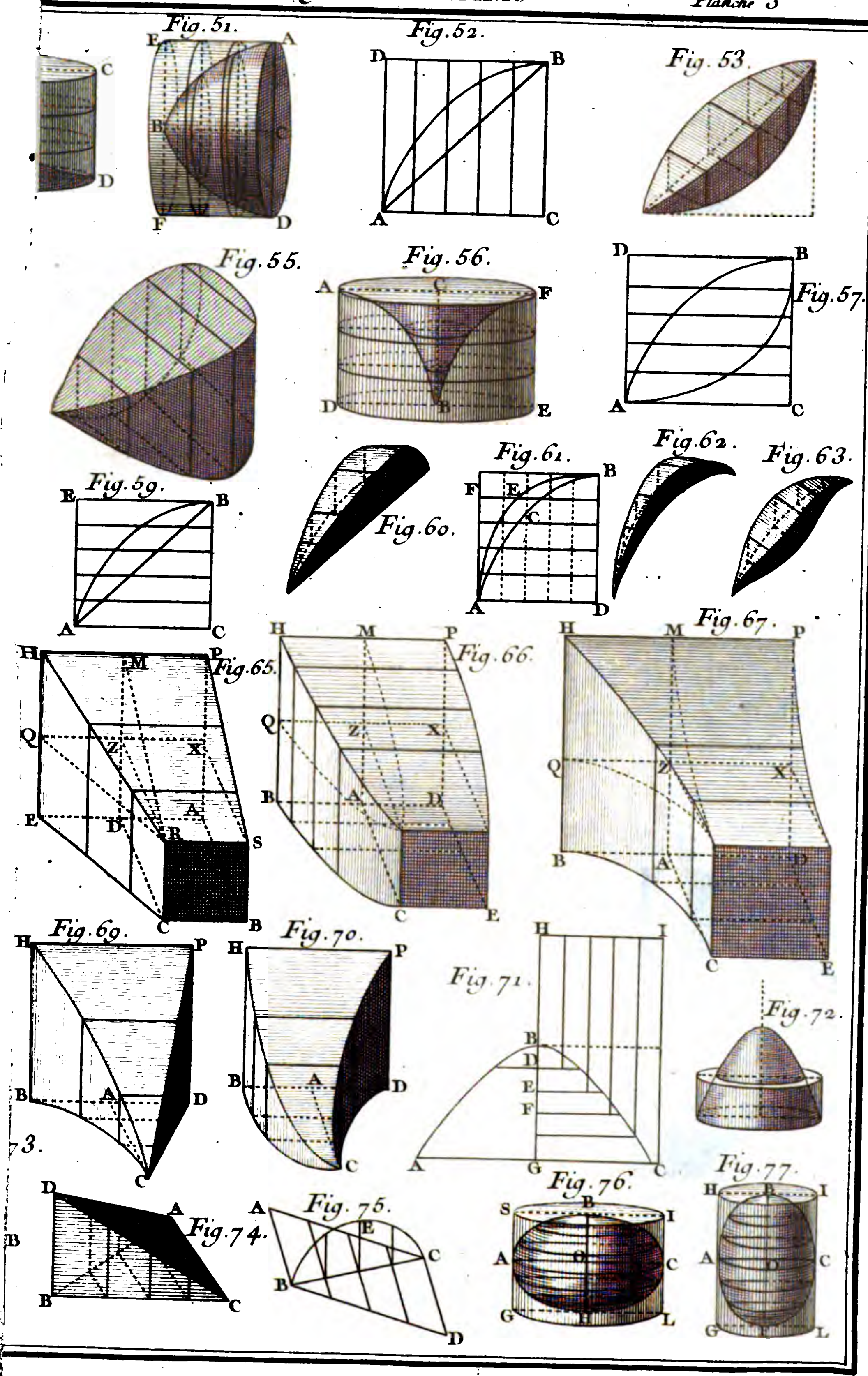
Je pourrois ajoûter ici grand nombre d'autres Propositions, mais ce que j'en ai dit suffit pour résoudre aisément tous les Problêmes de cette nature.

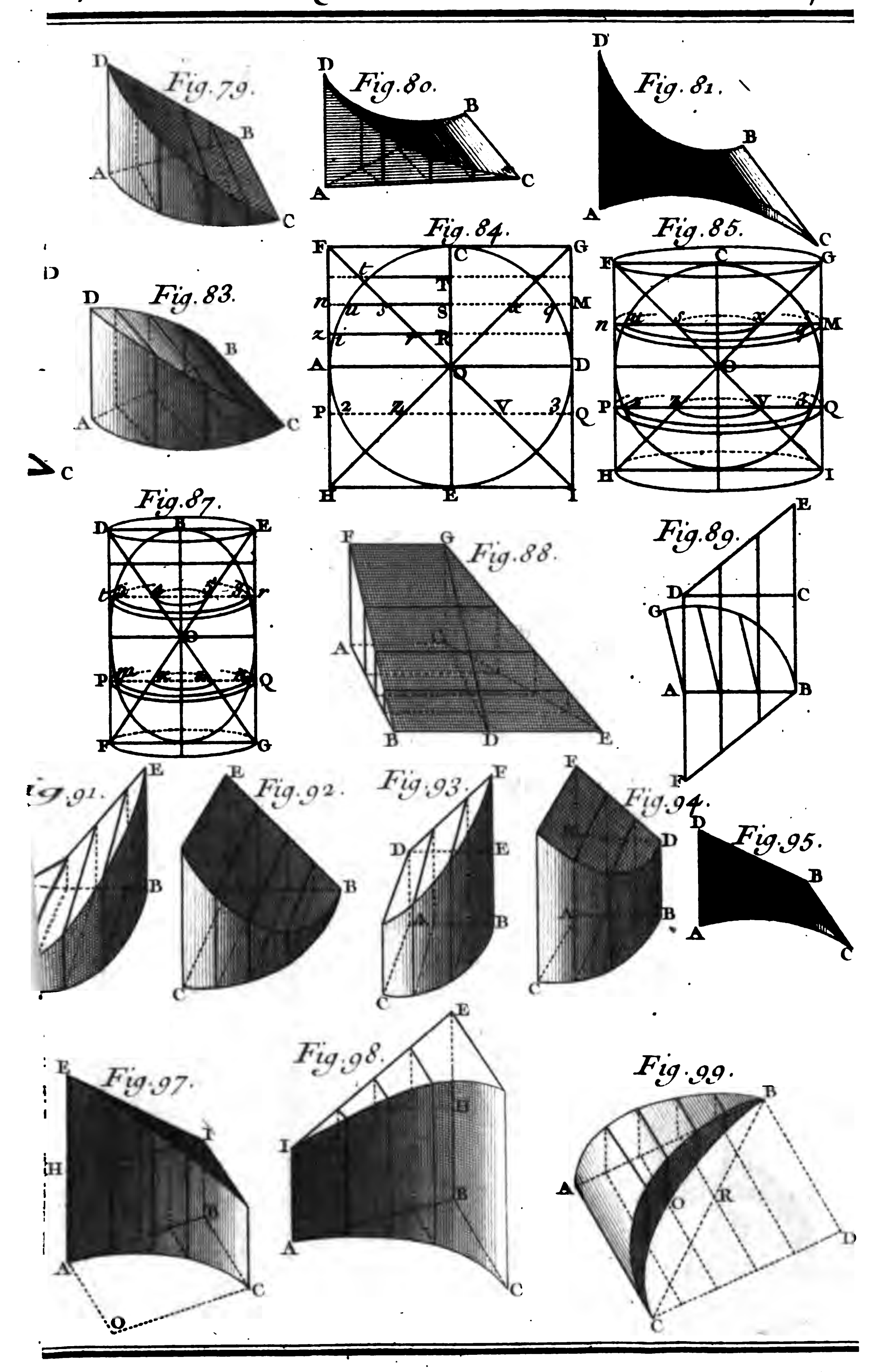
Fin du Premier Livre.

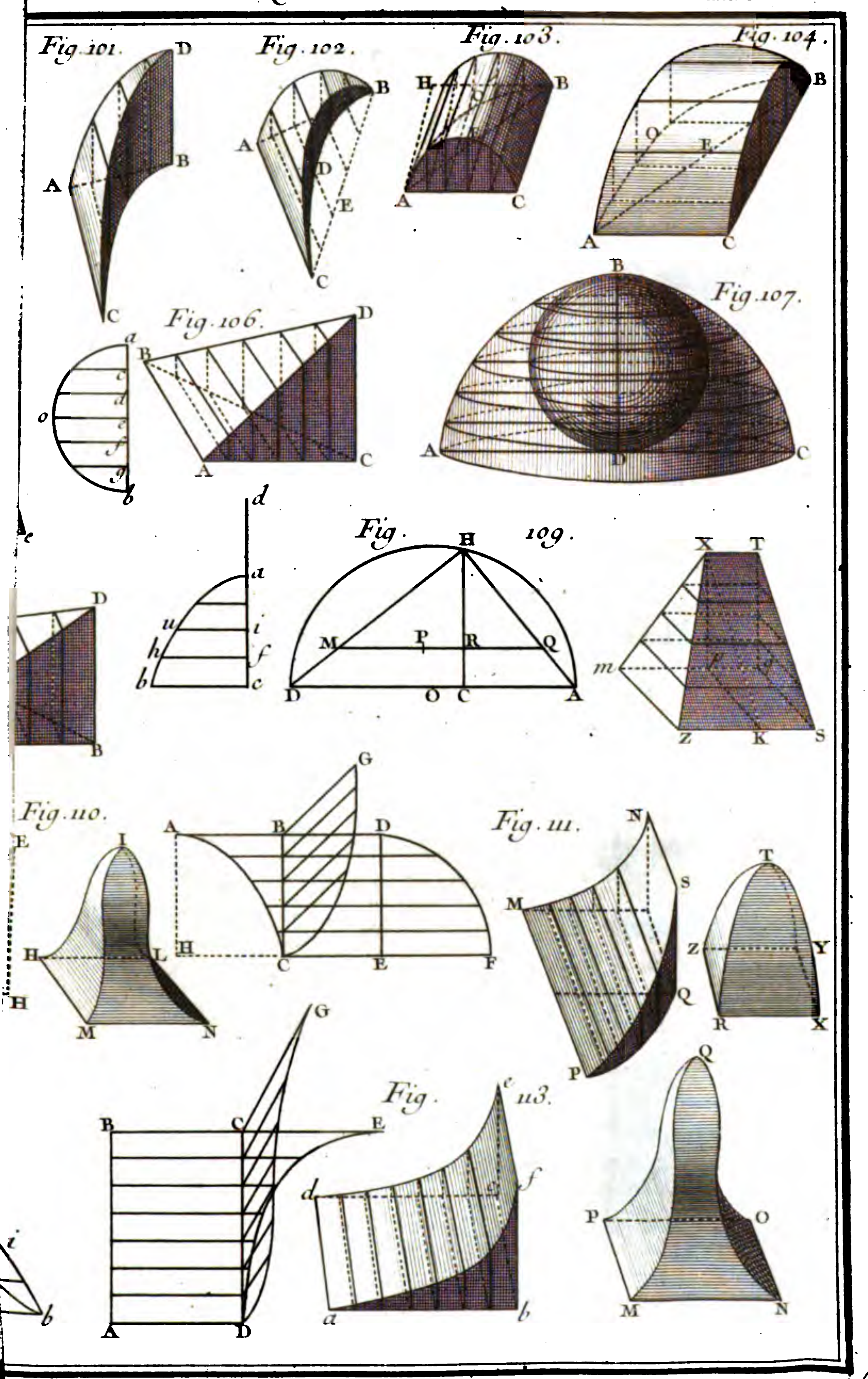

Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 27.
Fig. 28.


Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49.

H
Q
E
H
B
-3.
I
B
B


Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 72.
73.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 77.


Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 81.
Fig. 83.
Fig. 84.
Fig. 85.
Fig. 87.
Fig. 88.
Fig. 89.
Fig. 91.
Fig. 92.
Fig. 93.
Fig. 94.
Fig. 95.
Fig. 97.
Fig. 98.
Fig. 99.


Fig. 101.
Fig. 102.
Fig. 103.
Fig. 104.
Fig. 106.
Fig. 107.
Fig. 109.
Fig. 110.
Fig. 111.
Fig. 113.



LA MESURE DES SURFACES ET DES SOLIDES, PAR L'ARITHMETIQUE DES INFINIS, ET LES CENTRES DE GRAVITE'.

****

LIVRE SECOND.

Où l'on cherche la mesure des Surfaces & des Solides par les centres de Gravité.

AVERTISSEMENT.

Qui sert d'Introduction à ce second Livre.



M'ETANT apperçû dans le courant de l'impression de ce second volume, que j'avois donné quelques resultats de calcul algebrique qui pourroit embarrasser les Commençans, j'ai crû devoir leur expliquer la methode particuliere que j'ai employé pour y parvenir, afin qu'ils puissent trouver ces resultats avec plus de

facilité, & comprendre avec moins de peine le ſujet que nous traitons. Voici donc de quoi il s'agit.

On ſçait que pour multiplier un entier par une fraction, il faut multiplier l'entier par le numérateur, & diviſer le produit par le dénominateur. Or quoiqu'il paroiſſe d'abord que ces deux opérations ne ſoient pas ſuſceptibles de difficultés, cependant elles en ſouffrent de grandes dans les calculs algebriques lorſque l'entier eſt composé de pluſieurs termes, de même que le numérateur & le dénominateur de la fraction, & ces difficultés proviennent ou des termes que les ſignes plus ou moins font évanouir lorſque l'on fait la multiplication, ou des coefficients des termes de l'entier, leſquels ſont quelquefois des fractions. Pour abreger donc dans ces ſortes de cas, j'ai imaginé une methode qui eſt extrêmement commode dans la recherche des centres de gravité, & qui pouvant être utile en d'autres occaſions mérite bien que je l'explique ici.

Soit par exemple la grandeur $sr^2 - ar^2 + aur$ à diviſer par la fraction $\frac{2asr - a^2r + a^2u - 2ur^2}{sr - ar + au}$. Selon la methode ordinaire il faudroit multiplier tous les termes de la grandeur propoſée par ceux du numérateur de la fraction & diviſer enſuite par le dénominateur, mais pour éviter la confuſion du trop grand nombre des

	Reſultat du quotient.
$sr^2 - ar^2 + aur$	$2asr^2 - a^2r^2 + a^2ur - 2ur^3$
$2asr - a^2r + a^2u - 2ur^2$	
$2as^2r^3 - 2a^2sr^3 + 2a^2usr^2$	Premier produit.
$sr - ar + au$	
$- a^2sr^3 + a^3r^3 - a^3ur^2$	2e. produit.
$sr - ar + au$	
$a^2usr^2 - a^3ur^2 + a^3u^2r$	3e. produit.
$sr - ar + au$	
$- 2usr^4 + 2aur^4 - 2au^2r^3.$	4e. produit.
$sr - ar + au$	

termes du produit, je ne multiplie dabord la grandeur propoſée

que par le premier terme $2asr$ du numérateur, ce qui me donne un produit, lequel étant divifé par le dénominateur me donne le premier terme $2asr^2$ du quotient.

Je multiplie enfuite la grandeur propofée par le fécond terme $-a^2r$ du numérateur, & j'ai un fecond produit, qui étant divifé par le dénominateur, me donne le fecond terme $-a^2r^2$ du quotient.

Je multiplie la grandeur propofée par le troifiéme terme $+a^2u$, & divifant le produit par le dénominateur, le quotient $+a^2ur$ eft le troifiéme terme du quotient que je cherche.

Enfin je multiplie la grandeur propofée par le dernier terme $-2ur^2$ du numérateur, & divifant le produit par le dénominateur, le quotient $-2ur^3$ eft le dernier terme du quotient que je cherche. Donc la grandeur propofée multipliée par la fraction eft le refultat $2asr^2 - a^2r^2 + a^2ur - 2ur^3$.

Soit de même la grandeur $\frac{1}{2}a^2r + asr - ur^2$ à multiplier par la fraction $\frac{12ar^2 - 12sr^2 - 12aur + 2a^3 + 6a^2s}{3a^2 + 6as - 6ur}$.

$$\frac{1}{2}a^2r + asr - ur^2$$
$$a^2r + 2asr - 2ur^2$$
$$6ar^2 - 6sr^2 - 6anr + a^3 + 3a^2s$$

Refultat. $2ar^3 - 2sr^3 - 2aur^2 + \frac{1}{3}a^3r + a^2sr$

$$\frac{6a^3r^3 + 12a^2sr^3 - 12aur^4}{3a^2 + 6as - 6ur}$$ Premier produit.

$$\frac{-6a^2sr^3 - 12as^2r^3 + 12usr^4}{3a^2 + 6as - 6ur}$$ 2e. produit.

$$\frac{-6a^3ur^2 - 12a^2sur^2 - 12au^2r^3}{3a^2 + 6as - 6ur}$$ 3e. produit.

$$\frac{a^5r + 2a^4sr - 2a^3ur^2}{3a^2 + 6as - 6ur}$$ 4e. produit.

$$\frac{3a^4sr + 6a^3s^2r - 6a^2sur^2}{3a^2 + 6as - 6ur}$$ 5e. produit.

Je reduis tous les termes de la grandeur propofée en fraction dont le dénominateur foit 2, & j'ai en négligeant le dénomina-

teur $a^2r + 2asr - 2ur^2$ que je dois multiplier par le premier terme $12ar^2$ de la fraction ; mais comme le produit se trouveroit double de ce qu'il doit être, puisqu'il faudroit le diviser par 2, & que le terme $12ar^2$ peut se diviser par 2, je ne multiplie que par la moitié $6ar^2$, ainsi le produit $6a^3r^3$, &c. est tel qu'il doit être. J'écris le dénominateur $3a^2 + 6as - 6ur$ sous ce produit, & je vois que les coefficients du produit & du dénominateur donnent 2 pour le coefficient du quotient & faisant la division, le premier terme du quotient que je cherche est $2ar^3$.

Je multiplie ensuite $a^2r + 2asr - 2ur^2$ par la moitié $-6sr^2$ du second terme $-12sr^2$ du numérateur, & divisant par le dénominateur je trouve que le coefficient de chaque terme a un même rapport 2 au coefficient de chaque terme du dénominateur ; faisant donc la division, le second terme du quotient que je cherche est $-2sr^2$, & continuant de la même façon, le quotient total est $2ar^3 - 2sr^3 - 2aur^2 + \frac{1}{3}a^3r + a^2sr$. Où il est aisé de voir pourquoi le coefficient du quatriéme terme $\frac{1}{3}a^3r$ est $\frac{1}{3}$, car il est évident que les coefficients 1. 2. 2. du quatriéme produit ont tous le même rapport $\frac{1}{3}$ aux coefficients 3. 6. 6. du dénominateur.

Soit la grandeur $\frac{1}{2}ar^2 + \frac{1}{6}sr^2 + \frac{1}{6}sur$ à multiplier par $\frac{15ar^2 + sr^2 + 7sur - 2s^3}{12ar + 4sr + 4su}$. Je reduis les termes de la grandeur pro-

$$\frac{1}{2}ar^2 + \frac{1}{6}sr^2 + \frac{1}{6}sur$$

$$3ar^2 + sr^2 + sur$$

$$15ar^2 + sr^2 + 7sur - 2s^3$$

Rusultat.

$$\frac{5}{8}ar^3 + \frac{1}{24}sr^3 + \frac{7}{24}sur^2 - \frac{1}{12}s^3r$$

$$\frac{45a^2r^4 + 15asr^4 + 15asur^3}{72ar + 24sr + 24su}$$ Premier produit.

$$\frac{3asr^4 + s^2r^4 + s^2ur^3}{72ar + 24sr + 24su}$$ 2e. produit.

$$\frac{21asur^3 + 7s^2ur^3 + 7s^2u^2r^2}{72ar + 24sr + 24su}$$ 3e. produit.

$$\frac{-6as^3r^2 - 2s^4r^2 - 2s^4ur}{72ar + 24sr + 24su}$$ 4e. produit.

posée en fractions dont le dénominateur commun est 6, & né-

gligeant ce dénominateur, j'ai $3ar^2 + sr^2 + sur$ que je multiplie par le premier terme $15ar^2$ du numérateur, après quoi le produit se trouvant six fois plus grand qu'il ne doit être, je le divise par 6, ou bien comme il faut le diviser par le dénominateur je multiplie ce dénominateur par 6, ce qui donne $72ar + 24sr + 24su$, & comparant les coefficients de chaque terme avec les coefficients des termes correspondans du dénominateur multiplié par 6, en les reduisant les uns & les autres à leurs moindres termes, je trouve que leur rapport est $\frac{5}{8}$, faisant donc la division, le premier terme du quotient que je cherche est $\frac{5}{8}ar^3$.

Je multiplie de même $3ar^2 + sr^2 + sur$ par le second terme du numerateur, & le produit se trouvant encore six fois plus grand qu'il ne faut, je multiplie le dénominateur par 6, après quoi comparant les coefficients des termes du produit avec les coefficients des termes du dénominateur, ainsi multiplié, je trouve après les avoir reduits à leurs moindres expressions que leur rapport est $\frac{1}{24}$, & faisant la division, le second terme du quotient que je cherche est $\frac{1}{24}sr^3$, & continuant de la même façon le quotient total est $\frac{5}{8}ar^3 + \frac{1}{24}sr^3 + \frac{7}{24}sur^2 - \frac{1}{12}s^3r$, & ainsi des autres.

Cette methode suppose que chaque produit ait autant de termes que le dénominateur, & que les mêmes lettres se trouvent dans les termes correspondans, ce qui arrive presque toujours lorsqu'il s'agit des centres de gravité, comme on verra dans la suite.

CHAPITRE PREMIER.

Principes de Mécanique, servant d'Introduction à ce second Livre.

DEFINITION PREMIERE.

1. ON dit que les corps sont en *mouvement* lorsqu'ils sont transportés d'un lieu à un autre.

DEFINITION II.

2. La force qui met les corps en mouvement s'appelle *Force Motrice*.

DEFINITION III.

3. La *pesanteur* des corps est la force qui les fait descendre vers le centre de la terre, que l'on appelle pour cela *Centre des Graves*.

DEFINITION IV.

4. La *vitesse* des corps s'estime par les espaces qu'ils parcourent dans des tems égaux. Si le corps A, par exemple, parcourt dans une minute l'espace AC, (*Fig.* 1.) & que le corps B, dans la même minute, parcoure l'espace BD double, triple, quadruple, &c. de l'espace AC, on dira que le corps B a une vitesse double, triple, quadruple, &c. de celle du corps A.

DEFINITION V.

5. Il y a deux sortes de vitesses *l'Uniforme* & *l'Accelerée* à laquelle on peut joindre la retardée. La vitesse *Uniforme* fait parcourir à un corps dans des tems égaux des espaces égaux; *l'Accelerée* lui fait parcourir dans des tems égaux des espaces qui deviennent toujours plus grands; & la retardée lui fait parcourir des espaces qui deviennent moindres.

Si le corps A, par exemple, (*Fig.* 2.) parcourt dans la premiere minute l'espace AB, dans la seconde l'espace BC égal à l'espace AB, & ainsi de suite, la vitesse de ce corps sera *Uniforme*. Mais si au contraire ce même corps parcourt dans la premiere minute l'espace AB, dans la seconde l'espace BD, triple de l'espace AD, & ainsi de suite dans la progression des nombres impairs 1. 3. 5. 7. &c. qui est la progression qui se trouve dans le mouvement des corps qui tendent librement au centre de la terre, ou dans telle autre progression qu'on voudra, la vitesse de ce corps sera accelerée. Enfin si ce même corps parcourt dans la premiere minute un espace qui soit par exemple comme 9, dans la seconde un espace comme 7, dans la troisiéme un espace comme 5, & ainsi de suite, selon la progression descendante des nombres impairs 9. 7. 5. 3. &c. qui est la progression qui se trouve dans le mouvement des corps qui s'éloignent du centre de la terre, ou dans telle autre progression qu'on voudra, la vitesse de ce corps sera retardée.

DEFINITION VI.

6. Lorsqu'un ou plusieurs corps A, B, C, &c. (*Fig.* 3.) tournent autour d'un point fixe D, ou d'une ligne immobile EF, le point D s'appelle *Centre* de mouvement, & la ligne EF *Axe* de mouvement.

DEFINITION VII.

7. Lorsque deux ou plusieurs corps se contrebalancent par des forces contraires qui leur procurent le repos, ces corps sont dits *être en équilibre*. Le point autour duquel ils sont en repos s'appelle *centre* d'équilibre, & si c'est une ligne, on l'appelle axe d'équilibre.

Soit une verge ou levier AB (*Fig.* 4.) inflexible que nous supposons sans pesanteur, & qui tourne autour du point fixe C ou de la ligne immobile EF. Soient aussi deux corps A, B posés aux deux extremités de ce levier. Le corps A tendant par sa pesanteur au centre de la terre ne peut descendre à cause de l'inflexibilité du levier, sans faire monter le corps B en l'éloignant de ce même centre, & par la même raison le corps B ne peut descendre sans faire monter le corps A, & lui donner un mouvement contraire, voila donc deux forces contraires; ainsi si ces forces se contrebalancent en sorte que les corps A, B, demeurent en repos, on dira que ces corps sont *en équilibre* autour du point C, ou de la ligne EF, qu'on appellera *centre*, ou *axe* d'équilibre.

Il faut concevoir ici, & dans tout ce que nous dirons dans la suite, à moins que nous n'avertissions du contraire. 1°. Que le levier AB & la ligne EF, sont dans un plan horisontal & perpendiculaires entr'eux. 2°. Que le levier AB tournant autour du point fixe C, est toujours perpendiculaire à EF, & décrit un plan perpendiculaire à l'horison.

DEFINITION VIII.

8. Le produit des masses ou des solidités des corps par leurs vitesses, s'appelle *quantité de mouvement*, parce qu'il faut plus ou moins de force pour mouvoir dans un même tems un corps plus ou moins grand, avec plus ou moins de vitesse.

Lorsque deux ou plusieurs corps A, B, attachés à un levier AB, tournent autour d'un point fixe C, ou d'une ligne immo-

bile EF, (*Fig.* 5.) ils décrivent dans le même tems des circonferences, ARS, BHI, qui sont par conséquent comme leurs vitesses; ainsi le produit du corps A par la circonference ARS, est la quantité de mouvement du corps A, & le produit du corps B par la circonference BHI, est la quantité de mouvement du corps B. Or les circonferences étant entr'elles comme leurs rayons AC, CB, il est sûr que les produits des corps par les rayons, seront entr'eux comme les produits de ces mêmes corps par les circonferences, c'est-à-dire, $A \times AC$, $B \times BC :: A \times ARS$, $B \times BHI$; & que par conséquent on pourra exprimer le rapport des quantités de mouvement de ces corps par l'une ou l'autre de ces deux raisons. Or quand on exprime les quantités de mouvement par les produits des corps, par les rayons AC, BC, c'est-à-dire, par les distances des corps au centre C de mouvement, ces quantités s'appellent communement *momens* des corps A, B.

PROPOSITION PREMIERE.

9. *Si deux corps égaux* A, B, (Fig. 6.) *parcourent des espaces égaux* AC, BD, *dans des tems égaux, leurs forces motrices sont égales.*

DEMONSTRATION.

Nous supposons tous les corps composés d'une matiere homogene, qui est la même dans toutes ses parties. Or cela posé concevons que la force motrice du corps A soit appliquée au corps B, elle lui communiquera un mouvement égal à celui du corps A, puisque l'un & l'autre sont égaux. Donc la vitesse BD sera égale à la vitesse AC; mais par la supposition la force qui meût le corps B lui donne la même vitesse BD, donc la force motrice de B, est égale à la force motrice de A, l'une & l'autre faisant les mêmes effets.

PROPOSITION II.

10. *Si deux corps d'égale masse* A, B, (Fig. 6.) *parcourent dans des tems égaux des espaces inégaux* AH, BD, *leurs forces sont entr'elles comme leurs vitesses, ou comme les espaces parcourus.*

DEMONSTRATION.

Concevons que la force du corps A soit appliquée sur le corps B, par la Proposition précédente, elle lui fera parcourir un espace BI

BI égal à l'espace AH; ainsi supposant que le reste ID soit égal à BI, il faudra quand le corps B sera parvenu en I, lui appliquer une autre force égale à celle du corps A, pour lui faire parcourir dans un tems égal au premier l'espace ID. Donc la force qui feroit parcourir BI, & celle qui feroit parcourir ID prises ensemble, valent deux fois la force motrice du corps A. Or la force motrice qui fait parcourir au corps B l'espace BD faisant le même effet que les deux forces ensemble, est égale à la somme de ces deux forces, donc elle est égale à deux fois la force A; donc elle est à la force du corps A comme 2 à 1, ou comme la vitesse BD à la vitesse AH.

PROPOSITION III.

11. *Si deux corps d'inégale masse* A, B, (Fig. 7.) *parcourent dans des tems égaux des espaces égaux* OE, RH, *leurs forces sont entr'elles comme leurs masses.*

DEMONSTRATION.

Supposons que B soit double de A, je coupe B en deux parties égales C, D, qui seront chacune égales au corps A. Par la premiere Proposition la force qui fera parcourir à C l'espace RH, sera égale à la force de A, & celle qui fera parcourir à D le même espace sera aussi égale à la force du corps A, donc la somme des deux sera double de la force A; or la force de B est égale aux deux forces ensemble, donc elle est à la force de A comme 2 à 1, ou comme la masse B à la masse A.

PROPOSITION IV.

12. *Si deux corps d'inégale masse* A, B, (Fig. 8.) *parcourent dans des tems égaux, des espaces inégaux* AC, BD, *leurs forces sont entr'elles en raison composée des masses & des vitesses, ou comme les produits des masses par les vitesses.*

DEMONSTRATION.

Supposons le corps B double du corps A, l'espace BD égal à six pieds, & l'espace AC égal à deux pieds, si le corps B ne parcouroit que deux pieds comme le corps A, sa force seroit double de celle du corps A par la Proposition précédente. Or pour faire parcourir à ce même corps B un espace de six pieds, c'est-à-dire, triple de deux pieds, il faut par la deuxiéme Proposition

une force triple de celle qu'il auroit en ne parcourant que deux pieds, donc il lui faut trois fois la force double de celle du corps A, c'est-à-dire une force sextuple de celle du corps A, mais la force du corps A est comme 2, parce qu'elle est double de celle qui ne fairoit parcourir qu'un pied, donc la force du corps B est comme 12, & par conséquent ces deux forces sont entr'elles comme 2 à 12, c'est-à-dire, comme le produit du corps A = 1 par sa vitesse AC = 2 au produit du corps B = 2 par sa vitesse BD = 6, car ces deux produits sont 2 & 12.

COROLLAIRE I.

13. Cette Proposition est également véritable, soit que les masses & les espaces parcourus soient égaux, soit que les masses soient égales & les espaces inégaux, soit enfin que les masses soient inégales & les espaces égaux, car dans le premier cas, qui est celui de la premiere Proposition, les masses étant égales & les vitesses aussi, les produits des uns par les autres seront aussi égaux de même que les forces. Dans le second cas, qui est celui de la seconde Proposition, les masses étant égales, & les vitesses inégales, le produit des unes par les autres seront encore comme les vitesses, attendu que les produits de deux grandeurs égales par des grandeurs inégales sont entr'eux comme les grandeurs inégales; & par la même raison dans le troisiéme cas, qui est celui de la troisiéme Proposition, les masses étant inégales & les vitesses égales, les produits des uns par les autres seront entr'eux comme les masses.

COROLLAIRE II.

14. Nous avons vû dans la Définition VIII. que les *Momens* des corps attachés à un levier, sont entr'eux comme les produits de leurs masses par les vitesses, ou comme les quantités de mouvement. Or par la Proposition présente les forces sont aussi entr'elles comme ces produits, donc les forces sont comme les momens, & en effet, cela doit être aussi; car les forces sont les causes, & les momens sont les effets de ces causes, mais les causes sont toujours proportionnelles aux effets. Donc, &c.

COROLLAIRE III.

15. Il y a donc dans le mouvement des corps trois choses à considerer, la force, la masse, & la vitesse. Deux de ces cho-

ses étant égales, les troisiémes le sont aussi, c'est-à-dire, s'il y a égalité entre les forces, & égalité entre les masses, il y aura égalité entre les vitesses; s'il y a égalité entre les forces & égalité entre les vitesses, il y aura égalité entre les masses; & enfin, s'il y a égalité entre les masses & égalité entre les vitesses, il y aura égalité entre les forces.

COROLLAIRE IV.

16. Si les forces sont égales, les masses sont toujours entr'elles reciproquement comme les vitesses. Car soit qu'il y ait égalité ou inégalité entre les masses, & égalité ou inégalité entre les vitesses, les produits des masses par les vitesses sont toujours égaux, puisqu'ils sont entr'eux comme les forces que l'on suppose égales. Ainsi appellant la premiere masse A, sa vitesse V, la seconde masse *a*, & sa vitesse *u*, on aura $AV = au$; mettant donc les deux racines du produit AV à la place des extrêmes d'une proportion, & les deux racines du produit *au* à la place des moyennes, on aura A, *a* :: *u*, V, c'est-à-dire la premiere masse est à la seconde reciproquement, comme la vitesse de la seconde à la vitesse de la premiere.

PROPOSITION V.

17. *La resistance qu'un corps en mouvement oppose à une force contraire est égale à sa force motrice.*

Cette Proposition est évidente par elle-même. Car le corps étant de sa nature indifférent au mouvement ou au repos, s'il resiste à une force, ce ne peut être qu'autant qu'il est déterminé par une autre, qu'il faut nécessairement détruire pour détruire sa resistance. Mais pour rendre ceci plus sensible, soit le corps A (*Fig. 9.*) mû de A vers B, par une force que j'appelle F; si l'on applique à ce corps une autre force G pour le mouvoir du côté opposé de A en C, & que cette force soit premierement moindre que F, le mouvement vers B sera à la vérité rallenti, mais cependant il subsistera toujours, car partageant la force F en deux parties, dont l'une soit égale à la force G, celle-ci contrebalancera la force G, & la partie restante continuera à donner du mouvement au corps A. Secondement, si la force G est égale à la force F, alors les deux forces se contrebalanceront, & le corps n'étant emporté ni vers B ni vers C, demeurera en repos. Enfin si la force G est plus grande que la force F, alors parta-

geant G en deux parties, dont l'une soit égale à la force F, celle-ci contrebalancera la force F, & la partie restante emportera le corps vers C, où l'on voit que tandis que la force F subsistera ou ne sera pas surmontée, le corps A resistera toujours à la force G plus ou moins, selon que la force G contrebalancera une plus grande ou une moindre partie de la force F, & que par conséquent sa resistance sera toujours égale à la force qu'il aura.

PROPOSITION VI.

18. *Si deux corps égaux* A, B, *attachés à un levier inflexible* AB (Fig. 10.) *sont en équilibre autour d'un centre* D *ou d'un axe* FE *d'équilibre, leur bras de levier ou leurs distances* AD, BD *du centre* D *sont égales.*

DEMONSTRATION.

Par la supposition les corps sont en équilibre, donc les forces sont égales; or les masses sont aussi égales par la supposition, donc il y a égalité entre les vitesses. (*N.* 15.) Mais les forces sont entr'elles comme les quantités de mouvement dans des tems égaux, (*N.* 14.) c'est-à-dire, comme le produit des masses par les vitesses & les quantités de mouvement, sont entr'elles comme les momens ou les produits des masses par les distances AD, DB. (*N.* 8.) Donc les momens $A \times AD$, $B \times BD$, sont comme les forces, & par conséquent ils sont égaux. Puis donc qu'on a $A \times AD = B \times BD$, donc $A, B :: BD, AD$, mais $A = B$, donc $BD = AD$.

AUTRE DEMONSTRATION.

Les forces des deux corps étant égales à cause qu'il y a équilibre, concevons que la force du corps A prenne une direction opposée, c'est-à-dire qu'au lieu de pousser le corps A vers le centre de la terre, elle le pousse vers le côté opposé, les deux corps seront en mouvement puisque les forces ne seront plus contraires entr'elles. Et il est visible que les arcs AH, BR, qu'ils décriront dans des tems égaux, seront égaux, parce que les masses étant égales & les forces aussi, les vitesses représentées par ces arcs doivent être égales. Or les angles ADH, BDR que ces arcs mesurent sont égaux, étant opposés au sommet; donc les secteurs ADH, DBR sont semblables, & par conséquent

AH, BR :: AD, BD ; mais AH = BR ; donc AD = BD.

COROLLAIRE I.

19. Si les corps A, B, ſont égaux, & les bras DA, DB auſſi égaux, les corps ſeront en équilibre ; car alors les viteſſes ſeront auſſi égales, & par conſéquent les forces ſe contrebalanceront (*N.* 15.).

COROLLAIRE II.

20. Si les bras DA, DB ſont égaux, & que les corps ſoient en équilibre, les corps A, B, ſeront égaux. Car à cauſe de l'équilibre les forces ſeront égales, & à cauſe des bras égaux DA, DB, il y aura égalité entre les viteſſes ; donc il y en aura auſſi entre les maſſes (*N.* 15.)

PROPOSITION VII.

21. *Si deux corps inégaux* A, B, *attachés à un Levier inflexible* AB (Fig. 11.) *ſont en équilibre autour d'un centre* C *d'équilibre, leurs bras de Levier* AC, CB, *ſont entr'eux réciproquement comme les maſſes* B, A.

DEMONSTRATION.

Par la ſuppoſition les forces ſont égales, puiſque les corps ſont en équilibre. Donc les produits des maſſes par leurs viteſſes ſont auſſi égaux entr'eux ; car ces produits ſont entr'eux comme les forces (*N.* 14.), mais les momens ſont entr'eux comme les produits des maſſes par les viteſſes (*N.* 14.) ; donc les momens ſont égaux, c'eſt-à-dire $A \times AC = B \times BC$, & par conſéquent A, B :: BC, AC, c'eſt-à-dire le corps A eſt au corps B réciproquement comme le bras CB au bras CA.

COROLLAIRE I.

22. Si les bras CA, CB, ſont entr'eux réciproquement comme les corps B, A, ces corps ſeront en équilibre ; car puiſque CB, CA :: A, B, donc $B \times CB = A \times AC$, c'eſt-à-dire les momens de A & B ſont égaux, & par conſéquent les forces.

COROLLAIRE II.

23. Quand les corps A, B ſont en équilibre, leurs momens ſont égaux ; car les momens ſont entr'eux comme les forces.

DEFINITION IX.

24. Quand les momens seront égaux, nous les appellerons *Æquiponderans*, & quand ils seront inégaux, nous appellerons le plus grand *Præponderant*, & la différence du grand au petit, *Excès du Præponderant*. Nous appellerons aussi, *Bras de levier surchargé*, le bras sur lequel se prendra le moment *Præponderant*.

PROPOSITION VIII.

25. *Deux ou plusieurs corps* A, B (Fig. 12. & 13.) *attachés à un Levier inflexible, n'étant point en équilibre autour d'un centre de mouvement* X, *trouver* 1°. *Quel est le bras surchargé*; 2°. *L'excès du moment Præponderant*; 3°. *Quel est le point du bras surchargé, où tous les poids étant attachés ensemble leur moment seroit égal à l'excès du Præponderant.*

1°. Prenez les momens des poids attachés à l'un des bras; & ajoûtez ensemble ces momens; prenez aussi les momens des poids attachés à l'autre bras, & faites-en la somme, le bras sur lequel se trouvera la plus grande somme sera le bras surchargé. 2°. Retranchez la petite somme de la grande, & le reste sera l'excès du Præponderant. 3°. Divisez l'excès du Præponderant par la somme totale des poids, & le quotient marquera à quelle distance du point X il faut attacher tous les poids pour avoir un moment égal à l'excès du Præponderant.

Les deux premieres parties de cette Proposition sont évidentes par elles-mêmes; quant à la troisiéme, il n'y a qu'à faire attention que puisque l'excès du Præponderant doit être égal au moment de tous les poids attachés au point cherché H, ce même excès est par conséquent égal à la somme des poids multipliée par la distance XH. Donc divisant l'excès par la somme des poids, le quotient doit être la distance cherchée.

Par exemple, soit A = 1, (*Fig.* 12.) B = 3, AX = 2, XB = 4, le moment du corps A sera donc 1 × 2, ou 2; & celui du corps B, sera 3 × 4, ou 12; ainsi le bras XB sera le bras surchargé; & l'excès du moment Præponderant sera 12 — 2, ou 10. De façon que le bras XB sera surchargé de 10.

Ajoûtez ensemble la valeur 1 & 3 des deux corps, ce qui vous donnera la somme 4, par laquelle divisant l'excès 10, le quotient $2\frac{1}{2}$ vous marquera que la distance XH du point H, où il faut attacher la somme des poids, doit être à la distance

XB comme $2\frac{1}{2}$ à 4. Et en effet, concevant que la somme soit attachée en H, son moment sera $4 \times 2\frac{1}{2}$, ou 10 égal à l'excès 10. Ainsi supposant que les corps A, B, soient ôtés du levier, & que leur somme soit mise en H, le bras XB, ou XH sera chargé d'un moment égal au moment qui le surchargeoit auparavant.

Soit encore A=1, (*Fig.* 13.) B=3, C=6, D=4, E=2, F=5, XA=2, XB=4, XC=6, XD=2, & XE=4.

Le moment du corps F sera nul; car sa distance étant égale à zero, le produit de 5 par zero n'est rien; & en effet ce corps ne charge ni l'un ni l'autre bras.

Les momens des corps A, B, C, du bras XV, seront 2, 12, 36 dont la somme est 50; & les momens des corps D, E, seront 8, 8, dont la somme est 16. Retranchant donc la somme 16 de la somme 50, le reste 34 sera l'excès Præponderant, ou qui surcharge les bras XV. J'ajoûte ensemble les valeurs 1. 3. 6. des corps A, B, C, les valeurs 4. 2. des corps D, E, & la valeur 5 du corps F, & la somme totale est 21. par laquelle divisant le reste 34, le quotient $1\frac{13}{21}$ me fait voir que la distance XH où je dois mettre la somme 21 des corps doit être à la distance XV, qui est 6. comme $1\frac{13}{21}$ est à 6. Et en effet, multipliant la somme 21 par $1\frac{13}{21}$, le produit 34 sera le moment de la somme des corps mise en H; ainsi supposant que tous les corps soient ôtés de leur place & mis en H, le bras XV sera chargé de 34, de même qu'il étoit surchargé de 34, quand ces corps étoient chacun à leur place.

COROLLAIRE.

26. Si on demandoit à quel point S ou *s* de l'un des bras XV (*Fig.* 13.) il faudroit transporter les corps A, B, C, attachés à ce bras, afin que leur moment fut moindre ou plus grand que la somme des momens qu'ils ont en leurs places, on prendroit le moment de chacun de ces corps, & les ajoûtant ensemble on retrancheroit de leur somme, ou on lui ajoûteroit la quantité dont on voudroit diminuer ou augmenter le moment, & divisant le reste ou la somme par la somme des poids A, B, C, le quotient donneroit la distance XS, ou X*s* demandée. Car puisque la somme des poids diminuée ou augmentée doit être égale au moment des poids en S ou en *s*, c'est-à-dire à la

somme des poids multipliée par XS ou Xs, il est visible que si l'on divise la somme des momens diminuée ou augmentée par la somme des poids, le quotient sera la distance XS ou Xs.

Par exemple, en supposant les mêmes masses & les mêmes distances que dans l'exemple ci-dessus, la somme des poids A, B, C, est 10, & la somme des momens est 50. Si on veut que les corps étant transportés en un point S, leur moment soit moindre que 50 de 14. Je retranche 14 de 50, & divisant le reste 36 par la somme 10 des poids, le quotient $3\frac{3}{5}$ fait voir que la distance XS doit être à la distance XV = 6, comme $3\frac{3}{5}$ est à 6.

Que si on veut que les poids étant transportés en un point s, leur moment surpasse 50 de 12, j'ajoûte 12 à 50, & divisant le reste 62 par la somme 10 des corps, le quotient $6\frac{1}{5}$ me fait voir que la distance Xs doit être à la distance XV = 6, comme $6\frac{1}{5}$ est à 6. De sorte qu'en ce cas, il faudroit prolonger le bras XV pour avoir le point s, à cause que $6\frac{1}{5}$ est plus grand que XV = 6.

PROPOSITION IX.

27. *Deux ou plusieurs corps attachés à un Levier n'étant point en équilibre autour du centre X de mouvement*, (Fig. 12. 13.) *trouver un point où il faudroit transporter le centre de mouvement pour faire équilibre.*

Cherchez par la Proposition précédente le point H, où tous les corps étant transportés, leur moment sera égal à l'excès du Præponderant, & ce point sera le point cherché.

DEMONSTRATION.

Supposons que le bras XB (*Fig.* 12.) soit le bras surchargé, le moment du corps B sera donc égal au moment du corps A, plus l'excès Præponderant ; je transporte le corps A en X où tout son moment se trouve perdu, & le corps B en un point S où il aura perdu un moment égal au moment perdu par le corps A (*N.* 26.) donc il ne reste plus du moment des deux corps que l'excès du Præponderant. Maintenant afin que les deux corps étant transportés en H, leur moment soit égal à l'excès du Præponderant, il faut que le moment que A gagnera par rapport à X soit égal au moment que B perdra par rapport à X. Donc le moment perdu par le corps A de A en X, joint au moment gagné

gagné par le même corps de X en H, sera égal au moment perdu par le corps B de B en H. Or concevant que le centre X de mouvement soit mis en H, & que les corps soient remis en leurs places, le corps A conservera par rapport à H le moment qu'il avoit gagné par rapport à X, & de plus il reprendra le moment qu'il avoit perdu de A en X; & le corps B ne reprendra qne le moment qu'il avoit perdu de B en H. Donc les momens des corps A, B, par rapport à H seront égaux, & il y aura équilibre.

De même, supposons que le bras XV (*Fig.* 13.) soit le bras surchargé, la somme des momens des corps A, B, C, surpassera la somme des momens des corps D, E, de ce que nous appellons l'excès du Præponderant. Je transporte les corps D, E, en X, où la somme de leurs momens est perduë, & les corps A, B, C, en un point S, où ils auront perdu un moment égal à celui que les corps D, E, ont perdu (*N.* 26.). Il ne reste donc plus que l'excès du Præponderant, ainsi il est visible qu'afin que tous les corps étant transportés en H, leur moment soit égal à cet excès, le moment que les corps D, E, gagneront par rapport à X, doit être égal à celui que les corps A, B, C, perdront par rapport à X. Donc le moment perdu par les corps, D, E, joint au moment gagné sera égal au moment perdu par les corps A, B, C; c'est pourquoi transportant tous les corps en leur place, & le centre de mouvement en H, les corps D, E, conserveront le moment qu'ils avoient gagné & reprendront de plus celui qu'ils avoient perdu, & les corps A, B, C, ne reprendront que le moment qu'ils avoient perdu; & par conséquent le moment des corps D, E, par rapport à H, sera égal au moment des corps A, B, C, par rapport à H, & il y aura équilibre.

PROPOSITION X.

28. *Deux ou plusieurs corps étant attachés à un Levier, trouver leur centre d'Equilibre.*

Premierement, s'il n'y a que deux corps, & qu'ils soient égaux (*Fig.* 10.), partagez leur distance AB en deux parties égales en D, & le point D sera le centre d'équilibre. (*N.* 18.)

Mais si les corps sont inégaux (*Fig.* 11.), partagez leur distance AB en deux parties AC, CB, réciproques aux corps B, A, en faisant cette analogie : comme la somme A + B des deux

corps est au corps B, ainsi la distance AB est à un quatriéme terme que vous porterez de A en C, & le point C sera le centre d'équilibre ; car par la construction vous aurez A + B, B :: AB, AC ; donc *dividendo* A + B — B, B :: AB — AC, AC, ou A, B :: BC, AC ; c'est-à-dire le corps A est au corps B réciproquement comme le bras BC au bras AC, & par conséquent les deux corps seront en équilibre. (*N.* 21.)

Ou bien prenez sur le Levier AB (*Fig.* 12.) un point X entre les deux corps, & cherchez leurs momens par rapport à ce point. Si ces momens se trouvent égaux, le point X sera le centre d'équilibre ; mais s'ils sont inégaux, cherchez sur le bras surchargé XB un point H, où la somme des corps étant attachée, leur moment soit égal à l'excès du Preponderant, & ce point H sera le centre d'équilibre cherché. (*N.* 27.)

Ou bien encore prolongez le Levier au-delà de l'un des deux corps, par exemple de A en C (*Fig.* 14.) & regardant le point C comme le centre du mouvement, prenez les momens des deux corps par rapport à ce point, & les ajoûtant ensemble, divisez leur somme par la somme des corps, le quotient vous donnera la distance CD qu'il faut donner au point D qui sera le centre d'équilibre ; car il est visible que si l'on transporte les poids A, B en D, leur moment sera égal au moment qu'ils ont en leur place, puisque l'un & l'autre de ces momens étant divisé par la somme des corps, donnera pour quotient la droite CD. Or pour que cela arrive il faut que le moment que le corps A gagne quand il est en D, soit égal au moment que le corps B perd lorsqu'il est en D ; donc le corps A multiplié par AD, est égal au corps B multiplié par BD ; & par conséquent que les corps A, B, soient remis en leur place, & que le point D soit pris pour le centre du mouvement, il y aura équilibre.

Nota. Qu'il n'est pas nécessaire de prolonger le bras de Levier ; car si l'on suppose que le centre du mouvement soit en A, alors le corps A n'aura point de moment par rapport à ce point A. C'est pourquoi on n'aura qu'à prendre le moment du corps B, & le divisant par la somme des corps, le quotient donnera la distance CD, & par conséquent le point D sera l'endroit où les deux corps étant transportés, leur moment sera égal au moment qu'ils avoient en leur place. Or comme cela ne peut arriver sans que le corps A ne gagne autant par rapport à A que le corps B perdra, il s'ensuit qu'on aura A × AD = B × BD, & que par

conséquent si on remet les corps en leur place, & que le point D soit pris pour le centre de mouvement, il y aura équilibre.

Secondement, s'il y a plus de deux corps attachés au Levier (*Fig.* 13.), prenez l'une de ses extremités R pour centre du mouvement, & prenant les momens de chaque corps en particulier, faites-en la somme, laquelle étant divisée par la somme des corps vous donnera au quotient la distance RH; ainsi le point H sera le point où tous les corps étant transportés, leur moment sera égal au moment qu'ils ont leur place; & comme cela ne peut se faire sans que les corps E, D, F, ne gagnent un moment égal à celui que les corps A, B, C, perdent, il s'ensuit que si l'on transporte le centre de mouvement en H, & que tous les corps soient remis en leurs places, les corps E, D, F, conserveront par rapport à H le moment qu'ils avoient gagné par rapport à R, & les corps A, B, C, n'auront par rapport à H que celui qu'ils avoient perdu, & par conséquent il y aura équilibre.

Cette méthode me paroît la plus commode; cependant comme celle dont on se sert ordinairement peut avoir son utilité, je vais l'expliquer en peu de mots.

Soient donc les trois corps A, B, C, attachés au Levier AC, (*Fig.* 15.) je fais d'abord abstraction du corps B, & je cherche le centre d'équilibre H des corps A, C; ainsi les deux corps A, C, étant transportés en H, leur moment par rapport à A, est égal à celui qu'ils ont chacun en leur place. Je conçois donc les deux corps A, C, en H, & je cherche le centre d'équilibre Z entre leur somme & le corps B; & par conséquent le point Z est le point où les trois corps étant transportés, leur moment est égal à celui qu'ils ont en leur place; mais quand cela arrive, le point Z est le centre d'équilibre des corps A, B, C, par la Proposition précédente. Donc, &c.

On continueroit de la même façon s'il y avoit un plus grand nombre de corps attachés au Levier.

PROPOSITION XI.

29. *Un Levier* AB *étant donné* (Fig. 14.) *ayant son centre de mouvement en* D, *& un corps* A *attaché à l'une de ses extrémités* A, *trouver la valeur du corps qu'il faudroit attacher à un point donné* B *de l'autre bras pour faire équilibre.*

Prenez le moment du corps A, & divisez-le par la distance donnée BD, le quotient donnera la valeur du poids qu'il faut mettre en B, ce qui est visible puisque les momens des deux corps seront égaux.

Soit le corps A = 2, la distance AD = 1, & la distance DB = 2, le moment du corps A sera $2 \times 1 = 2$. Divisant donc ce moment 2 par la distance donnée 2, le quotient 1 marquera qu'il faut attacher en B un corps qui soit au corps A, comme 1 à 2; & en effet multipliant ce corps par sa distance 2 son moment sera $1 \times 2 = 2$ égal au moment 2 du corps A, & par conséquent il y aura équilibre.

REMARQUE.

30. Nous avons supposé jusqu'ici que le Levier étoit horisontal, & que son axe de mouvement aussi horisontal lui étoit toujours perpendiculaire pendant le mouvement; c'est pourquoi nous avons exprimé les vitesses des corps attachés au Levier par les parties du Levier comprises entre eux & le centre de mouvement, & leurs momens par les produits de ces parties & des masses des corps, parce qu'en effet le Levier venant à tourner, les corps décrivent des cercles dont les parties correspondantes du Levier sont les rayons, & que ces rayons sont entr'eux comme les vitesses, ainsi que nous l'avons démontré plus haut (*N.* 8.). Mais si l'axe du mouvement n'est point perpendiculaire au Levier, alors il faut concevoir un plan perpendiculaire à l'horison dans lequel l'axe de mouvement se trouve tout entier, & exprimer ensuite les vitesses des corps par les perpendiculaires tirées de ces corps au plan, & leurs momens par les produits de ces perpendiculaires par les masses.

Pour rendre raison de ceci; soit 1°. le Levier AB (*Fig.* 17.) dans une situation horisontale, & l'axe de mouvement HI aussi horisontal mais oblique à ce Levier. Concevons un autre Levier EF horisontal & perpendiculaire à l'axe HI, lequel soit attaché fixement par le centre O au Levier AB, si l'on fait tourner EF autour de HI, en lui faisant décrire un plan perpendiculaire à l'horison, en sorte que EF soit toujours perpendiculaire à HI, le Levier AB tournera aussi autour de HI, & conservera toujours sa même obliquité. Concevons encore un plan RSTV perpendiculaire à l'horison, & dans lequel soit HI. Tandis que le Levier AB tournera, les corps A, B, étant toujours à égale distance

de l'axe HI, décriront des cercles perpendiculaires à l'horison & dont les centres seront dans cet axe, & comme les mêmes corps seront toujours à égale distance du centre O de mouvement par lequel l'axe HI passe, cet axe sera perpendiculaire aux plans des cercles, & par conséquent à leurs rayons AI, BH; mais ces rayons AI, BH, sont proportionnels aux arcs AT, BS que les corps A, B décriront dans des tems égaux. Donc ces rayons sont comme les vitesses, & par conséquent les produits des corps A, B par leurs rayons exprimeront les momens des corps.

Je sçai bien qu'à cause des triangles semblables IAO, HOB, on a AI, BH :: AO, BO, & que par conséquent on pourroit exprimer les vitesses par les distances AO, BO, de même que par les distances AI, BH, & les momens par les produits $A \times AO$, $B \times BO$, de même que par les produits $A \times AI$, $B \times BH$; mais il vaut mieux s'en tenir à ce que nous venons de dire pour résoudre avec plus de facilité les Problêmes suivans.

DIGRESSION.

Touchant le Mouvement composé d'un Corps attaché à un Levier.

31. Soit un Levier horisontal (*Fig.* 18.) AC perpendiculaire à son axe *ba* aussi horisontal, qui se trouve dans un plan *bazu* perpendiculaire à l'horison, & au cercle que le Levier AC décrit dans son mouvement, lequel cercle est aussi perpendiculaire à l'horison. Il est visible que lorsque le Levier sera parvenu dans la position AB, un corps C attaché à son extrémité aura décrit un arc de circonférence BC, & par conséquent le mouvement de ce corps sera composé de deux autres, dont l'un sera perpendiculaire à l'horison, & l'autre sera horisontal; ainsi nous pouvons considerer ce corps comme poussé par deux forces, dont les droites CG, CA sont les directions.

32. *Si l'on divise le quart de circonférence en parties égales & infiniment petites, en sorte que les arcs* CB, CD, CE, *soient arithmetiquement proportionnels, les vitesses du mouvement vers* A *à la fin des arcs arithmetiquement proportionnels, sont aux vitesses du mouvement vers le centre de la Terre à la fin de ces mêmes arcs, comme les sinus verses de ces arcs sont à leurs sinus droits.*

Quand le corps aura décrit le petit axe CB que nous pouvons regarder comme une ligne droite, à cause de son infinie peti-

tesse, l'espace qu'il auroit parcouru avec la seule force vers A seroit la droite BG, & celui qu'il auroit parcouru avec l'autre force seroit la droite CG; or les vitesses de deux différens mouvemens sont entr'elles comme les espaces parcourus dans des mêmes temps, donc la vitesse vers A à la fin de l'arc CB, est à la vitesse vers le centre de la Terre à la fin du même arc, comme BG à CG: or CG est égal au sinus droit BN, & BG égal au sinus verse NC; donc la vitesse du mouvement vers A est à la vitesse du mouvement vers le centre de la Terre, comme le sinus verse NC au sinus droit NB.

Par la même raison, quand le corps aura décrit l'arc BD, la vitesse du mouvement vers A sera à la vitesse de l'autre mouvement comme DH à HB. Donc quand le corps aura parcouru les deux arcs CB, BD, c'est-à-dire l'arc CD, la vitesse du mouvement vers A sera à la vitesse de l'autre mouvement comme DH+BG à HB+GC, ou comme MC à DM, c'est-à-dire comme le sinus verse de l'arc CD au sinus droit du même arc. Donc les vitesses du mouvement vers A, à la fin des arcs arithmetiquement proportionnels sont aux vitesses de l'autre mouvement à la fin des mêmes arcs, comme les sinusverses aux sinus droits.

33. *Les vitesses du mouvement vers* A *à la fin des arcs égaux, sont aux vitesses de l'autre mouvement à la fin des mêmes arcs, comme les différences des sinus verses des arcs arithmetiquement proportionnels, sont aux differences des sinus droits des mêmes arcs arithmetiquement proportionnels.*

Les vitesses du mouvement vers A, à la fin des arcs égaux, sont aux vitesses de l'autre mouvement à la fin des mêmes arcs, comme les droites BG, DH, EI, &c. aux droites CG, BH, DI, &c. Mais les droites BG, DH, EI, &c. sont les différences des sinus verses NC, MN, SC, &c. des arcs arithmetiquement proportionnels, & les droites CG, BH, DI, &c. sont les différences des sinus droits BN, DM, &c. Donc, &c.

34. *Les vitesses du mouvement vers* A *à la fin des arcs égaux, sont aux vitesses de l'autre mouvement à la fin des autres arcs, comme des vitesses accelerées, ou qui augmentent, à des vitesses retardées, ou qui diminuent.*

Les vitesses du mouvement vers A à la fin des arcs égaux, sont aux vitesses de l'autre mouvement à la fin des mêmes arcs, comme les droites BG, DH, &c. aux droites CG, BH, &c.

Or les droites BG, DH, &c. vont en augmentant ; car à mesure que les arcs CB, BD, approchent de F, ils se courbent davantage vers le rayon AC, & par conséquent ils lui presentent un plus grand front, d'où il suit que les parties NC, MN, &c. du rayon ausquelles ces arcs correspondent, deviennent plus grandes ; or les droites NC, MN, &c. sont égales aux droites BG, DH, &c. Donc ces droites vont en augmentant. Par la même raison, les arcs CB, BD, &c. presentent un moindre front aux rayons AF, à mesure qu'ils approchent de F ; donc les droites AP, PQ, &c. ausquelles ces arcs correspondent, deviennent moindres ; & par conséquent les droites CG, BH, &c. égales aux droites AP, PQ, &c. vont aussi en diminuant. Donc, &c.

La Figure 19 fait voir que si le Levier AC horisontal n'étoit pas perpendiculaire à son axe *ba*, tout ce que nous venons de dire dans cette petite digression seroit également vrai. Car supposé que ce Levier fut attaché fixement à un autre *hi* horisontal perpendiculaire à l'axe *ba*, & que *hi* vint à tourner autour de cet axe, le Levier AC tourneroit en conservant toujours sa même obliquité avec *ba*, & par conséquent le poids C décriroit un quart de circonférence d'un cercle qui seroit perpendiculaire au plan vertical *baux*, dans lequel est l'axe *ba*, comme il a été démontré ci-dessus. Et le rayon de ce cercle seroit la droite CZ perpendiculaire au plan *bazu* ; ainsi on n'auroit qu'à appliquer au quart de cercle CXZ ce que nous avons dit du quart de cercle CAF (*Fig.* 18.) mais il est tems de finir cette digression.

PROPOSITION XII.

35. *Un Levier* AB *étant donné* (Fig. 16.) *tournant autour de l'axe de mouvement* EF *qui lui est perpendiculaire, & ayant à l'une de ses extremités* B *un angle* CBD *dans une situation horisontale, trouver les endroits sur les jambes de l'angle, où il faudroit placer deux ou plusieurs corps donnés, afin qu'ils fussent en équilibre autour de* AB, *c'est-à-dire afin que l'angle conservât sa situation horisontale en supposant un corps* A *qui empêchât le Levier de descendre, sans l'empêcher de tourner autour de lui-même.*

L'angle CBD est ou divisé en deux également par le Levier AB, ou en deux inégalement, ce qui fait deux différens cas qui peuvent encore varier par le nombre des corps qu'on veut y attacher.

Premierement donc supposons les angles CBH, HBD égaux; & les corps donnés C, D, comme 2 & 1. Je prens sur les jambes de l'angle CBD deux parties BD, BC qui soient entr'elles comme les corps, c'est-à-dire comme 2 & 1. Je mets le petit corps D à l'extremité de la grande partie BD, & l'autre corps C à l'extremité de la petite partie BC, & je dis que ces deux corps sont en équilibre autour du Levier AB.

Pour le prouver, tirez des corps C, D, les perpendiculaires CR, DH sur le Levier AB, & joignez la droite DC; l'angle CBD étant divisé en deux parties égales, les parties CO, OD de sa base sont proportionnelles aux côtés CB, BD; ainsi on a CO, OD :: CB, BD, mais à cause des triangles semblables OCR, ODH, on a aussi CO, OD :: CR, DH; donc CR, DH :: CB, BD. Mais par la construction CB, BD :: D, C; donc CR, DH :: D, C, & $CR \times C = DH \times D$. Or CR est comme la vitesse du corps C, & DH comme la vitesse du corps D, en prenant le Levier AB pour leur axe de mouvement; donc $CR \times C$ est le moment du corps C, & $DH \times D$ est le moment du corps D, & par conséquent à cause de l'égalité de ces momens, les forces sont égales, & les corps sont en équilibre.

Si on vouloit placer sur les jambes CB, BD encore deux corps, on feroit la même operation en prenant deux autres parties sur ces jambes qui fussent comme les deux corps, & attachant le plus grand à l'extremité de la petite partie, & le petit à la grande, afin de rendre toujours les vitesses réciproques aux corps, & par conséquent les momens égaux; & l'on continueroit de la même façon s'il falloit encore deux corps, puis deux autres, & ainsi de suite en nombre pair.

Mais si le nombre des corps qu'on propose d'attacher est en nombre impair, voici comme on fera. Soient les trois corps A, B, C, (*Fig.* 20.) qui soient entr'eux, comme 1. 2. 10, je mets le plus petit A en un point à discretion sur l'une des jambes HR, & je mets le second B en un autre point pris à discretion sur cette même jambe; ensuite j'abaisse les perpendiculaires AD, BS sur le Levier VR. Les triangles semblables RAD, RBS, donnent AD, BS :: RA, RB; ainsi supposant RA, RB :: 1. 2, on aura AD, BS :: 1. 2. Multipliant donc le corps A par sa vitesse AD, le produit 1×1, ou 1 sera son moment, & le moment du corps B sera 2×2, ou 4, & la somme de ces momens sera $1 + 4$ ou 5. Or afin que le troisiéme corps étant mis sur

sur l'autre jambe fasse équilibre avec ses deux corps, il faut que son moment soit égal à 5. C'est pourquoi je divise le moment 5 par le corps C qui est 10, & le produit $\frac{5}{10}$, ou $\frac{1}{2}$ me fait voir que la vitesse de ce corps, ou la perpendiculaire tirée sur le Levier, doit être $\frac{1}{2}$ de la vitesse AD; ainsi il s'agit de trouver sur la jambe QR un point duquel abaissant une perpendiculaire sur le Levier, cette perpendiculaire soit égale à $\frac{1}{2}$ AD; ce qui est facile en supposant, comme nous faisons ici, que l'angle CBD soit divisé en deux également; car il n'y a qu'à partager DR en deux également, & du point de division élever une perpendiculaire qui rencontre la jambe RQ; mais si l'angle n'est pas divisé en deux également d'un point quelconque Q pris sur QR, j'abaisse la perpendiculaire QX, & après avoir mesuré QX & XR, je dis comme QX est à $\frac{1}{2}$ AD; ainsi RX est à une quatriéme proportionnelle que je porte de R en V, & du point V j'éleve la perpendiculaire VC qui coupe RQ en C, où je mets le corps C qui fait en cet endroit équilibre avec les deux autres; car à cause des triangles semblables on a QX, VC :: RX, RV; d'où l'on tire $QX \times RV = VC \times RX$, mais par la construction on a QX, $\frac{1}{2}$AD :: RX, RV, d'où l'on tire $QX \times RV = \frac{1}{2} AD \times RX$; donc $VC \times RX = \frac{1}{2} AD \times RX$, & divisant par RX, on a $VC = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2}$; & par conséquent le moment du corps C est $\frac{1}{2} \times 10$, ou 5 égal au moment des deux autres corps.

De même, soient les cinq corps A, B, C, D, E, comme 1. 2. 4. 5. 6, (*Fig.* 21.) je mets les trois premiers A, B, C, sur le bras CR, faisant leurs distances RA, RB, RC, égales à 1. 2. 3; ainsi les perpendiculaires AH, BG, CF, seront aussi comme 1. 2. 3. & les momens de ces trois corps seront 1×1. 2×2. 3×4, ou 1. 4. 12; donc la somme est 17. Pour faire donc que les deux autres corps D, E, étant mis sur l'autre bras DR, soient en équilibre, il faut que leurs momens soient égaux à 17. C'est pourquoi je partage le moment 17 en deux parties, comme 15 & 2, & je cherche à donner au corps D = 5 le moment 15, & au corps E = 6 le moment 2; or 5 multiplié par 3 fait 15, & 6 multiplié par $\frac{1}{3}$ fait 2. Je cherche donc un point sur le bras DR, d'où tirant la perpendiculaire DM, cette perpendiculaire soit égale à 3 ou 3AH, & un autre point où la perpendiculaire EI soit égale à $\frac{1}{3}$ AH, ce qui se fait ainsi qu'il a été dit ci-dessus, & les corps D, E, étant mis à ces points feront équilibre avec les trois autres.

On se servira de la même méthode que nous venons de donner, lorsqu'il faudra placer un nombre pair de corps sur les jambes d'un angle divisé inégalement.

Ces sortes de questions souffrent différentes solutions; car dans la figure 16, on peut prendre les distances BC, BD, de telle grandeur qu'on voudra, pourvû qu'elles soient toujours dans la raison réciproque des corps. Dans la figure 20. on peut prendre les distances RA, RB, de telle grandeur & de tel rapport qu'on voudra, & changer la situation des corps A, B, pourvû qu'on donne toujours au corps C un moment égal au moment des deux autres. Et de même dans la figure 21.

COROLLAIRE I.

36. Si l'on vouloit sçavoir quel est le moment des corps C, D, (*Fig.* 16.) par rapport à l'axe EF, on tireroit de ces corps des perpendiculaires CS, DX, sur l'axe de mouvement EF, (*N.* 30.) & ces perpendiculaires marqueroient les vitesses des corps par rapport à cet axe, & par conséquent leurs momens seroient les produits $C \times CS$, $D \times DX$, des masses par les vitesses.

COROLLAIRE II.

37. Si on vouloit trouver les points où il faudroit mettre les corps C, D, sur le levier, afin qu'ils eussent les mêmes momens par rapport à EF, que sur les jambes de l'angle, on tireroit de ces corps des droites CR, DH, paralelles à l'axe de mouvement, & les points R, H, où elles couperoient le levier, seroient les lieux où il faudroit transporter les corps; car ils seroient alors dans le même éloignement de l'axe. Et par conséquent si le levier AB tournoit les corps en H, R décriroient les mêmes cercles que s'ils étoient en D & C.

Et il faut observer que j'ai dit qu'il faut des paralelles à l'axe, & non pas des perpendiculaires sur le levier, parce que l'axe de mouvement n'est pas toujours perpendiculaire sur le levier.

COROLLAIRE III.

38. Si le levier étoit traversé par d'autres leviers horisontaux qui eussent des corps attachés, (*Fig.* 22.) on jugeroit du moment de ces corps par rapport au levier commun SR pris pour

axe de mouvement par les perpendiculaires AP, BQ, CZ, DX, tirées sur ce levier, & par rapport à l'axe de mouvement EF du levier par les perpendiculaires AH, BM, CN, DK tirées sur cet axe EF. Et si l'on vouloit trouver les endroits où il faudroit attacher tous les corps sur le levier SR, afin qu'ils eussent les mêmes momens par rapport à EF, on tireroit sur le levier SR des droites A*m*, B*n*, C*t*, D*r* paralelles à EF, & les points *m*, *n*, *t*, *r*, seroient les points cherchés.

REMARQUE.

39. Ce que nous venons de dire ne doit s'entendre que des leviers traversans qui sont dans le même plan horisontal du levier principal, car à mesure que les leviers sont inclinés à l'horison, les vitesses des corps qui leur sont attachés diminuent (*N.* 34.), & on doit les estimer par les perpendiculaires tirées sur le plan vertical qui passe par l'axe. Quant aux leviers traversans qui sont dans le plan vertical qui passe par le principal levier, nous en dirons un mot plus bas.

PROPOSITION XIII.

40. *Si deux ou plusieurs corps* A, B, *attachés à un Levier* (Fig. 23.) *sont en équilibre autour d'un centre* O, *ils seront aussi en équilibre autour de toute ligne droite* HI, RS, *&c. qui passera par ce centre, soit qu'elle soit perpendiculaire au levier, soit qu'elle ne le soit pas.*

DEMONSTRATION.

Si la ligne HOI est perpendiculaire au levier, la chose est évidente; car les bras AO, OB, étant perpendiculaires à HI, marqueront les vitesses des corps par rapport à cet axe, de même que par rapport au centre O. Mais si la ligne ROS n'est pas perpendiculaire au levier, tirez les droites AR, BS, perpendiculaires à RS, & ces droites marqueront les vitesses des corps A, B, par rapport à la droite RS (*N.* 30.) Or les triangles semblables ARO, BOS, donnent AR, BS :: AO, BO; & AO, BO, par la supposition sont entr'elles réciproquement comme les corps B, A, puisque ces corps sont en équilibre autour de HOI; donc AR, BS sont aussi entr'elles réciproquement comme les corps B, A, & par conséquent les momens A × AR, B × BS sont égaux, & les corps A, B, sont en équilibre autour de RS.

Proposition XIV.

41. *Deux ou plusieurs leviers chargés de corps étant donnés dans une situation horisontale, trouver un point autour duquel tous les corps soient en équilibre.* (Fig. 24.)

Soient les deux Leviers AB, CD, dont le premier est chargé des corps A, B, & le second des corps C, E, D. Je cherche d'abord le centre Q d'équilibre des corps A, B sur le levier AB, & le centre S d'équilibre des corps C, E, D sur le levier CD, je joins ces deux centres par la droite QS. Ainsi supposant qu'on empêche le levier QS de pancher plus vers Q que vers S, sans l'empêcher de tourner autour de lui-même, il est clair par la Proposition XIII. que les poids A, B seront en équilibre par rapport à l'axe QS qui passe par leur centre Q d'équilibre, & par la même raison les corps C, E, D seront en équilibre autour de l'axe QS, ainsi le levier AB ne panchera ni vers A ni vers B, & le levier C, D, ne panchera ni vers C, ni vers D, & il ne s'agit plus que de trouver un point sur le levier QS autour duquel les deux leviers AB, CD, chargés de leur poids soient en équilibre; pour cela je fais la somme des poids A, B, & celle des poids C, E; D, considerant ces deux sommes comme si elles étoient attachées la premiere en Q, & la seconde en S, je cherche leur centre d'équilibre H, & je dis que les corps remis chacun en leur place seront en équilibre autour du point H.

Pour le prouver tirez des corps A, B, des perpendiculaires AN, BM, sur le levier QS; & par le point H la droite PX aussi perpendiculaire à QS; par la Proposition XII. & ses Corollaires les momens des corps A, B, mis en N, M, seroient les mêmes par rapport à l'axe XP, que les momens qu'ils ont par rapport à ce même axe lorsqu'ils sont en A & en B, ainsi l'on peut les concevoir comme s'ils étoient transportés en N, M. Or à cause des triangles semblables AQN, BQM, on a QN, QM :: QA, QB; donc puisque les corps A, B, posés en A & en B, sont en équilibre autour du point Q, ces mêmes corps posés en N & en M, seront encore en équilibre autour du point Q. Donc concevant que ces deux corps soient transportés ensemble au point Q, le moment que le corps A mis en N gagnera en avançant vers Q, par rapport à l'axe PX, sera égal au moment que le corps B mis en M, perdra par rapport au même axe PX, en avançant vers Q, c'est-à-dire, $A \times NQ = B \times MQ$.

Par conféquent le moment total des deux corps mis en Q, fera égal à la fomme des momens que ces deux corps avoient par rapport à PX, lorfqu'ils étoient en N & en M, ou en A & en B. On prouvera de la même façon que le moment des corps C, E, D, mis enfemble en S par rapport à l'axe XP, fera égal à la fomme des momens que ces corps ont chacun en leur place par rapport à ce même axe. Donc fi la fomme A + B mife au point Q eft en équilibre autour de H avec la fomme C + E + D mife au point S; tous les corps étant remis à leur place feront en équilibre autour de H.

Nota, que tous les corps A, B, C, E, D feroient encore en équilibre autour de XP, quand même cette ligne ne feroit pas perpendiculaire à QS (*Fig.* 25.); mais pour la demonftration il faudroit tirer les droites AN, BM paralelles à XP, ainfi qu'il a été dit (*N.* 37. 38.).

De même foient les trois leviers AB, CD, EF, chargés des poids A, B, C, D, E, F (*Fig.* 26.). Je cherche le centre d'équilibre Q des deux premiers fur le levier AB, le centre d'équilibre S des poids C, D fur le levier CD, & le centre commun H fur le levier QS. Après quoi je confidére les deux poids A, B comme mis enfemble au point Q & ne faifant qu'un feul poids, je confidére de même les deux poids C, D comme mis enfemble en S, ainfi je n'ai plus que deux leviers QS, EF chargés des quatre poids A + B, C + D, E, F, ou Q, S, E, F, & le point H eft le centre d'équilibre des deux Q, S, fur le levier QS, c'eft pourquoi je cherche le centre d'équilibre R des poids E, F fur le levier EF, & joignant la droite HR, je cherche fur le levier HR le centre d'équilibre X des quatre poids Q, S, E, F, & le point X eft le centre d'équilibre de tous les poids remis chacun en leur place, & ainfi des autres.

PROPOSITION XV.

42. *Deux ou plufieurs leviers* AB, CD, (Fig. 27.) *chargés de poids étant donnés, dont le centre d'équilibre eft* O, *& une ligne droite* HR *donnée de pofition hors des leviers, & du même côté par rapport à eux, les momens de tous les corps par rapport à cette ligne, font enfemble égaux au moment de la fomme des corps mife au centre* O.

DEMONSTRATION.

Des corps C, D tirez les perpendiculaires CP, DR fur la ligne

donnée HR, ces perpendiculaires expriment les vitesses des corps C, D par rapport à HR prise pour axe de mouvement, & par conséquent les momens de ces corps seront $C \times CP$, $D \times DR$; de leur centre d'équilibre S sur le levier CD, abaissez la perpendiculaire SQ que vous prolongerez en X, & tirez les droites DZ, CX paralelles à HR, il est visible que si le corps C est transporté en X, son moment $C \times XQ$ par rapport à HR, sera égal au moment $C \times CP$ qu'il avoit en C, à cause de $XQ = CP$; & par la même raison si l'on transporte le corps D en Z, son moment $D \times ZQ$, par rapport à HR, sera égal au moment $D \times DR$ qu'il avoit auparavant. Cela posé les triangles semblables CSX, DSZ, donnent XS, SZ :: CS, SD; or S étant le centre d'équilibre des poids C, D, on a $C \times CS = D \times SD$; donc mettant au lieu de CS, SD, les deux XS, SZ, qui sont en même raison, on a $C \times XS = D \times SZ$, donc transportant le corps C mis en X, de X en S, & le corps D mis en Z de Z en S, le moment $C \times XS$ que le corps C perdra par rapport à HR, sera égal au moment $D \times SZ$ que le corps D gagnera par rapport à HR, & par conséquent les momens $C \times SQ$, $D \times SQ$ des deux corps mis en S, seront ensemble égaux à la somme des momens $C \times CP$, $D \times DR$ qu'ils avoient lorsqu'ils étoient en C & en D. On prouvera de la même façon que si les deux corps A, B du levier AB sont mis ensemble à leur centre d'équilibre E sur ce levier, leur moment par rapport à HR, sera égal à la somme des momens qu'ils avoient en A & en B. Donc on peut considerer les deux corps C, D, comme ne faisant qu'un seul corps en S, & les corps A, B comme ne faisant qu'un seul corps en E, tirez donc du point E la perpendiculaire EH sur HR, & du centre d'Equilibre O des corps E, S sur le levier ES, tirez la perpendiculaire OM que vous prolongerez en G, & des points E, S, les droites EN, SG paralelles à HR. Le corps E mis en N & le corps S mis en G auront, par rapport à HR, des momens égaux à ceux qu'ils avoient en E & en S. Or les triangles semblables EON, SOG donnent NO, OG :: EO, OS, & à cause du centre d'équilibre O on a $E \times EO = S \times OS$, donc mettant au lieu de EO, OS, les droites NO, OG, qui sont en même raison, on aura $E \times NO = S \times OG$. Donc transportant le corps E mis en N de N en O, & le corps S mis en G de G en O, le moment $E \times NO$ que le corps E gagnera par rapport à HR, sera égal au moment $S \times OG$ que le corps S gagnera par rapport à HR, & par conséquent les

momens $E \times OM$, $S \times OM$ des deux corps E, S mis en O, seront ensemble égaux aux momens que ces corps avoient en E & en S. Or les momens des corps E, S, sont les mêmes des corps A, B, C, D, donc les momens des corps A, B, C, D mis en O, sont ensemble égaux aux momens de ces mêmes corps mis chacun en leur place.

COROLLAIRE I.

43. Soient de même les trois leviers AB, CD, EF, (*Fig.* 28.) chargés des corps A, B, C, D, E, F, le point T centre d'équilibre des corps AB sur le levier AB, le point S centre d'équilibre des corps C, D sur le levier CD, le point Z centre d'équilibre des corps E, F sur le levier EF, le point O centre d'équilibre des quatre premiers corps sur le levier TS, le point N centre d'équilibre commun des six corps sur le levier OZ, & enfin la droite HR donnée de position. On prouvera de même que ci-dessus, que les momens des quatre corps A, B, C, D, chacun en leur place par rapport à la droite HR, sont ensemble égaux au moment de la somme de ces corps mis au centre commun d'équilibre O; ainsi concevant que ces quatre corps soient mis en O, on prouvera de la même façon que les momens des corps E, F par rapport à HR, sont ensemble égaux au moment des deux corps E, F mis ensemble en Z, & enfin que le moment des quatre corps A, B, C, D mis en O, & celui des deux E, F mis en Z, sont ensemble égaux au moment des six corps transportés tous ensemble en N, & comme le moment des quatre corps A, B, C, D en O, est égal à la somme des momens qu'ils ont chacun en leur place, & le moment des corps E, F en Z est égal à la somme des momens qu'ils ont en E & F, on conclura que le moment des six corps mis en N est égal à la somme des momens qu'ils ont chacun en leur place.

COROLLAIRE II.

44. Donc la somme des produits de chaque corps par sa distance de la droite HR, est égale à la somme des corps multipliée par la distance NM du centre commun N de gravité. Ainsi dans la figure 27 on a $B \times BI + A \times AL + C \times CP + D \times DR = B \times OM + A \times OM + C \times OM + D \times OM$, ou bien appellant la somme des poids s on a $B \times BI + A \times AL + C \times CP + D \times DR = s \times OM$.

REMARQUE.

45. Il faut s'attacher à bien comprendre cette Propofition, parce qu'elle eft le fondement de tout ce que nous devons dire dans la fuite touchant la mefure des furfaces & des corps.

PROPOSITION XVI.

46. *Un corps* A *qui pend librement à un point* C *d'un levier* BC, (Fig. 29.) *a le même moment par rapport au centre* B *de mouvement que s'il étoit attaché en* C.

DEMONSTRATION.

Tirez la ligne verticale BV, & du point A la droite AM paralelle au levier que je fuppofe être horifontal, & par conféquent perpendiculaire à BV; quand le levier defcendra fon extremité C, décrira le quart de circonference CSPQR, & le corps A fera dans les différentes fituations CA, SX, PZ, QT, RV. Or la longueur du fil CA étant la même partout, on aura SX = CA = GN, ôtant donc de part & d'autre la partie commune SN, on aura GS = NX, de même PZ = CA = IL, ôtant donc de part & d'autre la partie commune PL, on aura IP = LZ, & comme cela arrivera dans tous les points du quart de circonference GSPQR, il s'enfuit que la figure MNAZTV fera un quart de cercle égal au quart de cercle BCSPQR. Donc le corps A aura parcouru le même efpace que s'il avoit été attaché en C, & par conféquent fon moment fera le même.

COROLLAIRE I.

47. Si le levier BC étoit traverfé par d'autres leviers DE, FG, (*Fig.* 31.) perpendiculaires ou obliques, mais qui fuffent dans le même plan horifontal avec le levier BC, les poids fufpendus aux extremités D, E, F, G de ces leviers, auroient les mêmes momens que s'ils étoient attachés à ces extremités, & tirant fur le levier BC les droites DH, EI, GR, FS paralelles à l'axe MN de mouvement, les corps attachés en H, I, R, S auroient encore les mêmes momens que s'ils étoient fufpendus aux extremités des deux leviers, & cela dans les différentes fituations où fe trouveront les leviers traverfans, lorfque le levier BC viendra à defcendre parce que dans cette fuppofition les extremités des leviers

viers traversans seront toujours à égale distance de l'axe de mouvement, ainsi qu'on peut voir. Si on les transporte sur le levier principal BC, en menant de ces points au levier BC des lignes paralelles au plan vertical qui passe par l'axe de mouvement; ce qui n'arrive pas quand les leviers traversans ne sont pas dans le même plan horisontal avec le levier BC, comme on verra par le Corollaire suivant.

COROLLAIRE II.

48. Si un corps étoit suspendu à l'extremité d'un levier traversant CR, qui fût dans le plan vertical qui passe par le levier BC, soit que ce levier traversant fût perpendiculaire ou non, il seroit bien vrai de dire que le moment de ce corps seroit égal au moment qu'il auroit étant attaché à cette extrémité, & à celui qu'il auroit si on le mettoit au point du levier BC où iroit aboutir une ligne paralelle au plan vertical qui passe par l'axe de mouvement; mais dès lors que le levier BC viendroit à descendre, ce ne seroit plus la même chose, & à chaque situation différente il faudroit chercher un nouveau point de ce levier pour y rapporter le corps.

Soit par exemple le levier CR (*Fig.* 30.) vertical & perpendiculaire au levier BC, le poids R; soit qu'il soit suspendu à l'extremité R, ou qu'il y soit attaché, aura le même moment, parce qu'il sera toujours autant éloigné du plan vertical qui passe par l'axe de mouvement, que s'il étoit attaché en R, à cause que le fil auquel il seroit suspendu seroit toujours paralelle à ce plan; il est encore vrai de dire que ce corps auroit encore le même moment que s'il étoit au point C, tant que le levier BC gardera sa situation horisontale; mais quand le levier venant à descendre aura son extremité C en P, alors, à cause de l'inflexibilité du levier CR, le corps R sera en X, d'où tirant une paralelle au plan vertical qui passe par l'axe de mouvement, on trouvera que le moment du corps R ne seroit plus comme s'il étoit en P, mais comme s'il étoit au point V d'un levier horisontal BV, ou au point Z du levier BC lorsqu'il est dans la situation BP, & on trouvera la même chose lorsque le levier BC sera dans la situation BQ, BS, &c.

Ce seroit la même chose si le levier traversant étoit attaché par dessous le levier BC, sur quoi on pourroit faire bien des recherches ausquelles nous ne nous arrêterons pas, parce que cela nous écarteroit de notre dessein.

CHAPITRE II.

Application des principes précédens à la geometrie.

DEFINITION X.

49. QUOIQUE les lignes & les plans Mathematiques n'ayent aucune pesanteur, puisqu'on les suppose sans épaisseur, cependant si l'on conçoit des poids suspendus à tous les Elemens d'une ligne, il est constant que ces poids auront un centre d'équilibre sur cette ligne, & de même si l'on conçoit des poids suspendus à tous les points des lignes dont un plan est composé, ces poids auront certainement un centre d'équilibre sur ce plan. Or c'est ce centre d'équilibre sur une ligne ou sur un plan que nous appellerons *centre de gravité* de la ligne ou du plan, parce que c'est à ce centre que se réunit toute la force qui fait tendre les corps au centre de la terre ou au centre des graves.

PROPOSITION XVII.

50. *Une ligne droite* AB (Fig. 32.) *étant donnée, ayant toutes ses parties tournées d'un même côté par rapport à une autre ligne* BR *donnée de position, le produit de la ligne* AB *par la distance de son centre de gravité à la ligne* BR, *est égal au produit de tous ses points*, A, C, D, E, F, G, *&c. multipliés chacun par leur distance à la ligne* BR.

DEMONSTRATION.

Par les Propositions X. & XV. plusieurs poids étant suspendus à un levier AB, si on les transporte ensemble à leur centre d'équilibre que je suppose en E, leur moment par rapport à une droite BR mise ou à l'extremité B du levier, ou tout-à-fait hors du levier, est égal à la somme des momens que les poids ont chacun en leur place par rapport à cette même ligne ; cela posé, concevons que de tous les points A, C, D, E, F, &c. de la ligne AB pendent des poids tous égaux entr'eux, & que leur centre d'équilibre soit en E, la ligne AB sera un levier perpendiculaire ou oblique à la ligne BR qui passera par son extrémité B ou qui sera toute hors du levier AB par la supposition. Or dans tous ces cas le

moment des poids mis ensemble au centre E, sera égal à la somme des momens des poids mis chacun à leur place, donc le produit de la somme des poids par la distance de leur centre d'équilibre à la ligne BR, c'est-à-dire, par EB, si BR & AB se touchent, ou par EP s'ils ne se touchent pas, sera égal aux produits des poids multipliés chacun par sa distance à la même ligne. Or les points A, C, D, E, F, &c. de la ligne AB, étant tous égaux, sont entr'eux comme les poids que nous supposons aussi égaux; donc il y aura même raison du produit de la somme des points multipliée par EB ou EP aux produits des points multipliés chacun par sa distance, que de la somme des poids multipliée par EB ou EP, aux produits des mêmes poids multipliés chacun par sa distance. Donc la somme des points multipliée par EB ou EP, sera égale aux produits des points multipliés chacun par sa distance à la ligne BR; mais la somme des points est égale à la ligne AB, donc la ligne AB multipliée par EB, lorsqu'elle touche la ligne BR, ou par EP lorsqu'elle ne la touche pas, est égale aux produits de ses points multipliés par leur distances.

DEFINITION XI.

51. Le produit de chaque point d'une ligne AB, par sa distance à une autre ligne BR donnée de position, & qui est toute d'un même côté par rapport à la ligne AB s'appellera *moment* de ce point, & le produit de la somme des points ou de la ligne AB par la distance EB, ou EP de son centre de gravité s'appellera *moment* de la ligne.

COROLLAIRE.

52. Les momens des points d'une ligne BA, (*Fig.* 33.) par rapport à une autre ligne qui la touche à son extrêmité & qui est perpendiculaire, forment un triangle rectangle isocele BAH, car les distances B, BE, BD, BC, &c. de ses points, sont entr'elles comme 0. 1. 2. 3. 4, &c. c'est-à-dire, comme les Elemens d'un triangle, multipliant donc chaque point par sa distance, ou élevant sur chacun d'eux une ligne perpendiculaire égale à sa distance, la figure qu'elles formeront sera un triangle lequel sera rectangle à cause de AH perpendiculaire à AB; de plus ce triangle sera isoscele si les deux lignes AB, BR, sont perpendiculaires entr'elles, parce qu'alors on aura AB = AH, mais ce triangle sera scalene si les lignes BA, BR ne sont pas perpendiculai-

res, à cause que le triangle BAX étant rectangle, la distance XA côté de ce triangle, sera toujours moindre que la ligne BA qui en est l'hypothenuse; & par conséquent AH égale à XA sera moindre que AB, mais BAH est un triangle rectangle dont les droites BA, AH sont les côtés, donc ce triangle est scalene.

Que si la ligne *ba* ne touche point la ligne BR, les momens de tous les points de *ba* formeront un trapezoïde *bmna*, car tirant de l'extrêmité *b* la droite *bh* paralelle à BR, la figure *fba*R sera composée d'un rectangle *fbh*R, & d'un triangle *bha*, qui forment ensemble un trapezoïde; or les distances des points *b*, *e*, *d*, *c*, &c. à la ligne BR sont les Elemens de ce trapezoïde, donc les produits des points par des lignes égales à ces Elemens formeront un trapezoïde.

Enfin si la ligne AB étoit paralelle à la ligne BR, les momens de tous ses points formeroient un rectangle parce qu'alors leurs distances seroient toutes égales.

COROLLAIRE II.

53. Soit que la ligne BA soit perpendiculaire ou oblique ou paralelle à la ligne BR (*Fig.* 33.), soit qu'elle la touche par son extrêmité ou qu'elle ne la touche pas, le moment de BA forme toujours un rectangle BQPA, ou *bqpa*, puisque le moment de cette ligne est égal au produit de tous ses points par une même distance. Or comme le moment de la ligne est égal aux momens de tous ses points, il s'ensuit que le rectangle BQPA est égal au triangle BHA, & le rectangle *bqpa* égal au trapezoïde *bmna*, D'où l'on pourroit tirer une méthode indirecte, de trouver le centre de gravité d'une ligne, ainsi qu'il sera dit plus bas.

PROPOSITION XVIII.

54. *Si une ligne droite* AB (Fig. 34.), *dont toutes les parties sont d'un même côté par rapport à une autre ligne droite* BR, *tourne autour de* BR, *en conservant toujours la même distance dans toutes ses parties, la figure qu'elle produit dans le cours de sa revolution est égale au produit de la ligne multipliée par la circonference que décrit son centre de gravité.*

DEMONSTRATION.

Supposons que le centre de gravité soit en D, tandis que la ligne AB tournera autour de BR, tous les points A, C, D, E,

&c. décriront autour de la même ligne des circonferences dont la somme sera égale à la figure formée par la revolution de la ligne, & les rayons de ces circonferences seront les distances des points A, C, D, E, &c. à la ligne BR, donc les circonferences seront entr'elles comme ces distances. Or par la Proposition précédente les points multipliés par leur distance, c'est-à-dire, leurs momens pris ensemble sont égaux au moment de la ligne ou à la ligne multipliée par la distance DB, si les deux lignes sont perpendiculaires entr'elles, ou par la distance DX si elles ne le sont pas; donc les points multipliés par les circonferences qu'ils décrivent sont ensemble égaux à la ligne multipliée par la circonference que décrit la distance DB ou DX du centre de gravité.

COROLLAIRE I.

55. Les momens des points d'une ligne sont à la figure qu'ils décrivent en tournant, comme le rayon d'un cercle à sa circonference, car les momens sont les points multipliés par leurs distances, & la figure décrite n'est autre que les points multipliés par les circonferences dont les distances sont les rayons. Par la même raison, le moment de la ligne est à la ligne multipliée par la circonference que décrit la distance du centre de gravité, comme le rayon à sa circonference; car le moment de la ligne est la ligne multipliée par la même distance.

COROLLAIRE II.

56. Si la ligne BA touche BR, & lui est perpendiculaire, la figure qu'elle décrit en tournant est un cercle (*Fig.* 34.), si elle la touche sans être perpendiculaire, la figure décrite est la surface d'un cone droit; si elle ne la touche pas & qu'elle soit oblique, la figure décrite est la surface d'un cone tronqué; si elle est perpendiculaire sans la toucher, la figure est une couronne (*Fig.* 35.); enfin si elle est paralelle, la figure est la surface d'un cylindre (*Fig.* 36.); tout cela est évident par la seule inspection des figures.

COROLLAIRE III.

57. Si au lieu des circonferences décrites par les points de la ligne AB (*Fig.* 37.), on met des lignes droites égales à ces circonferences & perpendiculaires sur les points de la ligne AB, le cercle que la ligne décrit lorsqu'elle est perpendiculaire sur BR

sera égal au triangle rectangle BAH, car ce cercle n'est autre chose que la somme des circonferences concentriques décrites par les distances B, BE, BD, &c. de points B, E, D, C, &c. de la ligne AB ; or ces distances sont comme o. 1. 2. 3. 4, &c. ou comme les Elemens d'un triangle, donc les circonferences quelles décrivent sont aussi comme les Elemens d'un triangle, & par conséquent les droites égales à ces cercles doivent former un triangle.

Si la ligne AB est perpendiculaire sur BR sans la toucher, les lignes droites égales aux Elemens de la couronne formeront un trapezoïde BAHQ (*Fig.* 38.), car les Elemens de la couronne sont égaux aux Elemens du cercle AOD (*Fig.* 35.), moins les Elemens du cercle BBC; or les Elemens du cercle OAD étant redressés formeroient un triangle rectangle, donc ceux du cercle BBC formeroient aussi un triangle rectangle, & par conséquent les Elemens de la couronne redressés formeroient un grand triangle BAH (*Fig.* 37.), moins un petit triangle BBQ, ce qui fait un trapezoïde BAHQ.

Si la ligne AB touche BR & lui est oblique, les Elemens de la surface conique quelle décrit étant redressés, forment encore un triangle BAH (*Fig.* 39.), car les distances qui décrivent cette surface (*Fig.* 34.), sont entr'elles comme les Elemens d'un triangle, & par conséquent leurs circonferences sont dans la même raison.

Si la ligne AB est oblique à BR & ne la touche point, la surface qu'elle décrit (*Fig.* 34.), étant redressée forme un trapezoïde BAHQ (*Fig.* 40.), car les distances qui décrivent les circonferences dont cette surface est composée, sont comme les Elemens d'un trapezoïde (*Fig.* 34.).

Enfin si la ligne AB est paralelle à BR, la surface cylindique qu'elle décrit étant redressée forme un rectangle, à cause que les distances qui décrivent les circonferences qui composent cette surface sont toutes égales (*Fig.* 36.)

COROLLAIRE IV.

58. Soit que la ligne AB soit perpendiculaire ou oblique, soit qu'elle touche ou qu'elle ne touche pas la ligne BR, son produit par circonference que décrit son centre de gravité, est toujours égal à un rectangle BANM, (*Fig.* 37. 38. 39. 40.), égal au triangle ou

au trapezoïde des figures redressées; ce qui est évident par tout ce que nous venons de dire.

PROPOSITION XIX.

59. *Une surface plane* ABCE *étant donnée, dont toutes les parties sont d'un même côté par rapport à une ligne donnée de position ab dans le même plan; le moment de tous les points des lignes ou des Elemens de cette surface, est égal au produit de la surface par la distance* SZ *de son centre de gravité* S *à la ligne ab* (Fig. 41.).

DEMONSTRATION.

Prenons les Elemens BC, EF, GH, &c. paralelles à la ligne *ab*, & concevons que tous les points de ces lignes soient chargés de poids égaux entr'eux, les poids de chaque ligne auront un centre d'équilibre, auquel étant tous transportés, leur moment par rapport à *ab* sera égal aux momens qu'ils ont chacun en leur place, c'est-à-dire, tous les poids de la ligne BC auront chacun à sa place des momens égaux au moment qu'ils auroient, étant tous mis au centre de gravité I; de même les poids de la ligne GF étant transportés à leur centre d'équilibre L, leur moment sera égal aux momens qu'ils ont chacun à sa place, & ainsi des autres. Concevant donc que dans toutes les lignes les poids soient transportés à leurs centres d'équilibre pour n'y faire qu'un seul poids, nous aurons les poids I, L, M, N, O, P, Q, R, X, qui représenteront les poids dont toute la surface est chargée. Or tous ces poids auront encore un centre d'équilibre commun, car joignant les poids L, I, par une ligne droite, on trouvera un centre d'équilibre entr'eux, & de ce centre tirant une ligne au poids M, on trouvera un centre d'équilibre entre les deux premiers & le poids M, & de ce nouveau centre tirant au poids N une droite, on trouvera un centre d'équilibre entre les trois premiers & le poids N, & ainsi de suite. Supposant donc que le centre d'équilibre commun à tous les poids soit en S, tous les poids étant transportés en S, leur moment par rapport à *ab* sera égal aux momens de tous les poids mis chacun à sa place, c'est-à-dire, repandus sur tous les points des Elemens BI, EF, GH, &c. Or les points de ces Elemens sont entr'eux comme les poids, donc le moment de la somme des points, c'est-à-dire, tous les

points multipliés par la distance SZ seront égaux à tous les points multipliés chacun par sa distance à la ligne *ab*. Or tous les points pris ensemble sont égaux à la surface ABCE, donc la surface ABCE multipliée par la distance SZ de son centre de gravité, est égale à tous les points multipliés chacun par sa distance à la ligne *ab*.

COROLLAIRE I.

60. Ce seroit encore la même chose quand même on prendroit les Elemens de la surface ABCE obliques à la droite *ab* (*Fig.* 42.). Car tous les poids de l'Element CE étant transportés à leur centre I d'équilibre, leurs momens par rapport à *ab* seroit toujours égal aux momens qu'ils auroient chacun à sa place (*Proposit.* XV.) & de même des autres, & l'on prouveroit ainsi que ci-dessus, que tous les poids étant transportés au centre d'équilibre commun S, leur moment seroit égal aux momens qu'ils auroient étant répandus sur les Elemens.

DEFINITION.

61. Si un Prisme ABCDEFGH (*Fig.* 43.) est coupé par un plan AGHD, ou QGHP (*Fig.* 44.) incliné à sa base ABCD, la partie ABCDHG (*Fig.* 43.), ou ABCDPHGQ (*Fig.* 44.) s'appellera *Onglet*. Ce qui doit s'entendre de toute sorte de Prismes reguliers ou irréguliers quelque nombre de côtés qu'ait la base, & par conséquent du Cylindre (*Fig.* 45.) parce que le cylindre est un Prisme dont la base a une infinité de côtés.

COROLLAIRE II.

62. Les momens de tous les points des Elemens d'une surface ABCD (*Fig.* 46.) par rapport à une droite AD, qui est toute d'un même côté de la surface, forment un onglet dont le plan incliné ADSR fait avec la base un angle de quarante-cinq dégrés. Concevons que de tous les points des Elemens, soient élevées sur la surface des perpendiculaires égales à leurs distances de la ligne AD, ces perpendiculaires seront les momens de ces points, & formeroient un Prisme si elles étoient toutes égales, mais comme elles ne le sont pas, concevons que des extrémités élevées de ces perpendiculaires soient tirées des droites SD, NM, RA, &c. aux extrémités de leurs distances; la perpendiculaire SC étant égale à DC, le triangle SCD sera

rectangle

rectangle isoscele, & par conséquent l'angle SDC sera de 45 dégrés. Par la même raison, les angles NME, RAB, &c. seront de 45 dégrés. Ainsi toutes les lignes tirées des extrémités des perpendiculaires aux extrémités de leurs distances feront avec la surface ABCD un angle de 45 dégrés ; & de plus elles seront paralelles entr'elles à cause que les distances sont paralelles. Prenons donc sur ces lignes les parties A*a*, M*c*, D*b*, &c. égales entr'elles, & abaissant sur les distances les perpendiculaires *ar*, *cs*, *bt*, les triangles A*ar*, M*cs*, D*bt*, seront rectangles isosceles, étant semblables aux triangles ARB, MNE, &c. & à cause des hypothenuses égales A*a*, M*c*, &c. ils seront égaux ; donc les perpendiculaires *ar*, *cs*, *bt*, &c. seront égales ; donc la ligne *ab* qui joint les sommets sera droite & paralelle à la droite *rt*, & à la droite AD. Ainsi concevant que AD se meuve toujours paralellement à elle-même le long de M*c*, quand le point M sera en *c*, la ligne AD tombera sur la ligne *ab*, & l'espace parcouru AD*ba* sera un plan dans lequel seront les lignes A*a*, M*c*, D*b* ; donc si la ligne AD continuë à se mouvoir toujours paralellement à elle-même sur la ligne MN prolongée, même s'il le faut, l'espace parcouru sera le prolongement du plan AD*ba*, & comme les lignes AR, DS, &c. suivent la direction de leurs parties A*a*, D*b*, &c. qui sont dans le plan AD*ba*, il s'ensuit que leurs parties *a*R, *b*S seront dans le prolongement de ce plan. Donc toutes ces lignes sont dans un même plan, & par conséquent les extrémités de toutes les perpendiculaires ou des momensdes points de la surface, sont dans un plan incliné qui fait avec la base un angle de 45 dégrés. Donc ces momens, ou ces perpendiculaires forment un onglet dont le plan incliné fait un angle de 45 dégrés avec la base.

COROLLAIRE III.

63. Si la surface plane ABCD (*Fig.* 47.) ne touche point la droite XZ donnée de position, les momens de tous les points de ses Elemens, forment un onglet dont le plan incliné coupe tous les côtés, & dont la section avec la base prolongée est la ligne donnée XZ, & l'angle d'inclination est toujours de 45 dégrés, ce qui est évident par le second Corollaire.

COROLLAIRE IV.

64. Il est clair que la surface ADBC multipliée par la dis-

tance de son centre de gravité, est un Prisme égal à l'onglet; puisque la surface multipliée par la distance de son centre de gravité, n'est autre chose que tous les points de ses Elemens multipliés par la même distance, ou que la somme des perpendiculaires égales à cette distance que l'on éleveroit sur tous les points, & qui par conséquent formeroient un Prisme.

COROLLAIRE V.

65. Donc tout onglet dont le plan incliné fait avec sa base prolongée, s'il le faut, un angle de 45 dégrés, est égal au produit de sa base par la perpendiculaire élevée sur son centre de gravité, & comprise entre la base & le plan incliné.

Nous ferons voir dans la suite que cette proprieté convient à tous les onglets, quelqu'angle que leurs plans inclinés fassent avec la base.

PROPOSITION XX.

66. *Si une surface* ABCDE (Fig. 48.) *tourne autour d'une ligne* AE *donnée de position, & qui est toute d'un même côté par rapport à la surface, le solide qu'elle décrira sera égal au produit de la surface par la circonférence décrite par son centre de gravité* R.

DEMONSTRATION.

Tandis que la surface tournera, tous les points de ses Elemens décriront des circonférences dont les rayons seront les distances de ces points à la ligne AE. Donc ces circonférences seront entr'elles comme ces distances. Or par la Proposition précédente, les points multipliés chacun par sa distance sont égaux à la somme des points multipliée par la distance RS du centre de gravité. Donc les points multipliés chacun par la circonférence qu'il décrit, sont ensemble égaux à la somme des points ou à la surface multipliée par la circonférence que décrit le centre de gravité, mais les points multipliés chacun par sa circonférence, composent le solide que décrit la surface; donc ce solide est égal au produit de la surface par la circonférence que le centre de gravité décrit.

COROLLAIRE I.

67. Si la surface ABCD (*Fig.* 49.) ne touche pas la ligne XZ autour de laquelle elle tourne, le solide qu'elle décrira sera

ou solide creux tel que la figure le represente, qui sera toujours égal au produit de la surface ABCD par la circonférence que décrira la distance RS de son centre de gravité.

COROLLAIRE. II.

68. Si au lieu des circonférences décrites par les points des Elemens d'une surface ABCD qui tourne autour d'une ligne AB (*Fig.* 50.), ou XZ (*Fig.* 51.), on met des lignes droites égales à ces circonférences & perpendiculaires à la surface ABCD, ces lignes formeront un onglet ABCDNM (*Fig.* 50.), ou ABCDNMOP (*Fig.* 51.); car par la Proposition précédente, si ces perpendiculaires étoient égales aux distances des points de la surface à la ligne AB (*Fig.* 50.), ou XZ (*Fig.* 51.), elles formeroient un onglet; or en faisant ces perpendiculaires égales aux circonférences, elles seront en même raison que les distances, qui sont leurs rayons; donc elles formeront aussi un onglet. Ce qu'on pourra démontrer encore de la même façon que nous avons fait dans la Proposition précédente, en tirant des lignes NA, MB, &c. des extrémités des perpendiculaires aux extrémités des distamces (*Fig.* 50.) car on trouvera que ces lignes formeront des triangles semblables NDA, MCB, &c. & que par conséquent elles seront également inclinées sur la base, & paralelles entr'elles; d'où il suit qu'elles seront dans un même plan, &c. & la même chose se démontrera pour la figure 51.

COROLLAIRE III.

69. Le produit d'une surface ABCD qui tourne autour d'une ligne, par une droite égale à la circonférence que décrit son centre de gravité, est un Prisme ABCDVRST (*Fig.* 50. 51.), égal à l'onglet dont nous venons de parler.

COROLLAIRE IV.

70. Donc tout onglet égal au solide rond, produit par la circonvolution de sa base autour d'une ligne droite, est égal au produit de sa base par une ligne droite égale à la circonférence que décrit son centre de gravité.

REMARQUE.

71. De tout ce que nous venons de dire dans les quatre dernieres Propositions, il s'ensuit 1°. Que si l'on connoît le centre

de gravité d'une ligne ou le centre de gravité commun de plusieurs lignes, on trouvera facilement les surfaces que ces lignes décrivent, en tournant autour d'un axe ; 2°. Si l'on connoît le centre de gravité d'une surface plane, on connoîtra aussi le solide rond que décrit cette surface, en tournant autour d'un axe ; ce qui est d'une grande utilité pour la mesure de ces sortes de corps, puisqu'il suffit pour les connoître de trouver la figure plane par la circonvolution de laquelle ils sont décrits, & le centre de gravité de cette figure. Outre cela, nous avons vû qu'il y a deux sortes d'onglets dont on peut connoître la solidité par le moyen des centres de gravité de leurs bases ; & nous allons faire voir qu'il n'en est point qu'on ne puisse mesurer de la même façon, ce qui est encore très-avantageux pour la mesure des corps tronqués. Ainsi par un seul & même principe, nous pouvons parvenir sans beaucoup de peine à la connoissance d'une infinité de surfaces & de corps, soit curvilignes, soit rectilignes, qu'il seroit souvent très-difficile de découvrir d'une autre façon. Et il ne reste plus qu'à chercher le moyen d'employer ce principe dans les occasions, en nous appliquant à trouver les centres de gravité des lignes & des surfaces planes ; ce que nous allons faire dans le Chapitre suivant, & dans le reste de ce Livre, après que nous aurons fait quelques remarques touchant les onglets, & touchant les lignes & les surfaces qui tournent autour d'un axe qui les traverse.

REMARQUE

TOUCHANT LES ONGLETS.

72. *Tout Onglet de quelque espece qu'il soit, est égal au produit de sa base par la perpendiculaire élevée sur le centre de gravité de la base, & comprise entre la base & le plan incliné.*

Soit l'onglet ABCDNM (*Fig.* 52.) dont la base est le quadrilatere ABCD qui a son centre de gravité au point O ; & dont le plan incliné ABMN passe par le côté AB de la base ABCD. Je coupe cet onglet par un autre plan incliné ABRS, qui passe par le même côté AB, & qui fasse avec la base ABCD un angle de 45 dégrés, ce qui me donne un petit onglet ABCRS qui est égal à la somme des momens de tous les points qui composent les Elemens de la base (*N.* 62.). Donc ce petit onglet est égal au produit de la base ABCD par la perpendiculaire OI élevée

sur le centre de gravité O, & comprise entre la base & le plan incliné, à cause que cette perpendiculaire OI est égale à la distance XO du point O, à la ligne AB autour de laquelle on conçoit que la base ABCD tourne (*N.* 58. 64.). Je coupe le grand onglet ABCDNM par des plans paralelles entr'eux, & perpendiculaires à la base ABCD & à la droite AB. 1°. Les sections de ces plans seront des triangles rectangles AND, XZT, &c. tous semblables entr'eux, à cause que leurs hypothenuses AN, XZ, &c. étant toutes dans le plan incliné ABMN, forment avec leurs côtés AD, XT, des angles aigus égaux. (Nous supposons que l'onglet est droit, car autrement les triangles ne seroient pas rectangles.) 2°. Si l'on conçoit que ces triangles soient infiniment proches, ils seront les Elemens de l'onglet, qui par conséquent sera égal à leur somme. 3°. Le petit onglet ABCRS sera aussi coupé en un égal nombre de triangles rectangles ASD, XVT, &c. qui seront semblables entr'eux. Cela posé, les triangles du grand onglet seront aux triangles du petit onglet comme les hauteurs DN, TZ, &c. aux hauteurs DS, TV, &c. à cause que ces triangles ont les bases égales AI, XT, &c. mais les hauteurs DN, TZ, &c. sont proportionnelles aux hauteurs DS, TV, &c. car les triangles semblables ADN, XZT, donnent ND, ZT :: AD, XT, & les triangles semblables ADS, XTV, donnent SD, VT :: AD, XT; donc ND, ZT :: SD, VT, & ainsi des autres. Donc toutes les hauteurs des triangles du grand onglet, sont aux hauteurs des triangles du petit, comme l'une de ces hauteurs ZT, est à l'autre hauteur VT : mais à cause des triangles semblables XTZ, XOH, & XTV, XOI, on a ZT, TV :: HO, IO; donc tous les triangles du grand onglet sont à tous les triangles du petit, comme HO, IO, donc aussi le grand onglet est au petit comme HO à IO, & multipliant les deux derniers termes par la base, le grand onglet est au petit, comme HO multiplié par la base ABCD est à IO multiplié par la même base; or IO multiplié par la base est égal au petit onglet, donc HO multiplié par la base est égal au grand onglet. Donc, &c.

Soit de même un autre onglet droit ABCDNMQP (*Fig.* 53.) dont la base est le quadrilatere ABCD qui a son centre de gravité au point O, & dont le plan incliné PQNM rencontre la base prolongée dans la section *ab*, que je suppose paralelle au côté AB de la base. Je coupe cet onglet par un plan incliné GFRS

qui passe par la même ligne *ab*, & qui fasse avec la base prolongée un angle de 45 dégrés, ce qui me donne un petit onglet ABCDSRFG qui est égal à la somme des momens de tous les points qui composent les Elemens de la base, & par conséquent cet onglet est égal à la base ABCD multipliée par la perpendiculaire OI tirée sur son centre, &c. (*N.* 65.) Je coupe le grand onglet par des plans paralelles entr'eux, & perpendiculaires à la base & à la droite *ab*, les triangles *a*ND, XZT, &c. seront semblables, & les triangles *a*PA, X*rt*, &c. seront aussi semblables. Retranchant donc les uns des autres les trapezoïdes restans APND, *tr*ZT, &c. seront semblables. Par la même raison, les trapezoïdes qui composent le petit onglet seront aussi semblables entr'eux. Or les trapezoïdes du grand onglet sont à ceux du petit, comme les hauteurs aux hauteurs, parce qu'ils sont entr'eux comme les triangles desquels ils font partie, & par la même raison, les hauteurs des trapezoïdes du grand onglet, sont proportionnelles aux hauteurs des trapezoïdes du petit; donc les trapezoïdes du grand onglet sont aux trapezoïdes du petit, comme ZT à VT, ou comme HO à IO, à cause des triangles semblables, ou enfin comme HO multiplié par la base ABCD à IO multiplié par la même base. Or si l'on conçoit que ces trapezoïdes soient en nombre infini, leur somme sera égale aux onglets; & par conséquent le grand onglet sera au petit, comme HO multiplié par la base, est à IO multiplié par la même base. Mais IO multiplié par la base est égal au petit onglet; donc HO multiplié par la base est égal au grand.

Si le plan incliné APMN (*Fig.* 54.) d'un onglet ABCDNMP coupe la base prolongée dans une ligne *ab* qui ne soit pas paralelle à quelqu'un des côtés de la base, on coupera l'onglet par un plan qui passe par la même ligne *ab*, & qui fasse avec la base prolongée un angle de 45 dégrés, après quoi concevant que le grand onglet soit coupé par des plans paralelles entr'eux, & perpendiculaires à la base & à la droite *ab*, on trouvera toujours que l'un & l'autre onglet sont composés de plans qui sont entr'eux comme leurs hauteurs, & que les hauteurs de l'un des onglets seront proportionnelles aux hauteurs de l'autre; d'où on conclura de même que ci-dessus que le grand onglet est au petit comme HO multiplié par la base à IO multiplié par la même base, &c.

Si l'onglet ABCDNM (*Fig.* 55.) étoit incliné, du centre O

de la base, on tireroit OH paralelle aux arêtes DN, CM de l'onglet, & du point H où cette paralelle couperoit le plan incliné, on abaisseroit sur la base une perpendiculaire HS, par laquelle on multiplieroit la base, & le produit seroit la valeur de l'onglet. Car si l'on conçoit sur la même base ABCD un onglet droit de même hauteur que l'onglet incliné, & dont le plan incliné passe par la droite AB, & qu'ensuite on coupe l'un & l'autre par des plans perpendiculaires à la base & à la droite AB, ces deux onglets seront composés d'un même nombre de triangles qui seront égaux entr'eux ; par exemple, le triangle ADN de l'onglet incliné, sera égal au triangle rectangle de l'onglet droit qui aura pour base la droite AD, & pour hauteur la droite NT. De même, le triangle XSZ de l'onglet incliné, sera égal au triangle rectangle de l'onglet droit qui aura pour base la droite XS, & pour hauteur la droite YZ, & ainsi des autres. Or les triangles XSZ, XOH étant semblables, leurs hauteurs sont proportionnelles à leurs bases, & par conséquent XS, XO :: ZY, HS ; donc puisque dans l'onglet droit le triangle rectangle qui aura XS pour base, aura ZY pour hauteur, il s'ensuit que le triangle rectangle semblable qui aura XO pour base, aura HS pour hauteur ; donc HS multiplié par la base ABCD sera égal à l'onglet droit, donc aussi HS multiplié par la même base, sera égal à l'onglet incliné.

73. Le centre de gravité O de la base ABCD d'un onglet droit étant connu (*Fig.* 5[illegible]53.) on connoîtra la perpendiculaire OH de cette façon. Du centre O tirez une perpendiculaire OX sur la droite AB, ou *ab*, qui est la section du plan incliné & de la base ; prolongez cette perpendiculaire de l'autre côté en T, où vous éleverez la perpendiculaire TZ que vous mesurerez, après quoi vous direz : comme XT est à TZ, ainsi XO est à un quatriéme terme, lequel étant trouvé sera la hauteur cherchée HO, ce qui est évident à cause de triangles semblables XTZ, XOH.

Si l'onglet est incliné (*Fig.* 55.) vous direz XS est à la hauteur ZY, comme XO est à un quatriéme terme, lequel étant trouvé sera la grandeur par laquelle il faut multiplier la base pour avoir la valeur de l'onglet.

74. De tout ce que nous venons de dire, il suit que les onglets de même base sont entr'eux comme leurs hauteurs, que ceux de même hauteur sont entr'eux comme leurs bases, que

ceux qui ont les hauteurs & les bases inégales sont en raison composée des bases & des hauteurs, que ceux qui ont les bases réciproques aux hauteurs sont égaux; & enfin, que ceux qui ont les côtés proportionnels, sont entr'eux comme les cubes de leurs côtés homologues.

Au reste, par le mot de hauteur il faut entendre la perpendiculaire tirée du centre de gravité de la base. Voyez-en la raison. (*N.* 95.)

REMARQUE

Touchant les Lignes & les Surfaces qui tournent autour d'un axe qui les traverse.

75. *Si une ligne* AB (Fig. 56.) *dont le centre de gravité est en* C, *tourne autour d'un axe qui la coupe en un point* O, *la partie* OB *multipliée par la distance* CO, *est égale à la ligne entiere multipliée par la même distance, moins la partie* AO *multipliée par* CO.

Concevez que de tous les points de cette ligne pendent des poids égaux dont le centre d'équilibre soit en C, & le centre du mouvement en O, par la huitiéme Proposition; le moment de tous les points étant mis en C, est égal à l'excès du Praeponderant, c'est-à-dire à la somme des momens des poids qui sont sur le bras OB, moins la somme des momens de ceux qui sont sur le bras AO, Or les points de la ligne sont en même raison que les poids; prenant donc les momens de ces points, c'est-à-dire élevant sur chacun d'eux des perpendiculaires égales à leur distance du point O, le moment des points de la partie OB sera le triangle OBE, & le moment de ceux de la partie AO sera le triangle AOR, & par conséquent le triangle OBE moins le triangle AOR sera égal à tous les points ou à la ligne entiere AB multipliée par OC ou CH, c'est-à-dire au rectangle AFGB.

Et pour faire voir combien ceci s'accorde avec la Géometrie ordinaire. De l'extremité R tirez RS paralelle à AB, & prolongez EB jusqu'à ce qu'elle rencontre RS en S; enfin prolongez HC en P, le point P sera le centre de gravité de la ligne RS, de même que C est celui de la ligne AB qui est égale à RS; & le triangle RSE sera rectangle isoscele; ainsi si l'on conçoit que RS tourne autour de R, le triangle RSE sera le moment de tous ses points, & ce moment sera égal à la ligne RS multipliée par PH, c'est-à-dire au rectangle RFGS (*N.* 53.) Otons

de

de part & d'autre la figure commune ROBS, le reste BOE sera égal au reste RAO + AFGB, & ôtant de part & d'autre RAO, nous aurons le reste BOE — AOR égal au reste AFGB.

76. *Si une surface* ABCD (Fig. 57.), *dont le centre de gravité est en* O, *tourne autour d'une droite* EF *qui la coupe, le moment de la partie* EFCD *moins celui de* EFBA, *est égal à la surface entiere multipliée par la distance* QO *du centre de gravité* O *à l'axe du mouvement* EF.

Concevons que de tous les points qui composent les Elemens de cette surface, pendent des poids égaux, le moment de tous les poids mis en O sera égal à l'excès du Preponderant; c'est-à-dire à la somme des momens de tous les poids qui pendent de la partie EFCD, moins la somme des momens de tous les poids qui pendent de la partie EFAB. Mettant donc au lieu des momens des poids ceux des points qui sont en même raison, la somme des momens de tous les points de la partie EFDC sera l'onglet EFCDNM, la somme des momens de tous les points de la partie EFBA sera l'onglet EFBARS, & le moment de tous les points de la surface mis en O, c'est-à-dire la surface entiere multipliée par la distance QO ou OY sera le paralellepipede ABCDLHIP. Donc l'onglet EFCDNM moins l'onglet EFSRAB sera égal au paralellepipede ABCDLHIP.

Si on veut se convaincre encore mieux de ceci: par le sommet RS faites passer un plan RSTV paralelle à la surface plane ABDCD, & prolongez les perpendiculaires ND, MC, HA, IB, jusqu'à ce qu'elles rencontrent ce plan aux points T, V, R, S, que vous joindrez par des lignes droites TV, VS, SR, RT, la surface RSTV sera semblable & égale à la surface ABCD, c'est pourquoi du point O abaissant la perpendiculaire OX, le point X sera le centre de gravité de la surface RSTV, de même que le point O sera le centre de gravité de la surface ABCD; & comme l'angle MSV égal à l'angle MFC est de 45 dégrés par la supposition, il s'ensuit que l'onglet RSVTNM est le moment de tous les points qui composent les Elemens de la surface RSVT qui tourneroit autour de RS; ainsi le paralellepipede RSTVLHIP est égal à l'onglet RSVTNM. Otant donc de part & d'autre la partie commune RSVTCDEF, le reste RSFEAB + ABCDLHIP est égal au reste EFCDNM, & ôtant RSFEAB de part & d'autre, on aura ABCDLHIP égal à l'onglet EFCDNM, moins l'onglet RSFEAB.

Tout ce que nous venons de dire dans ce Chapitre, fait voir que les principes qu'il faut employer à l'égard des lignes & des surfaces qui tournent autour d'un axe, sont précisément les mêmes que nous avons donné dans le Chapitre précédent à l'égard des poids suspendus ou attachés à des leviers.

CHAPITRE III.

Du Centre de gravité des lignes droites.

PROPOSITION XX.

57. TRouver le centre de gravité d'une ligne droite AB (Fig. 59).

Coupez cette ligne en deux parties égales en O, & le point O sera le centre de gravité demandé.

DEMONSTRATION.

Concevez que de tous les points de cette ligne pendent des poids tous égaux entr'eux, & vous connoîtrez évidemment que le centre d'équilibre de ces poids doit être précisément au milieu O de cette ligne, parce qu'alors le nombre des poids d'un côté sera égal au nombre de poids de l'autre, & les distances égales aux distances; de même que les masses seront égales aux masses.

Mais pour faire voir comment on peut appliquer ici l'Arithmétique des Infinis. Considérez que tous les poids étant égaux, formeront la suite infinie des égaux p, p, p, &c. jusqu'au dernier que j'appellerai P, & que par conséquent cette suite sera égale au dernier multiplié par le nombre des termes AB que j'appellerai D, ainsi la somme des poids sera PD. Or si l'on conçoit que le levier AB tourne autour de l'axe RS mis à son extrémité A, & qui lui est perpendiculaire, la distance du premier poids sera zero, & appellant d celle du second, on aura pour celle du troisiéme $2d$, pour celle du quatriéme $3d$, &c. de sorte que ces distances formeront la suite infinie $o.d.2d.3d.4d.5d$, &c. jusqu'au dernier terme qui sera la ligne AB égale à D. Multipliant donc chaque poids par sa distance, nous aurons $op.\ dp.\ 2dp.\ 3dp.\ 4dp.\ 5dp$, &c. DP, qui exprimera la somme des momens

de tous les poids. Or les termes de cette suite étant tous multipliés par la même grandeur *dp*, sont entr'eux comme les termes de la suite infinie o. 1. 2. 3. 4. 5, &c. & par conséquent leur somme est au dernier DP multiplié par le nombre des termes D, comme 1 à 2; donc cette somme sera $\frac{DDP}{2}$. Or pour trouver le centre d'équilibre des poids dans le cas présent, il faut diviser la somme $\frac{DDP}{2}$ de leurs momens par la somme DP des poids (*N.* 28.); faisant donc la division le quotient $\frac{D}{2}$ nous fera voir que la distance AO du centre d'équilibre doit être égale à la moitié de D, ou à la moitié de AB.

Or les points de la ligne AB sont entr'eux comme les poids; donc leur centre de gravité doit être aussi le point O. Et en effet si l'on multiplie chaque point par sa distance, le triangle rectangle isoscele ABE sera la somme des momens des points; & si l'on multiplie tous les points, c'est-à-dire la ligne entiere AB par la distance AO, le rectangle ARXB sera le moment de la ligne AB, & le rectangle ARXB sera égal au triangle ABE; car à cause des triangles semblables AOH, ABE, la hauteur OH du rectangle sera égale à la moitié de la hauteur BE du triangle ABE, & la base AB sera commune. Donc, &c.

PROPOSITION XXI.

78. *Trouver le centre de gravité commun de deux ou de plusieurs lignes.*

Soient les deux lignes AB, DC, (*Fig.* 59.), coupez la ligne AB en deux également au point O, & la ligne DC en deux également au point P, tirez la droite OP, & considerant OP comme un levier auquel seroient attachés deux poids en O & en P, qui seroient entr'eux comme les lignes AB, CD; cherchez le centre d'équilibre X de ces deux poids (*N.* 28) & le point X sera le centre de gravité des deux lignes.

DEMONSTRATION.

Concevez que de tous les points des deux lignes AB, BC, pendent des poids tous égaux entr'eux, le centre d'équilibre des poids qui sont sur la ligne AB, sera au milieu O de cette ligne par la Proposition précedente, & le centre d'équilibre des poids de la ligne CD sera au milieu P de la ligne CD. Or le moment de tous les poids de la ligne AB mis au centre O est égal à la

somme des momens qu'ils ont chacun en sa place, par rapport au levier OP (*N*. 41.) & le moment de tous les poids de la ligne CD mis au centre P, est égal au moment qu'ils ont chacun à sa place par rapport au même levier OP. Donc si le point X est le centre d'équilibre des poids mis en O & en P, le même point X sera aussi le centre d'équilibre de tous les poids mis chacun à sa place; & par conséquent le point X sera le centre de gravité des deux lignes AB, CD.

COROLLAIRE.

79. Pour trouver le centre de gravité commun des trois lignes AB, CD, HQ (*Fig.* 60.), on cherchera d'abord le centre commun X des deux lignes AB, CD, puis du point X on tirera la droite XL sur le milieu de HQ; & considerant les deux lignes AB, CD, comme un seul poids qui seroit mis en X, & la ligne HQ comme un poids qui seroit mis en E, on cherchera sur le levier XL le centre d'équilibre R des poids AB + CD, HL, & ce point R sera le centre de gravité commun des trois lignes. Ce qui se démontre comme ci-dessus, & l'on continueroit de la même façon s'il y avoit un plus grand nombre de lignes (*N*. 41.)

PROPOSITION XXII.

80. *Si deux ou plusieurs lignes tournent autour d'une autre ligne qui est toute d'un même côté par rapport aux lignes qui tournent, les momens de ces lignes pris ensemble seront égaux à la somme des lignes multipliées par la distance de leur centre commun de gravité à l'axe commun de mouvement.*

DEMONSTRATION.

Soient les deux lignes AB, CD (*Fig.* 59.) qui tournent autour de l'axe AC. Si nous concevons qu'elles soient chargées dans tous leurs points de poids égaux, les momens de tous ces poids, par rapport à l'axe AC, seront égaux au moment de tous les poids mis au centre commun X d'équilibre (*N*. 41.); donc aussi les momens de tous les points des lignes AB, CD, seront égaux au produit de tous les points par la distance XM, ou XI du centre de gravité X à l'axe AC. Or les momens de tous les points sont égaux aux momens des deux lignes; donc

les momens des deux lignes AB, BC, sont ensemble égaux aux deux lignes multipliées par XM, ou XI.

AUTRE DEMONSTRATION.

Les momens des points de la ligne AB sont égaux au triangle ABE, & le moment de cette ligne est égal au rectangle ABMN, égal au triangle ABE. De même le triangle CDF est égal aux momens des points de la ligne CD, & le rectangle CDTQ égal au triangle CDF, est le moment de la ligne CD (*N.* 52. 53.). Maintenant le point X étant le centre de gravité commun des lignes AB,CD, nous avons AB, CD :: XP, XO (*N.* 21.) & tirant la droite GH, nous aurons XP, XO :: HI, IG, à cause des paralelles OG, XI, PH; donc AB, CD :: HI, IG. tirons par le point I la droite SIR paralelle à OP, & par conséquent perpendiculaire aux droites OG, PR, & les triangles rectangles semblables GSI, HRI, nous donneront HR, SG :: HI, IG; donc AB, CD :: HR, SG, & par conséquent AB × SG = CD × HR. mais AB × SG est la quantité que perd le rectangle ABMN lorsqu'on multiplie la droite AB par XI ou par OS son égale, au lieu de la multiplier par OG, & CD × HR est la quantité qu'on ajoute au rectangle CDTQ lorsqu'on multiplie la droite CD par XI ou PR son égale, au lieu de la multiplier par PH. Donc ce qui se perd d'un côté se gagne de l'autre, & par conséquent les deux lignes AB, DC, multipliées chacune par XI, sont égales au moment ABMN, plus le moment CDTQ.

REMARQUE.

81. J'ai donné cette seconde Démonstration en faveur des personnes qui aiment qu'on leur démontre les choses par les figures mêmes. Mais il faut avouer qu'elle deviendroit embarrassante, s'il y avoit un plus grand nombre de lignes qui tournassent autour de l'axe AC, au lieu que la premiere Demonstration est plus claire & plus nette & peut s'étendre à quelque nombre de lignes que ce soit.

PROPOSITION XXIII.

82. *Si deux ou plusieurs lignes tournent autour d'un axe qui est d'un même côté par rapport à ces lignes, les surfaces courbes qu'elles décrivent sont égales au produit des lignes par la circonference que décrit leur centre de gravité commun.*

DEMONSTRATION.

Soient les deux lignes AB, CD (*Fig.* 59.) qui tournent autour de l'axe AC; tandis qu'elles tournent tous leurs points décrivent des circonferences dont la somme est égale aux surfaces que les lignes décrivent, & ces circonferences ont pour rayons les distances des points à l'axe AC. Donc les circonferences sont entr'elles comme les rayons, mais les rayons sont égaux aux momens des points, car les momens des points sont des perpendiculaires égales aux distances, donc les circonferences sont entr'elles comme les momens des points. Or les momens des points pris ensemble sont égaux aux momens des lignes, & les momens des lignes sont égaux à la somme des lignes multipliées par la distance XM du centre commun de gravité à l'axe AC, donc les circonferences prises ensemble sont égales à la somme des lignes multipliées par la circonference décrite par le centre de gravité X.

COROLLAIRE I.

83. Si au lieu des circonferences décrites par tous les points des lignes, on met des lignes droites égales à ces circonferences, les lignes produiront des triangles ou des trapezes ou des rectangles, comme nous avons démontré plus haut, & la somme de ces triangles, trapezes ou rectangles, sera égale à la somme des lignes multipliée par une ligne droite égale à la circonference que décrit le centre de gravité, ce qui est évident.

COROLLAIRE II.

84. Si une surface ABCD (*Fig.* 50.) tourne autour de l'un de ses côtés AB, & qu'au lieu des circonferences que décrivent les points de ses autres côtés BC, CD, DA, on mette des lignes droites égales aux circonferences, ces lignes formeront la surface d'un onglet ABCDNM, ce qu'il est facile de prouver après ce que nous avons dit des onglets, & cette surface sera égale au produit des lignes BC, CD, DA, par la ligne droite égale à la circonference que décrit le centre de gravité de ces lignes, c'est-à-dire, à la perpendiculaire élevée sur ce centre de gravité & comprise entre la base & le plan incliné de l'onglet.

Où il faut bien prendre garde de ne pas confondre le centre de gravité des lignes BC, CD, DA, avec le centre de gravité de

la base ABCD, car l'un n'est pas la même chose que l'autre.

De même si une surface ABCD (*Fig.* 51.) tourne autour d'une ligne XZ qui ne soit pas l'un de ses côtés, & qu'au lieu des circonferences que décrivent tous les points de son contour, on mette des lignes droites égales à ces circonferences, ces lignes décriront la surface d'un onglet ABCDNMOP, qui sera égale au contour multiplié par la ligne droite égale à la circonference que décrit le centre de gravité du contour, c'est-à-dire, à la perpendiculaire élevée sur ce centre de gravité, & comprise entre la base & le plan incliné de l'onglet.

COROLLAIRE III.

85. Toute surface d'onglet est égale à la somme des lignes du contour de la base de cette surface, multipliée par la perpendiculaire élevée sur le centre de gravité de ces lignes & comprise entre la base & le plan incliné de l'onglet, ce qui se démontre de même que nous l'avons demontré pour les onglets.

Où il faut observer que dans les onglets, dont le plan incliné tombe sur un côté de la base, ce côté ne doit point être compris avec les autres; par exemple, dans l'onglet ABCD (*Fig.* 50.) la ligne AB ne doit point être comptée avec les trois autres BC, CD, DA, parce que la ligne AB ne produit aucune partie de la surface.

COROLLAIRE IV.

86. Si l'onglet est incliné (*Fig.* 55.), il faudroit se donner de garde de chercher sa surface en y appliquant la methode que nous avons employée ci-dessus pour trouver sa solidité, car quoique l'onglet incliné soit égal à un onglet droit de même base & de même hauteur; il n'est pas vrai que la surface de l'un soit égal à la surface de l'autre, ce que l'on peut aisément prouver. C'est pourquoi il faudra mesurer la surface d'un onglet incliné selon les regles ordinaires que la Geometrie enseigne.

COROLLAIRE V.

87. On peut donc mesurer non-seulement toutes les surfaces des corps produits par la circonvolution d'une surface plane, dont le contour a un centre de gravité connu, mais encore les surfaces de tous les corps rectilignes droits tronqués, dont on connoît le centre de gravité du contour de la base.

CHAPITRE IV.

Du centre de Gravité, des Surfaces planes rectilignes.

PROPOSITION XXIV.

88. *Trouver le centre de gravité d'un rectangle & d'un paralellogramme.*

Soit le rectangle ABCD (*Fig.* 61.), coupez deux de ses côtés opposés AB, DC, en deux également aux points H, R; tirez la droite HR que vous couperez en deux également au point O; & le point O sera le centre de gravité du rectangle; vous ferez la même chose pour le paralellogramme ABCD (*Fig.* 62.).

DEMONSTRATION.

Tous les Elemens AB, EF, NM, &c. du rectangle ABCD, sont coupés également par la droite HR, donc leurs centres de gravité sont tous sur la ligne HR, ainsi considérant ces Elemens comme autant de poids égaux mis aux points I, L, O, &c. du levier HR, ces poids seront entr'eux comme la suite infinie des égaux p, p, p, p, &c. jusqu'au dernier que nous appellerons P, & concevant que le levier HR tourne autour de l'axe AB, les distances des poids seront o. 1d. 2d. 3d. 4d, &c. jusqu'à la derniere HR que j'appellerai D. Multipliant donc chaque poids par sa distance, nous aurons la suite infinie op. 1dp. 2dp. 3dp. 4dp, &c. DP, qui exprimera la somme des momens des poids; or cette suite est comme la suite infinie o. 1. 2. 3, &c. donc la somme est égale au dernier terme DP multipliée par $\frac{1}{2}$D, ou par la moitié du nombre des termes, & par conséquent cette somme est $\frac{DDP}{2}$. Or pour avoir le centre de gravité dans le cas présent, il faut diviser la somme des momens par la somme des poids (*N*. 28.), & la somme des poids est DP, c'est-à-dire le dernier poids multiplié par le nombre des termes, faisant donc la division, le quotient $\frac{D}{2}$ nous fera voir que la distance HO doit être la moitié de D ou de HR, donc le point O est le centre d'équilibre de tous les poids, ou le centre de gravité commun de tous les Elemens

mens du rectangle ABCD, & par conséquent ce point est le centre de gravité du rectangle.

COROLLAIRE.

89. Si après avoir tiré la ligne HR on avoit coupé les deux autres côtés AD, BC en deux parties égales aux points X, Z, & qu'on eût tiré la ligne XZ qui auroit coupé la ligne HR au point O; il est évident que cette ligne auroit coupé en deux parties égales tous les Elemens du rectangle paralelles au côté AD, donc tous ces Elemens auroient eu leurs centres de gravité sur la droite XZ, & par conséquent leur centre de gravité commun, ou le centre de gravité du rectangle auroit été sur cette ligne, mais ce même centre est aussi sur la ligne HR comme nous venons de voir, donc il doit se trouver sur l'intersection O des deux lignes, d'où l'on tire une regle, que *dans toutes les figures qui ont plusieurs axes, c'est-à-dire plusieurs lignes qui les coupent en deux parties égales, leur centre de gravité se trouve dans l'intersection de ces axes.*

PROPOSITION XXV.

90. *Trouver le centre de gravité d'un triangle* ABC (*Fig.* 63.).

Divisez l'un des côtés AC en deux parties égales au point R, d'où vous tirerez à l'angle opposé la droite RB, coupez RB en trois parties égales, & prenez-en une de R en O, & le point O sera le centre de gravité du triangle.

DEMONSTRATION.

La base AR étant coupée en deux parties égales, tous les Elemens du triangle paralelles à cette base seront aussi coupés en deux parties égales, & par conséquent leurs centres de gravité seront sur la ligne BR aux points E, F, G, H, &c. Concevant donc ces Elemens comme des poids mis aux points E, F, G, H, &c. sur le levier BR qui tourne autour du point B, les distances de ces poids formeront la suite o. 1*d*. 2*d*. 3*d*. 4*d*, &c. D; & les poids étant entr'eux comme les Elemens du triangle, le premier, ou celui qui est au point B, étant infiniment petit sera zero, & si nous appellons le second *p*, le troisiéme sera 2*p*, le quatriéme 3*p*, & ainsi de suite jusqu'au dernier P. Multipliant donc chaque poids par sa distance, nous aurons la suite o.

0.	1*d*.	2*d*.	3*d*.	4*d*.	&c.	D.
0.	1*p*.	2*p*.	3*p*.	4*p*.	&c.	P.
0.	1*pd*.	4*pd*.	9*pd*.	16*pd*.	&c.	PD.

1*pd*. 4*pd*. 9*pd*. 16*pd*, &c. PD, qui exprimera les momens des poids ; or les termes de cette suite sont entr'eux comme les quarrés 0. 1. 4. 9. 16. &c. des nombres 0. 1. 2. 3. 4. &c. donc par l'Arithmetique des infinis leur somme est au dernier PD multiplié par le nombre des termes qui est D, comme 1 à 3, & par conséquent cette somme est $\frac{PDD}{3}$; or pour avoir le centre d'équilibre des poids (*N*. 28.), il faut diviser la somme $\frac{PDD}{3}$ par la somme des poids, laquelle est $\frac{PD}{2}$ à cause que les poids sont entr'eux comme la suite 0. 1. 2. 3. 4, &c. dont la somme est égale à la moitié du dernier terme multiplié par le nombre des termes ; divisant donc $\frac{PDD}{3}$, ou $\frac{2PDD}{6}$ par $\frac{PD}{2}$, ou par $\frac{3PD}{6}$ le quotient $\frac{2D}{3}$ nous fera voir que la distance BO du centre commun d'équilibre O, doit être les deux tiers de BR, & par conséquent OR en est le tiers ; mais le centre commun d'équilibre des poids est le même que celui des Elemens ou du triangle. Donc, &c.

COROLLAIRE I.

91. Si après avoir tiré la droite BR, on divisoit un autre côté BC en deux parties égales, au point M, & que du point M on tirât la droite AM à l'angle opposé, tous les Elemens du triangle paralelles à BC seroient divisés en deux parties égales, & auroient par conséquent leur centre de gravité sur AM, d'où il suit que leur centre commun seroit sur cette ligne, mais ce centre est aussi sur la ligne BR, comme nous venons de voir, donc il doit être dans le point O d'interjection ; & ceci fournit une autre methode de trouver le centre de gravité d'un triangle.

COROLLAIRE II.

92. *Le solide produit par la circonvolution d'un triangle* ABC (Fig. 64.), *autour d'un côté* AB *de sa base, est au solide produit par la circonvolution du même triangle autour d'une droite* HP *tirée de l'angle opposé paralellement au côté* AB, *comme* 1 *à* 2.

Au lieu des solides mettons les onglets ABCD, ABCDE, qui

expriment les moïens des Elemens du triangle, & qui sont en même raison que ces solides, comme nous avons dit plus haut; par le centre O de la base tirons ST perpendiculaire au côté AB, & par conséquent à la droite HP paralelle à AB, les triangles semblables ROS, COT, donnent SO, OT :: RO, OC; mais RO est le tiers de RC, & par conséquent la moitié de OC, donc SO est le tiers de ST ou la moitié de OT. Mais les onglets ABCD, ABCDE, ayant même base, sont entr'eux comme les hauteurs OX, OX, tirées des centres de gravité entre les bases & les plans inclinés, & ces hauteurs OX, OX, sont égales aux droites OS, OT, donc elles sont entr'elles comme 1 à 2, & par conséquent les onglets sont aussi comme 1 à 2. Donc les solides, &c.

DEFINITION.

93. Pour abreger le discours dans la suite, nous appellerons la hauteur OX d'un onglet prise du centre de gravité de sa base, *hauteur moyenne de l'onglet*, & dans le solide rond fait par la circonvolution d'une surface autour d'une ligne droite, nous appellerons la circonference que décrit le centre de gravité, *circonference moyenne*.

REMARQUE.

94. Ce que nous venons de dire à l'égard des deux onglets du triangle ABC, ne doit pas s'entendre de la surface de ces onglets, car dans l'onglet ABCD la surface droite n'est produite que par les deux côtés AC, CB, au lieu que dans l'onglet ABCDE, la surface droite est produite par les trois côtés AB, BC, BA, & par conséquent le centre de gravité des deux lignes AC, CB, n'est pas le même que celui des trois AB, BC, BA, & les distances de ces centres aux droites AB, HP, ne sont pas en même raison que les distances SO, OT.

REMARQUE II.

95. C'est ici le lieu de faire voir pourquoi j'ai dit (*N.* 74.) que par le mot de hauteur dans les onglets, on doit entendre la perpendiculaire élevée sur le centre de gravité, & comprise entre la base & le plan incliné. Car si dans les onglets ABCD, ABCDE (*Fig.* 64.), on prenoit les deux plus grandes hauteurs CD, BE, on trouveroit que ces deux hauteurs sont égales à cause qu'elles

sont chacune égales à ST, puisque nous supposons que ces onglets sont les momens des Elemens du triangle, & que par conséquent le plan incliné fait dans l'un & dans l'autre un angle de 45 degrés avec la base, ce qui rend les deux plus grandes hauteurs égales chacune à ST; ainsi il semble qu'on pourroit conclure que les deux onglets seroient égaux, ayant les bases & les hauteurs égales, cependant cela n'est pas vrai, comme on vient de voir, & par conséquent il n'est pas vrai aussi qu'on doive prendre pour hauteur des deux onglets d'autres lignes que celles qui sont élevées sur le centre de gravité. Je conviens qu'il arrive quelquefois que deux onglets de même base sont entr'eux comme leurs grandes hauteurs, mais cela ne provient alors que parce que les plans inclinés se coupent sur la base dans une même ligne, ce qui fait que les grandes hauteurs sont entr'elles comme les hauteurs moyennes, & l'on auroit tort d'en tirer une regle générale qui seroit certainement trompeuse, comme nous venons de le démontrer. Par exemple, dans les onglets ABCDSR, ABCDNM (*Fig.* 52.) de même base, & dont les plans inclinés coupent la base dans la même droite AB; il est vrai de dire, que ces deux onglets sont entr'eux comme leurs grandes hauteurs TV, TZ, parce que les triangles semblables XZT, XHO, & XVT, XIO, donnent TV, TZ :: OI, OH, c'est-à-dire, les grandes hauteurs proportionnelles aux petites, à cause que les bases sont égales; mais dans les onglets ABCDNM, ABCDNMFG, (*Fig.* 65.) qui ont la base égale, & dont les plans inclinés coupent la base en deux différentes lignes AB, XZ, il n'est plus vrai qu'on puisse dire que ces onglets soient entr'eux comme leurs grandes hauteurs qui se trouvent ici égales, puisque nous avons démontré qu'ils sont comme les hauteurs OI, OH, qui sont certainement inégales. Cette remarque est d'importance, & l'on doit y faire attention, si l'on ne veut pas se tromper.

PROPOSITION XXVI.

96. *Trouver le centre de gravité d'un Polygone regulier* (Fig. 66. 67.)

Cherchez le centre O du Polygone, & ce centre sera le centre de gravité.

DEMONSTRATION.

De l'un des angles B tirés par le centre O la droite BE, qui

aboutira au sommet d'un autre angle E, si le Polygone a un nombre pair de côté, ou au milieu E d'un côté FD, si le nombre des côtés est impair ; & dans l'un & dans l'autre cas, il sera facile de démontrer que le Polygone sera divisé en deux parties égales, & que par conséquent tous ses Elemens perpendiculaires à BE seront coupés en deux également, & auront leur centre de gravité sur la droite BE, d'où il suit que leur centre de gravité commun, c'est-à-dire, le centre de gravité du Polygone sera sur cette droite. Du sommet F d'un autre angle menez une autre droite FC par le centre O, & vous prouverez de la même façon que le centre de gravité du Polygone doit être sur cette droite ; donc ce centre doit être nécessairement au point O qui est l'intersection des deux lignes BE, FC.

COROLLAIRE.

97. *Le solide que décrit un Polygone* ABCDEF, *en tournant autour de l'un de ses côtés* AB (Fig. 67.) *est au solide que ce même Polygone décrit en tournant autour d'une droite* XZ *qui passe par l'un de ses angles, & qui est perpendiculaire au rayon* AO, *comme le rayon droit ou apoteme* RO *est au rayon* AO.

Ces solides ayant même base sont entr'eux comme les circonferences décrites par les centres de gravité de leurs bases. Or ces circonferences sont comme les distances RO, AO, qui sont leurs rayons, donc les solides sont entr'eux comme RO, à AO.

PROPOSITION XXVII.

98. *Trouver le centre de gravité d'un trapezoïde* ABCD (Fig. 68.).

Prolongez les côtés non paralelles jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en un point E, divisés la base AB en deux parties égales, & tirez la ligne OE à l'angle E. Prenez le tiers OX de cette ligne, ce qui vous donnera le centre de gravité du triangle AEB. Prenez de même le tiers PH de la ligne PE, ce qui vous donnera le centre de gravité du triangle DEC, mesurez ces deux triangles & retranchez le petit du grand, le reste sera la valeur du trapezoïde ABCD ; cela posé, faites cette analogie comme le trapezoïde est au petit triangle, reciproquement la distance HX des deux centres de gravité est à un quatriéme terme que vous porterés de X en R, & le point R sera le centre de gravité du trapezoïde.

DEMONSTRATION.

Supposons que le centre de gravité du trapezoïde soit effectivement en R, & que le droit EO soit un levier qui tourne autour de la droite NM perpendiculaire à son extrémité E; le moment du triangle AEB, par rapport à NM, est égal à la somme de ses Elemens multipliée par la distance XE de son centre de gravité, & le moment du triangle DCE est égal à la somme de ses Elemens multipliée par la distance HE, & le moment du trapezoïde est égal à la somme de ses Elemens multipliée par la distance RE; mais les Elemens du triangle DEC & ceux du trapezoïde sont ensemble égaux aux Elemens du triangle AEB, donc les momens du triangle DEC & du trapezoïde, sont ensemble égaux au moment du triangle AEB. Si nous prenons donc trois poids qui soient entr'eux comme les deux triangles & le trapezoïde, & que nous mettions ces poids aux points X, H, R, le moment du poids X sera égal aux momens des poids H, R; Or le poids X est égal à la somme des poids H, R, donc le point X est le point où la somme des poids H, R, étant attachée, son moment est égal aux momens que ces mêmes poids H, R, ont en leur place H, R: mais quand cela arrive le point X est le centre d'équilibre des poids H, R (*N.* 28.), & quand deux poids sont en équilibre autour d'un point X, ils sont entr'eux reciproquement comme leurs distances HX, XR, donc le poids H, ou le triangle DEC, est au poids R, ou au trapezoïde reciproquement comme XR, est à XH: Donc le Problême a prescrit ce qu'il falloit faire.

Il faut s'attacher à bien comprendre cette demonstration parce que c'est sur elle que doivent rouler la plûpart des choses que nous dirons dans la suite.

PROPOSITION XXVIII.

99. *Trouver le centre de gravité d'un trapeze, & des figures irregulieres d'un plus grand nombre de côtés* (Fig. 69.)

Tirez la diagonale DB, qui partagera le trapeze en deux triangles ABD, DCB, dont vous chercherez les centres de gravité H, R; tirez la droite HR, & coupez là en deux parties HO, OR, qui soient entr'elles reciproquement comme les triangles DBC, DAB, & le point O sera le centre de gravité des deux triangles, & par conséquent du trapezoïde; car si l'on conçoit

que les deux triangles soient deux poids attachés aux extrémités H, R, du levier HR; ces deux poids étant entr'eux reciproquement comme leur bras de levier HO, OR, ils seront en équilibre autour du point O, qui sera par conséquent le centre de gravité cherché.

Si la figure avoit un plus grand nombre de côtés, on la partageroit en triangles par des diagonales, puis on chercheroit le centre de gravité commun à deux triangles, ensuite le centre de gravité commun à ces deux ci-joints ensemble, & à un troisiéme, puis le centre de gravité commun à ces trois pris ensemble, & à un quatriéme, & ainsi de suite, de même que nous l'avons enseigné pour les poids.

CHAPITRE V.

Du Centre de Gravité de la Parabole & de ses parties, & du Centre de Gravité des Figures planes dont les Elemens sont reciproques aux termes d'une suite infinie connue.

PROPOSITION XXIX.

100. *Trouver le centre de gavité d'une Parabole quarrée* ABC (Fig. 70.).

Partagés l'axe BH en cinq parties égales, & prenez-en trois de B en O; le point O sera le centre de gravité demandé.

DEMONSTRATION.

Les Elemens de la Parabole ordonnés à l'axe BH, sont tous coupés en deux parties égales par l'axe, & par conséquent leurs centres de gravité sont tous sur cette ligne. Or ces Elemens sont entr'eux comme les racines quarrées de leurs abscisses ou des distances de leur centre de gravité à une droite EB tangente au sommet B, autour duquel nous concevrons que la Parabole tourne. Donc si nous appellons ces distances o. $1d.$ $2d.$ $3d.$ $4d$, &c. D, les Elemens seront o. $\sqrt{1d}.$ $\sqrt{2d}.$ $\sqrt{3d}.$ $\sqrt{4d}$, &c. $\sqrt{D}$. Multipliant donc chaque Element par sa distance, nous aurons la suite o. $d\sqrt{d}.$ $2d\sqrt{2d}.$ $3d\sqrt{3d}$, &c. $D\sqrt{D}$, qui expriment les

momens des Elemens. Or cette suite est le produit de la suite des racines quarrées, dont l'exposant est $\frac{1}{2}$ par la suite des premieres puissances dont l'exposant est 1, donc l'exposant de cette suite est $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$, &

$$0.\ 1d.\ 2d.\ 3d.\ 4d, \&c.\ D.$$
$$0.\sqrt{1d}.\sqrt{2d}.\sqrt{3d}.\sqrt{4d}, \&c.\sqrt{D}.$$
$$0.\ 1d\sqrt{1d}.\ 2d\sqrt{2d}.\ 3d\sqrt{3d}.\ 4d\sqrt{4d}., \&c.\ D\sqrt{D}.$$

par conséquent la somme de cette suite est au dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme 1 est à l'exposant $\frac{3}{2}$ augmenté de l'unité, ou comme 1 à $\frac{5}{2}$, ou comme 2 à 5, ainsi qu'il a été dit dans l'Arithmetique des Infinis; donc cette somme est $\frac{2}{5}$ DD$\sqrt{D}$. Or pour avoir le centre de gravité commun, il faut diviser la somme $\frac{2}{5}$DD$\sqrt{D}$ des momens par la somme des Elemens, qui est $\frac{2}{3}$ D$\sqrt{D}$, à cause que ces Elemens sont comme les racines quarrées des nombres 0. 1. 2, &c. dont la somme est au dernier terme multiplié par le nombre des termes comme 2 à 3. Divisant donc $\frac{2}{5}$ DD$\sqrt{D}$ ou $\frac{6}{15}$ DD$\sqrt{D}$ par $\frac{2}{3}$ D$\sqrt{D}$ ou $\frac{10}{15}$ D$\sqrt{D}$, le quotient $\frac{6}{10}$ D ou $\frac{3}{5}$ D fera voir que la distance BO du centre de gravité O, doit être les trois cinquiémes de l'axe BH.

COROLLAIRE.

101. Le calcul que nous venons de faire peut devenir général pour toutes les figures planes, dont les Elemens sont entr'eux comme les termes d'une suite infinie, soit des nombres 0. 1, 2, 3, &c. soit de quelques puissances de ces nombres, ou de quelques racines &c. Car par exemple, si au lieu des Elemens de la Parabole on met d'autres Elemens dont l'exposant soit appellé x, les momens de ces Elemens, c'est-à-dire, leur produit par leurs distances, forment une suite qui sera le produit de la suite des Elemens dont l'exposant est x, par la suite des distances dont l'exposant est toujours 1. Ainsi l'exposant de la suite des momens sera $x+1$, & la somme de cette suite de momens sera au dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme 1 est à l'exposant $x+1$, augmenté de l'unité, ou comme 1 à $x+2$, ainsi appellant le dernier Element P, son moment sera DP, & ce dernier moment multiplié par le nombre des termes sera DDP, donc la somme des momens sera $\frac{1}{x+2}$ DDP; mais la somme

me des Elemens sera au dernier multiplié par le nombre des termes, comme 1 est à l'exposant x augmenté de l'unité, donc cette somme sera $\frac{1}{x+1}$ DP; divisant donc la somme des momens $\frac{1}{x+2}$ DDP par la somme des Elemens $\frac{1}{x+1}$ DP, le quotient $\frac{x+1}{x+2}$ D fera voir que la distance BO du centre de gravité, doit être à l'axe BH $=$ D comme $x+1$ à $x+2$, ainsi le reste OH de l'axe sera $\frac{1}{x+2}$ D, car $\frac{x+1}{x+2}$ D $+\frac{1}{x+2}$ D $=\frac{x+2}{x+2}$ D $=$ D. Or la partie BO $=\frac{x+1}{x+2}$ D est à la partie OH $=\frac{1}{x+2}$ D, comme $x+1$ est à 1. Donc *la distance du centre de gravité* O *à l'axe de mouvement, est au reste* OH *de l'axe de la figure, comme* $x+1$ *est à* 1*, c'est-à-dire, comme l'exposant de la suite des Elemens augmenté de l'unité est à l'unité.*

Par exemple dans le triangle les Elemens étant comme la suite 0. 1. 2. 3. 4, &c. leur exposant est 1, lequel augmenté de l'unité, fait 2, ainsi la distance BO de son centre de gravité au sommet B (*Fig.* 63.), est au reste OR de l'axe du triangle, comme 2 à 1, ce que nous avons effectivement trouvé ci-dessus.

De même dans la Parabole quarrée les Elemens étant comme les racines quarrées des nombres 0. 1. 2. 3, &c. leur exposant est $\frac{1}{2}$, lequel augmenté de l'unité, fait $\frac{3}{2}$. Ainsi la distance OB de son centre de gravité à l'axe de mouvement, est au reste OH de son axe, comme $\frac{3}{2}$ à 1, ou comme $\frac{3}{2}$ à $\frac{2}{2}$, ou comme 3 à 2; & c'est en effet ce que nous avons trouvé, puisque OB étant les $\frac{3}{5}$ de BH, le reste OH en est les $\frac{2}{5}$, & que $\frac{3}{5}$ est à $\frac{2}{5}$ comme 3 à 2.

Donc si on veut trouver le centre de gravité d'une Parabole cubique, dont les Elemens étant comme les racines cubiques des nombres 0. 1. 2. 3, &c. ont pour exposant $\frac{1}{3}$, on ajoûtera 1 à $\frac{1}{3}$, ce qui fera $\frac{4}{3}$, & l'on dira que la distance OB est au reste OH de l'axe de la Parabole, comme $\frac{4}{3}$ à 1, ou comme $\frac{4}{3}$ à $\frac{3}{3}$, ou comme 4 à 3.

Et pour la Parabole du troisiéme genre dont les Elemens étant entr'eux comme les racines quatriémes des nombres 0. 1. 2. 3, &c. ont pour exposant $\frac{1}{4}$, on ajoûtera 1 à $\frac{1}{4}$, ce qui fera $\frac{5}{4}$, & l'on dira que la distance OB est au reste OH de l'axe, comme $\frac{5}{4}$ à 1, ou comme $\frac{5}{4}$ à $\frac{4}{4}$ ou comme 5 à 4, & ainsi de même pour les Paraboles plus élevées.

De même pour trouver le centre de gravité d'un cone dont

les Elemens étant comme les quarrés des nombres o. 1. 2. 3, &c. ont pour exposant 2, ajoûtant 1 à 2, on dira que la distance du centre de gravité au sommet du cone est au reste de l'axe comme 3 à 1, & ainsi des autres solides dont les Elemens sont entr'eux comme les termes d'une suite infinie connuë.

Proposition XXX.

102. *Trouver le centre de gravité d'un complement* AEB *de demi-Parabole quarrée* ABC (Fig. 71.).

Le complement de demi-Parabole n'a point d'axe, c'est-à-dire, de lignes qui coupent ses Elemens en deux parties égales. C'est pourquoi, si l'on veut trouver son centre de gravité, il faut chercher non-seulement quelle est la distance de ce centre à la ligne BC, ce qui donnera sa distance à la ligne AE, mais encore quelle est la distance à la ligne EB, ce qui donnera celle de la ligne AC.

Pour trouver donc la distance de la ligne BC, concevez que ce complement tourne autour de l'axe BC de la Parabole; les Elemens HM, IN, &c. paralelles à l'axe, sont égaux aux abscisses BO, BZ, &c. & les droites HB, IB, LB, &c. qui marquent les distances de ces Elemens à l'axe de revolution, sont égales aux ordonnées MO, NZ, &c. à la demi-Parabole. C'est pourquoi les abscisses BO, BZ, &c. étant entr'elles comme les quarrés des ordonnées, les Elemens HM, IN, &c. du complement seront entr'eux comme les quarrés de leurs distances BH, BI, BL, &c. Or quoique les Elemens du complement n'ayent pas leur centre de gravité sur la ligne EB, nous pouvons cependant supposer que ces centres sont sur cette ligne parce qu'ils seront toujours à égale distance de BC, & que par conséquent leurs momens par rapport à BC seront les mêmes. Appellant donc les distances B, BH, BI, BL, &c. o. $1d$. $2d$. $3d$. $4d$. &c. D, les Elemens seront o $1d^2$ $4d^2$ $9d^2$ $16d^2$, &c. DD. Multipliant donc les

o. $1d$. $2d$. $3d$. $4d$. &c. D.
o. $1dd$. $4dd$. $9dd$. $16dd$. &c. DD.

---

o. $1d \times dd$. $2d \times 4dd$. $3d \times 9dd$. $4d \times 16dd$. $D \times D$.

Elemens par leurs distances nous aurons la suite o. $1d \times dd$ $2d \times 4dd$. $3d \times 9dd$, &c. $D \times DD$, qui marquera les momens des Elemens. Or cette suite est le produit des quarrés dont l'expo-

sant est 2, par les premieres puissances dont l'exposant est 1, donc l'exposant de cette suite est 3, donc la somme est au dernier terme multipliée par le nombre des termes, comme 1 à 3 + 1 ou à 4; ainsi cette somme est $\frac{1}{4}$ DD×DD, divisant donc cette somme des momens par la somme des Elemens qui est $\frac{1}{3}$ D × DD parce que les Elemens sont entr'eux comme les quarrés des nombres 0. 1. 2. 3, &c. le quotient $\frac{3}{4}$ D nous fera voir que le centre de gravité du complement est éloigné de BC de la distance $\frac{3}{4}$ D ou de trois quarts de BE.

J'ai donné le calcul au long pour y accoutumer les Commençans, mais on pourroit abreger en se servant du Corollaire de la Proposition précédente, car si à l'exposant 2 des Elemens du complement nous ajoûtions l'unité, nous trouverions que la distance du centre de gravité à la ligne BC, est au reste de la ligne BE comme 3 est à 1, & que par conséquent cette distance est les $\frac{3}{4}$ de BE.

Maintenant pour trouver la distance de ce centre à la ligne BE, concevons que le complement tourne autour de BE, & que les Elemens, de même que ceux de la demi-Parabole ABC, & du rectangle circonscrit AEBC, soient paralelles à BE. Quoique les Elemens de ces trois figures n'ayent pas leur centre de gravité sur la ligne AE, nous pouvons cependant supposer qu'ils sont sur cette ligne, parce qu'ils seront toujours à la même distance de la ligne EB, autour de laquelle ils tournent, & que par conséquent leurs momens, par rapport à EB, seront les mêmes. Or les Elemens de la demi-Parabole étant entr'eux comme ceux de la Parabole entiere, la distance de leur centre de gravité commun à la droite EB sera la même que la distance du centre de gravité de la Parabole entiere; ainsi cette distance sera par la Proposition précédente $\frac{2}{5}$ BC ou $\frac{2}{5}$ AE, & la distance du centre de gravité du rectangle AEBC sera $\frac{1}{2}$ AE (*N.* 88.); prenez donc la moitié de EA de E en P, & les trois cinquiémes de E en Q & la partie QP sera $\frac{1}{10}$ de EA, car si de PA = $\frac{1}{2}$ EA = $\frac{5}{10}$ EA, on ôte AQ = $\frac{2}{5}$ EA = $\frac{4}{10}$ EA, le reste sera $\frac{1}{10}$ EA; cela posé, le rectangle ACBE étant égal à la demi-Parabole & au complement, son moment par rapport à EB doit être égal aux momens de la demi-Parabole & du complement qui sont ses parties, & par conséquent il faut que la distance du centre de gravité du complement au centre P du rectangle soit à la distance QP du centre de gravité de la demi-Parabole au même cen-

tre P réciproquement comme la demi-Parabole au complement (*N.* 98.) ; or la demi-Parabole est les $\frac{2}{3}$ du rectangle, & le complement en est le $\frac{1}{3}$. Faites donc cette analogie, comme $\frac{1}{3}$ est à $\frac{2}{3}$ réeiproquement la distance PQ $= \frac{1}{10}$, est à un quatriéme terme $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ que vous porterez de P en R, & la distance ER sera la distance du centre de gravité du complement à la ligne EB, laquelle sera $\frac{3}{10}$ EA ; car de EP $= \frac{5}{10}$ ôtant PR $= \frac{2}{10}$, le reste est $\frac{3}{10}$. Tirez donc du point R une droite RO paralelle à EB, & prenant les trois quarts de EB de B en S, tirez par le point S la droite SO paralelle à EA, & le point O d'intersection sera le centre de gravité du complement, puisque sa distance à la droite BC sera égale aux trois quarts de BE, & sa distance de EB sera les $\frac{3}{10}$ de AE.

PROPOSITION XXXI.

103. *Trouver le centre de gravité d'une demi-Parabole* ABC. (Fig. 72.)

Vous sçavez déja que le centre de gravité de la demi-Parabole est éloigné de la tangente BH au sommet des $\frac{3}{5}$ de l'axe BC ; ainsi prenez-les $\frac{3}{5}$ de cet axe de B en R. Il ne reste donc plus qu'à chercher son éloignement de la droite BC, & pour cela vous sçavez que le centre de gravité de son complement en est éloigné des $\frac{3}{4}$ de BH, & que le centre de gravité du rectangle ACBH en est éloigné de la moitié de BH ; c'est pourquoi prenez la moitié de BH, de B en M, & les trois quarts de B en N ; & comme le rectangle étant égal à la demi-Parabole, plus le complement, son moment par rapport à BC doit être égal aux momens du complement & de la demi-Parabole ; & que par conséquent la distance NM du centre de gravité du complement au centre de gravité du rectangle, doit être à la distance du centre de gravité de la Parabole au centre de gravité du même rectangle réciproquement comme la demi-Parabole est au complement (*N.* 98.). Faites cette analogie, comme la Parabole ou les deux tiers du rectangle est au complement ou au tiers, réciproquement NM $= \frac{1}{4}$ BH est à un quatriéme terme qui sera $\frac{1}{8}$ BH, que vous porterez de M en T ; & par conséquent la distance TB sera $\frac{3}{8}$ BH. Tirant donc par T une paralelle TO à BC, & par R une paralelle RO à BH, le point d'intersection O sera le centre de gravité de la demi-Parabole, car il sera éloigné de HB des $\frac{3}{5}$ de BC, & de BC des $\frac{3}{8}$ de BH.

COROLLAIRE.

104. Il n'est point de fragment de Parabole fait par des lignes droites dont on ne puisse trouver le centre de gravité par les voyes que nous venons d'employer.

Pour trouver par exemple le centre de gravité du fragment ACED fait par la droite DE paralelle à la base AC (*Fig.* 73.) je mesure la demi-Parabole ABC & la demi-Parabole DBE, & retranchant la petite de la grande, le reste est la valeur du fragment ACED, & comme je sçai que le centre de gravité de la demi-Parabole ABC est éloigné de la tangente au sommet de trois cinquiémes de BC, je prens ces trois cinquiémes de B en H, & je prens de même de B en O les trois cinquiémes de BE, pour avoir la distance du centre de gravité de la demi-Parabole DBE à la tangente au sommet. Après quoi, comme la demi-Parabole ABC est égale à la demi-Parabole DBE, plus le fragment ACED. Je dis comme le fragment ACED est à la demi-Parabole DEB réciproquement la distance OH est à un quatriéme terme que je porte de H en R, & la droite BR marque la distance du centre de gravité du fragment ACED à la tangente au sommet B.

Maintenant pour trouver la distance de ce centre à l'axe BC, je sçai que la distance du centre de gravité de la demi-Parabole ABC à cet axe est égale aux $\frac{3}{8}$ de AC; ainsi je prens ces trois huitiémes de C en I, & comme la distance du centre de gravité de la demi-Parabole DBE au même axe est égale aux $\frac{3}{8}$ de DE, je prens ces $\frac{3}{8}$ que je porte de C en H, après quoi comme la demi-Parabole ABC est égale à la demi-Parabole DBE, plus le fragment ACED; je dis le fragment ACED est à la demi-Parabole DBE réciproquement comme la distance HI à un quatriéme terme que je porte de I en S, & la droite CS marque la distance du centre de gravité du fragment ACED à l'axe BC; tirant donc SX paralelle à l'axe BC, & RX paralelle à la base AC, le point d'intersection X est le centre de gravité du fragment ACEB.

De même pour trouver le centre de gravité du fragment AED (*Fig.* 74.) je mesure la Parabole ABC & la Parabole EBH, & retranchant l'une de l'autre, le reste est la valeur du fragment ACHE. Je mesure le rectangle DCHE, & retranchant ce rec-

tangle du fragment ACHE, le reste est la valeur du fragment AED. Je marque sur ED la distance du centre de gravité du fragment ACHE à la base AC de D en R, je marque de même la distance du centre de gravité du rectangle DCHE à la même base de D en S, & comme le fragment ACHE est égal au rectangle DCHE, plus le fragment AED; je dis le fragment AED est au rectangle ACHE réciproquement comme la distance RS est à un quatriéme terme que je mets de S en T, & la droite DT marque la distance du centre de gravité du fragment ADE à la base AC.

Après quoi je marque sur AC de C en M la distance du centre de gravité du rectangle DCHE à l'axe BC, & de C en I la distance du centre de gravité du fragment AECH au même axe; ensuite je dis le fragment AED est au rectangle DCHE réciproquement comme la distance MI à un quatriéme terme que je mets de I en N, & la droite NC marque la distance du centre de gravité du fragment ADE au même axe, donc la droite ND marque la distance de ce même centre à la droite DE; tirant donc NO paralelle à DE, & TO paralelle à AD, le point O d'intersection est le centre de gravité du fragment ADE.

De même encore pour trouver le centre de gravité du fragment ACBE (*Fig.* 75.) je prens de B en M la distance du centre de gravité de la demi-Parabole EHB à la tangente au sommet B, & de B en N la distance du centre de gravité du rectangle ACHE à la même tangente, ensuite comme le fragment ACBE est égal à la demi-Parabole EHB, plus le rectangle ACHE, je partage la distance MN en deux parties MP, PN réciproques au rectangle & à la demi-Parabole EBH, & par conséquent le point P est le point où la somme de la demi-Parabole EHB & du rectangle auroit un moment égal aux momens de la demi-Parabole & du rectangle; ainsi le point P est la distance du centre de gravité de leur somme ou du fragment ACBE à la tangente au sommet.

Je marque de même sur EH de H en R, la distance du centre de gravité de la demi-Parabole EHB à l'axe BC, & de H en S la distance du centre de gravité du rectangle ACHE au même axe. Je coupe la distance SR en deux parties RV, VS réciproques à la demi-Parabole & au rectangle, & le point V marque la distance du centre de gravité du fragment ACBE à l'axe. Tirant donc VO paralelle à l'axe, & PO paralelle à la base ou

à la tangente au sommet, le point d'interfection O eft le centre de gravité du fragment ACBE.

Et on trouvera de la même façon le centre de gravité de tel autre fragment que l'on voudra, ce que je laiffe à chercher aux Commençans.

PROPOSITION XXXII.

105. *Trouver les folides faits par la circonvolution d'une Parabole, d'une demi-Parabole, d'un complement de Parabole, &c. autour d'une tangente au fommet, ou autour de la bafe, &c. & le rapport de ces folides au cylindre circonfcrit.*

Pour abreger nous prendrons au lieu des circonférences décrites par les centres de gravité, les diftances de ces centres qui font en même raifon, puifqu'elles font les rayons des circonférences. Ainfi pour trouver le folide décrit par la Parabole ABC (*Fig.* 70.) autour de la tangente CE perpendiculaire à la bafe, nous appellerons x l'axe BH égal au côté EC du rectangle circonfcrit, & z la bafe AC égale à l'autre côté du rectangle, & par conféquent le rectangle fera zx; or ce rectangle en tournant autour de EC décrit un cylindre égal à la furface xz multipliée par la circonférence que décrit fon centre de gravité lequel eft éloigné de CE de la moitié de AC, ou de $\frac{1}{2}z$; ainfi fon moment fera $\frac{1}{2}zzx$. D'autre part, la Parabole étant les deux tiers du rectangle, vaut $\frac{2}{3}zx$, & comme fon centre de gravité eft auffi éloigné de EC de la moitié de AC, fon moment eft $\frac{1}{2}z \times \frac{2}{3}zx = \frac{1}{3}zzx$; par conféquent le folide décrit par la Parabole eft au folide décrit par le rectangle comme $\frac{1}{3}zzx$ à $\frac{1}{2}zzx$, ou comme $\frac{2}{6}$ à $\frac{3}{6}$, ou comme 2 à 3. Donc le folide que décrit le complement ABCED eft au cylindre, comme 1 à 3.

Si la Parabole tourne autour de la tangente DE au fommet, la diftance du centre de gravité du rectangle à la droite DE, eft $\frac{1}{2}x$, & par conféquent le moment du rectangle eft $\frac{1}{2}xxz$; or la Parabole eft $\frac{2}{3}xz$, & la diftance de fon centre de gravité à la droite DE eft $\frac{3}{5}x$, donc fon moment eft $\frac{3}{5}x \times \frac{2}{3}xz$, ou $\frac{6}{15}xxz$. Donc le folide décrit par la Parabole eft au folide décrit par le rectangle comme $\frac{6}{15}xxz$ à $\frac{1}{2}xxz$, ou comme $\frac{12}{30}$ à $\frac{15}{30}$, ou comme 4 à 5; & par conféquent le folide décrit par le complement eft au cylindre comme 1 à 5.

Si la Parabole tourne autour de la bafe AC, le moment du rectangle fera encore $\frac{1}{2}xxz$; & comme la Parabole eft $\frac{2}{3}xz$,

& que la distance de son centre de gravité à la base est $\frac{2}{5}x$; son moment est $\frac{2}{5}x \times \frac{2}{3}xz = \frac{4}{15}xxz$, donc le solide décrit par la Parabole est au cylindre circonscrit comme $\frac{4}{15}xxz$ à $\frac{1}{2}xxz$, ou comme $\frac{8}{30}$ à $\frac{15}{30}$, ou comme 8 à 15; & par conséquent le solide décrit par le complement est au cylindre, comme 7 à 15.

Il faut dire le même chose de la demi-Parabole ABC (*Fig.* 71.) qui tourneroit autour de la tangente EB, au sommet, ou de la base AC.

Mais si la demi-Parabole tourne autour de son axe, le moment du rectangle ACBE est $\frac{1}{2}zzx$, & comme la Parabole vaut $\frac{2}{3}xz$, & que la distance de son centre de gravité à l'axe est $\frac{3}{8}z$, son moment est $\frac{3}{8}z \times \frac{2}{3}xz = \frac{6}{24}xzz$; donc le solide décrit par la demi-Parabole est au cylindre circonscrit comme $\frac{6}{24}xzz$ à $\frac{1}{2}xzz$, ou comme $\frac{6}{24}$ à $\frac{12}{24}$, ou comme 1 à 2; & par conséquent le solide décrit par le complement ABE, est aussi au cylindre, comme 1 à 2.

Si la demi-Parabole tourne autour de la tangente AE perpendiculaire à la base, le moment du rectangle est $\frac{1}{2}xzz$, & comme la parabole est $\frac{2}{3}xz$, & que la distance de son centre de gravité à la droite AE est $\frac{5}{8}z$, son moment est $\frac{5}{8}z \times \frac{2}{3}xz = \frac{10}{24}xzz$. Donc le solide décrit par la demi-Parabole est au cylindre comme $\frac{10}{24}$ à $\frac{1}{2}$, ou comme $\frac{10}{24}$ à $\frac{12}{24}$, ou comme 5 à 6. Et par conséquent le solide décrit par le complement est au cylindre comme 1 à 6.

Si on se donne la peine de relire ce que nous avons dit touchant ces Solides dans l'*Arithmetique des Infinis*, on trouvera précisément les mêmes mesures, ce qui fait voir l'accord & la vérité des Principes.

COROLLAIRE I.

106. Tandis que la Parabole ABC (*Fig.* 70.) tourne autour de la tangente CE perpendiculaire à sa base, le demi-rectangle HCEB décrit un cylindre de même hauteur que le cylindre décrit par le rectangle entier, mais comme la base HC n'est que la moitié de la base AC, le cylindre décrit par HE ne vaut que le quart du cylindre décrit par AE; & par conséquent le cylindre décrit par le demi-rectangle est le $\frac{1}{4}$ du cylindre décrit par le grand. Or le solide décrit par la demi-Parabole HBC, est au petit cylindre comme 5 à 6. Donc ce solide est au grand cylindre, comme 5 à 4×6, ou à 24.

De

De même le solide décrit par le demi-complement CBE est au petit cylindre, comme 1 à 6. Donc ce solide est au grand, comme 1 à 24.

Or le solide décrit par la Parabole entiere est au grand cylindre, comme 2 à 3, ou comme 16 à 24; donc le solide décrit par la demi-Parabole AHB est au grand cylindre, comme 11 à 24, & comme le solide décrit par le complement entier étoit au grand cylindre, comme 1 à 3, ou comme 8 à 24, ôtant de ce solide celui qui est décrit par le demi-complement CEB qui est $\frac{1}{24}$, il s'ensuit que le solide décrit par l'autre demi-complement ABD est au grand cylindre, comme 7 à 24.

Les Solides décrits par la demi-Parabole HCB, par le demi-complement CBE, par la demi-Parabole ABH, & par le demi-complement ABD sont donc au grand cylindre, comme 5. 1. 11. 7 à 24.

D'où l'on voit que dans l'anneau fermé que décrit une Parabole, la partie intérieure, c'est-à-dire celle qui est décrite par la demi-Parabole HBC est à l'extérieure, ou à celle qui est décrite par la demi-Parabole AHB, comme 5 à 11.

Et pour voir si ceci s'accorde avec ce que nous avons dit là-dessus dans *la Theorie & Pratique des Geometres*, où nous avons enseigné que la partie extérieure de l'anneau surpassoit l'intérieure de deux fois le Paraboloïde décrit par la demi-Parabole autour de l'axe, il n'y a qu'à concevoir une demi-Parabole décrite sur la droite EC prise pour axe, & sur la base HC, cette demi-Parabole sera égale à la moitié de la Parabole ABC, & comme elle sera inscrite dans le demi-rectangle HCEB, le Paraboloïde qu'elle décrira tandis que le rectangle entier tournera autour de EC sera égal à la moitié du petit cylindre, comme on a vû ci-dessus, & par conséquent elle sera au grand comme 1 à 8, ou comme 3 à 24, d'où il suit que le double de ce Paraboloïde sera au grand cylindre comme 6 à 24. Or la partie extérieure de l'anneau étant à l'intérieure, comme 11 à 5 surpasse cette intérieure de 6; & par conséquent elle la surpasse de deux Paraboloïdes faits par la demi-Parabole autour de l'axe; ce qui fait voir de plus en plus l'accord du principe dont nous parlons avec la Géometrie.

COROLLAIRE II.

107. Dans le Corollaire de la Proposition XXIX. (*N.* 101.)

nous avons donné une régle générale pour trouver la distance du centre de gravité au sommet, & à la base des figures qui sont coupées en deux également par leur axe, & dont les Elemens sont entr'eux comme les termes d'une suite connuë, ce qui suffit dans ces figures pour déterminer le centre de gravité qui se trouve nécessairement sur l'axe; mais quand ces figures sont coupées par la moitié, alors le centre de gravité de l'une ou de l'autre de leurs moitiés ne se trouve plus sur l'axe, & quoique sa distance soit toujours la même par rapport au sommet & à la base, il faut cependant chercher la distance de ce centre à l'axe pour pouvoir déterminer sa position, ainsi que nous avons fait pour la demi-Parabole & pour son complement. Or je dis que la regle generale est que *la distance de ce centre de gravité à l'axe est à la moitié de la base de la figure, comme l'exposant des Elemens augmenté de l'unité est au double de cet exposant augmenté de l'unité.* Et voici comme je le démontre.

Soit une demi-Parabole ABC (*Fig.* 76.) de tel genre qu'on voudra, dont l'exposant de la suite des Elemens soit appellé x, les centres de gravité de ces Elemens se trouveront dans le milieu de chacun d'eux; ainsi les distances de ces centres à l'axe BC seront les moitiés IR, DS, HM, &c. de ces Elemens, & comme les moitiés sont en même raison que les touts dont elles sont moitiés, il s'ensuit que ces distances formeront une suite dont l'exposant est aussi x. Multipliant donc chaque Element par sa distance, nous aurons une suite qui sera le produit de deux autres qui ont chacune x pour exposant; donc l'exposant de cette suite sera $x+x$, ou $2x$, & cette suite exprimera la somme des momens des Elemens. Or la somme de ces momens sera à son dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme 1 à l'exposant $2x$ augmenté de l'unité, ou comme 1 à $2x+1$. Appellant donc P le dernier Element, N le nombre des termes qui est l'axe, & D la distance du centre de gravité du plus grand Element à l'axe, le moment du plus grand Element sera PD, & la somme des momens sera $\frac{1}{2x+1}$ NPD. Or la somme des Elemens est au plus grand multiplié par le nombre des termes, comme 1 à $x+1$. Donc cette somme est $\frac{1}{x+1}$NP; ainsi divisant la somme des momens $\frac{1}{2x+1}$ NPD par celle des Ele-

mens $\frac{1}{x+1}$ NP, le quotient $\frac{x+1}{2x+1}$ D nous fera voir que la distance du centre de gravité à l'axe, est à la distance D ou à la moitié EC de la base, comme l'exposant des Elemens plus l'unité est au double de cet exposant plus l'unité.

Pour appliquer ceci, soit la demi-Parabole quarrée ABC (*Fig.* 72.) l'exposant de ses Elemens est $\frac{1}{2}$, & cet exposant augmenté de l'unité est $\frac{3}{2}$. D'autre part le double de cet exposant est 1 auquel ajoûtant l'unité, la somme est 2; & par conséquent la distance du centre O à l'axe, doit être à la moitié de la base AC, comme $\frac{3}{2}$ à 2, ou comme $\frac{3}{2}$ à $\frac{4}{2}$, ou comme 3 à 4, ce que nous avons effectivement trouvé, puisque cette distance est les $\frac{3}{8}$ de la base entiere, & par conséquent les trois quarts de la demi-base.

Dans la demi-Parabole cubique, l'exposant des Elemens est $\frac{1}{3}$, ainsi suivant cette régle, la distance du centre de gravité à l'axe est à la demi-base comme $\frac{1}{3}+1$ à $\frac{2}{3}+1$, ou comme $\frac{4}{3}$ à $\frac{5}{3}$, ou comme 4 à 5. Et de la même façon, on trouvera que la distance du centre de gravité à l'axe dans les demi-Paraboles plus élevées, est à la demi-base comme 5 à 6, comme 6 à 7, comme 7 à 8, &c.

Dans le complement AEB de la demi-Parabole quarrée ABC (*Fig.* 71.) prenant pour axe de ce complement la tangente EB, ses Elemens perpendiculaires à cet axe ont 2 pour exposant; donc suivant cette regle, la distance de leur centre de gravité à l'axe EB, est à la moitié de la base AE, comme 2+1 à 4+1, ou comme 3 à 5, ce que nous avons effectivement trouvé ci-dessus, où nous avons vû que cette distance étoit les $\frac{3}{10}$ de la droite EA, & par conséquent les $\frac{3}{5}$ de sa moitié.

Dans la demi-Parabole cubique l'exposant des Elemens du complement perpendiculaires à EB est 3; donc la distance de leur centre de gravité à la droite EB est à la moitié de EA, comme 3+1 à 6+1, ou comme 4 à 7, & on trouvera de la même façon que dans les complemens des demi-Paraboles plus élevées, cette distance est à la moitié de EA, comme 5 à 9, comme 6 à 11, comme 7 à 13, &c.

PROPOSITION XXXIII.

108. *Trouver les centres de gravité des figures dont les Elemens sont réciproques aux termes d'une suite infinie connuë.*

Nous avons dit dans le cinquiéme Chapitre du premier Livre (*N.* 81. 82. *&c.*) que si l'on prend des troisiémes proportionnelles aux Elemens d'un triangle, ou d'une demi-Parabole, ou de son complement, &c. & aux Elemens d'un rectangle, la figure que ces troisiémes proportionnelles formeront, aura ses Elemens réciproques à ceux du triangle, ou de la demi-Parabole, ou de son complement, &c. & que l'exposant de la suite de ces Elemens sera négatif. Cela posé

Soit ABCDE (*Fig.* 77.) l'une de ces figures, je prolonge ses Elemens de l'autre côté jusqu'à ce qu'ils soient doubles d'eux mêmes, ce qui me donne une figure également étendue de part & d'autre autour de l'axe AB. La base est la droite GC qui est le dernier terme de la suite des Elemens, parce que les derniers Elemens des deux figures qui forment celle-ci, c'est-à-dire du rectangle & du triangle, ou de la demi-Parabole, &c. sont de ce côté-là.

Pour trouver donc le centre de gravité de FEDCGH qui certainement doit être sur l'axe AB, qui coupe tous les Elemens en deux parties égales, il ne s'agit que de trouver la distance au sommet A, ou à la base GC. Or appellant $-x$ l'exposant des Elemens, ces Elemens multipliés par leurs distances au point A lesquelles forment la suite 0. 1. 2. 3, dont l'exposant est 1, donneront une autre suite qui exprimera leurs momens, & dont l'exposant sera $-x+1$, c'est pourquoi appellant D l'axe AB qui est égal au nombre des termes, & en même-tems à la plus grande distance, & P le dernier Element, le moment de ce dernier Element sera DP, & la somme des momens $\frac{1}{-x+1}$ DDP; or la somme des Elemens est $\frac{1}{-x+1}$ DP. Divisant donc la somme des momens par celle des Elemens, le quotient $\frac{-x+1}{-x+2}$ D nous fera voir que la distance du centre de gravité au sommet A est à la distance totale AB, comme l'exposant augmenté de l'unité, est à l'exposant augmenté de deux unités. Donc le reste de l'axe AB sera $\frac{1}{-x+2}$ car $\frac{-x+1}{-x+2}D + \frac{1}{-x+2}D = \frac{-x+2}{-x+2}D = D$; donc *la distance du centre de gravité au sommet est au reste de l'axe, ou à la distance du centre à la base, comme* $\frac{-x+1}{-x+2}$ *est à* $\frac{1}{-x+1}$, *ou comme* $-x+1$ *est à* 1, *c'est-à-dire*,

comme l'exposant augmenté de l'unité est à l'unité, qui est la même régle que nous avons trouvée pour les figures dont les Elemens sont entr'eux comme les termes d'une suite directe (*N.* 101.).

COROLLAIRE I.

109. Si l'exposant est $-x = -1$, ce qui arrive quand les Elemens de la figure sont troisiémes proportionnels à ceux d'un triangle & d'un rectangle, comme nous avons dit dans l'endroit cité de l'*Arithmétique des Infinis*. Alors $-x+1 = -1+1 = 0$, & par conséquent la distance du centre de gravité au sommet A est à la distance de ce centre à la base GC, comme 0 à 1. Mais le rapport de 0 à 1 est infiniment petit, & ne peut point s'exprimer; donc ce centre de gravité ne se trouve nulle part, & la figure n'en a point. De plus la figure est infinie, car l'exposant étant -1, la somme de la suite des Elemens est au dernier terme multiplié par le nombre des termes, come 1 à l'exposant -1 augmenté de l'unité, c'est-à-dire comme 1 à $-1+1$, ou comme 1 à 0: or ce rapport est infini, donc, &c. Nous verrons plus bas que quoique cette figure soit infinie, cependant le solide qu'elle produit en tournant autour de la ligne infinie FE, est égal à une grandeur finie.

Si l'exposant est encore plus négatif que -1, c'est-à-dire s'il est -2, ou -3, &c. ce qui arrive lorsque les Elemens sont troisiémes proportionnels à ceux d'un complement de Parabole quarrée, ou cubique, &c. & à ceux d'un rectangle, la figure n'a point de centre de gravité; car en ce cas la distance de ce centre au sommet est à la distance à la base comme $-2+1$, à 1, ou comme $-3+1$ à 1, &c. or le rapport $-2+1$ à 1, ou -1 à 1 est encore moins grand que le rapport de 0 à 1, qui est infiniment petit; donc il est en quelque maniere plus qu'infiniment petit. De plus, la figure est plus qu'infinie, car le rapport de la somme des termes au dernier GC multiplié par le nombre des termes est comme 1 à $-2+1$, ou à $-3+1$, ou comme 1 à -1, ou à -2, &c. tous rapports qui sont plus grands que le rapport de 1 à 0 qui est infini.

Si l'exposant est moins négatif que -1, c'est-à-dire s'il est $-\frac{1}{2}$, ou $-\frac{1}{3}$, ou $-\frac{1}{4}$, &c. ce qui arrive lorsque les Elemens de la figure sont troisiémes proportionnels à ceux d'une Parabole du 1er. genre, ou du second, ou du troisiéme, &c. & d'un rectangle la figure a un centre de gravité. Car la distance du centre de gravité

au sommet est à la distance à la base, comme $-\frac{1}{2}+1$ à 1, ou comme $-\frac{1}{3}+1$ à 1, &c. & par conséquent coupant l'axe AB en O, en sorte que AO soit à OB comme $\frac{1}{2}$ à 1, ou $\frac{2}{3}$ à 1, &c. le point O sera le centre de la figure. De plus, la figure quoiqu'indéterminée du côté de E & de F est cependant finie; car la somme des Elemens est au dernier terme GC multiplié par le nombre des termes AB, c'est-à-dire au rectangle GCMN comme 1 à $-\frac{1}{2}+1$, ou à $-\frac{1}{3}+1$, ou à $-\frac{1}{4}+1$, ou comme 1 à $\frac{1}{2}$, ou à $\frac{2}{3}$, ou à $\frac{3}{4}$, &c.

COROLLAIRE II.

110. *Quand l'exposant est* -1, *le solide formé par la circonvolution de la figure autour de la droite infinie* EF, *est cependant fini.*

Supposant que l'exposant soit -1, les Elemens seront réciproques aux Elemens d'un triangle GAB & à ceux d'un rectangle de même hauteur & de même base, comme nous avons dit dans l'endroit cité de l'*Arithmétique des Infinis*. Or les Elemens du triangle sont entr'eux comme leurs abscisses AB, AS, AO, &c. donc les Elemens de la figure sont réciproques à ces abscisses, donc les rectangles de ces Elemens par leurs abscisses correspondantes sont égaux. Car, par exemple, puisque GC, VH :: AS, AB, donc $GC \times AB = VH \times AS$, c'est-à-dire le rectangle GCNM égal au rectangle VHPQ, & ainsi des autres. Or quand la figure tourne autour de EF, les Elemens GC, VH, &c. décrivent des surfaces cylindriques, lesquelles étant redressées ont pour bases les Elemens GC, VH, &c. & pour hauteurs des droites égales aux surfaces que décrivent leurs abscisses AB, AG, &c. & ces circonférences sont entr'elles comme les rectangles GCMN, VHPQ, &c. & par conséquent elles sont égales entr'elles, donc ces surfaces étant redressées sont égales à la premiere multipliée par le nombre des termes, ou par l'axe AB; or la premiere a pour base la droite GC, & pour hauteur une ligne égale à la circonférence décrite par AB. Donc toutes les surfaces ensemble sont égales à un Prisme qui auroit pour base le rectangle GCNM & pour hauteur une droite égale à la circonférence que décrit l'axe AB.

Mais si l'on suppose que l'exposant des Elemens soit -2, auquel cas ces Elemens seront reciproques aux Elemens d'un complement ArGB d'une demi-Parabole quarrée qui au-

soit son sommet en A, & dont la droite AB seroit la tangente au sommet, les surfaces cylindriques décrites par les Elemens de la figure autour de FE, auront pour bases les Elemens, & pour hauteurs des droites égales aux circonférences décrites par leurs abscisses AB, AS, AO, &c. & comme ces circonférences sont entr'elles comme leurs abscisses, les surfaces cylindriques seront entr'elles comme les produits des Elemens par leurs abscisses, c'est-à-dire comme le produit d'une suite dont l'exposant est -2 multipliée par une suite dont l'exposant est $+1$; donc l'exposant de la somme des surfaces sera $-2+1$, & par conséquent cette somme sera à la derniere surface multipliée par le nombre des termes, comme 1 à $-2+2$, ou à 0. Or le rapport de 1 à 0 est infini, donc la somme des surfaces est infinie, & par conséquent le solide qu'elles forment l'est aussi.

Et on trouvera de même que si l'exposant est -3, -4, &c. le solide devient pour ainsi dire plus qu'infini ; car alors le rapport de la somme des surfaces à la derniere multipliée par le nombre des termes, est comme 1 à $-3+2$, ou $-4+2$, &c. ou comme 1 à -1, ou à -2, &c.

Ce que nous venons de dire au sujet de la figure dont les Elemens ont -1 pour exposant, paroît d'abord incroyable. Cette figure est d'une grandeur infinie, comment se peut-il donc faire que sa circonvolution autour de l'axe produise un solide fini ? en voici la raison. De tous les Elemens de cette figure, il n'y a que le seul EF qui soit infini, parce que de tous les Elemens du triangle, il n'y a que celui qui est au sommet A qui soit infiniment petit ; d'où il suit que de toutes les troisiémes proportionnelles prises aux Elemens du triangle & à ceux du rectangle, il ne peut y avoir que la seule EF qui soit infinie par rapport à l'Element correspondant du rectangle, de même qu'il n'y a que ce seul Element du rectangle qui soit infini par rapport à l'Element correspondant du triangle. Or quand la figure tourne autour de son asymptote EF, cette asymptote ne produit qu'un cylindre dont le diametre est infiniment petit, lequel cylindre par conséquent peut être pris pour une ligne, & une ligne n'est rien à l'égard d'un solide ; donc ce solide doit être fini.

Il faut dire la même chose des solides formés par la circonvolution des figures dont les exposans sont $-\frac{1}{2}$, ou $-\frac{2}{3}$, ou $-\frac{3}{4}$, &c. parce que les Elemens de ces figures étant des troisiémes proportionnelles aux Elemens de la Parabole quarrée, ou

de la cubique, ou de celle du troisiéme genre, &c. sont tous moins longs que ceux de la figure dont les Elemens ont pour exposant — 1, sans en excepter même le premier Element EF; car quoique l'Element correspondant de la Parabole soit zero, ou infiniment petit, cependant cet infiniment petit est moins petit que l'Element zero du triangle, de même que les autres Elemens de la Parabole sont moins petits que ceux du triangle. D'où il suit que quoique l'asymptote EF soit infinie, elle est cependant un infini d'un genre inférieur à celui de l'asymptote EF de la figure dont les Elemens ont — 1 pour exposans. Donc, &c.

Quant aux figures qui ont pour exposans — 2, — 3, — 4, &c. leurs Elemens étant des troisiémes proportionnelles à ceux d'un complement de parabole du premier genre, ou du second, ou du troisiéme, &c. & à ceux du rectangle ces Elemens sont tous plus longs que ceux de la figure dont l'exposant est — 1, & notamment l'asymptote EF est un infini d'un genre supérieur à l'asymptote EF de la figure dont les Elemens ont — 1 pour exposant. D'où il suit que la courbe ne joint cet asymptote qu'après un espace beaucoup plus infini que celui où la courbe joint l'asymptote, lorsque l'exposant est — 1; par conséquent la différence de la figure dont l'exposant est — 1 à la figure dont l'exposant est — 2, ou — 3, ou — 4, &c. étant infinie, il ne faut pas s'étonner si le solide produit par la circonvolution de la premiere étant fini, le solide produit par la circonvolution des autres est infini.

COROLLAIRE II.

111. Si au lieu de la figure entiere, nous en prenons la moitié ABCDE (*Fig.* 77.), la distance du centre de gravité à la ligne AE & à la base BC sera toujours la même, mais il s'agira de trouver la distance de ce centre à l'axe AB, & voici comment nous y parviendrons.

Soit l'exposant des Elemens, $-x$, les centres de gravité de chacun de ces Elemens seront sur leur milieu, & par conséquent les distances de ces centres à l'axe seront en même raison que ces Elemens; ainsi l'exposant de ces distances sera encore $-x$. Multipliant donc les Elemens par leurs distances, nous aurons une suite qui exprimera les momens des Elemens, & dont l'exposant $-x-x=-2x$; donc si nous appellons P le dernier Element BC, N le nombre des termes AB, & D la distance

BX

BX du centre de gravité du dernier Element à l'axe, le moment du dernier Element sera DP, & la somme des momens sera à ce dernier moment multiplié par le nombre des termes D comme 1 à l'exposant $-2x$ augmenté de l'unité, donc cette somme sera $\frac{1}{-2x+1}$ NDP. Or la somme des Elemens sera $\frac{1}{-x+1}$ DP; divisant donc la somme des momens par celle des Elemens, le quotient $\frac{-x+1}{-2x+1}$ D, nous fera voir que *la distance du centre de gravité de la figure à l'axe* AB *est à la demi-base* BX *comme l'exposant augmenté de l'unité est au double de cet exposant augmenté de l'unité*, qui est encore la même regle que nous avons trouvée ci-dessus pour les demi-figures dont les Elemens sont entr'eux comme les termes d'une suite directe (*N.* 107.).

Si l'exposant est -1, nous aurons $\frac{-x+1}{-2x+1}D = \frac{-1+1}{-2+1} = D$ $= \frac{0}{-1}D$, & par conséquent la distance du centre de gravité à l'axe sera à la demi-base comme 0 à -1, or ce rapport est infini; donc la distance du centre de gravité ne sera nulle-part, & par conséquent cette figure n'aura point de centre de gravité.

On prouvera la même chose si l'exposant est plus négatif que -1, c'est-à-dire s'il est -2, -3, &c. car supposant que l'exposant soit $= -2$, nous aurons $\frac{-x+1}{-2x+1}D = \frac{-2+1}{-4+1}D = \frac{1}{3}D$ c'est-à-dire la distance du centre de gravité à l'axe est $\frac{1}{3}$ de la base. Mais comme nous avons vû dans le Chapitre précédent que la distance du centre de gravité à la base étoit infinie, & que par conséquent le centre de gravité n'étoit nulle-part le rapport $\frac{1}{3}$ D que nous venons de trouver, ne signifie autre chose sinon que si ce centre étoit quelque part, il seroit éloigné de l'axe de $\frac{1}{3}$ D, & ainsi des autres.

Si l'exposant est $-\frac{1}{2}$, nous aurons $\frac{-x+1}{-2x+1} D = \frac{-\frac{1}{2}+1}{-1+1}D$ $=\frac{\frac{1}{2}}{0}D$, ce qui est un rapport infini qui fait voir que la distance du centre de gravité à l'axe est infinie, & que par conséquent cette figure n'a point de centre.

Si l'exposant est $-\frac{1}{3}$, nous aurons $\frac{-x+1}{-2x+1} D = \frac{-\frac{1}{3}+1}{-\frac{2}{3}+1} = D$ $= 2D$, & par conséquent le centre de gravité de cette

figure est éloigné de l'axe de deux fois BX, ou de BC, & comme nous avons trouvé (*N.* 108. 109.) que ce centre est éloigné du sommet de deux cinquiémes de AB, prenant ces deux cinquiémes de A en O, & tirant OK paralelle à la base & CK paralelle à l'axe, le point K sera le centre de gravité de la figure.

Si l'exposant est $-\frac{1}{4}$ nous aurons $\frac{-x+1}{-2x+1}$ D $=\frac{3}{2}$D $=\frac{3}{2}$BC, & comme nous avons trouvé que la distance du centre au sommet étoit les $\frac{2}{7}$ de AB (*N.* 108. 109.), on trouvera facilement la position de ce centre comme nous venons de faire, & de même des autres figures.

D'où l'on voit qu'afin que ces demi-figures ayent un centre de gravité, il faut que l'exposant soit moins négatif que $-\frac{1}{2}$.

COROLLAIRE IV.

112. Quant aux solides formés par la circonvolution autour de la droite AE ou de la base BC ou de l'axe AB, ils sont faciles à trouver après tout ce que nous venons de dire, c'est pourquoi il suffira d'en donner un exemple.

Supposons que la figure tourne autour de AE, & que l'exposant soit $\frac{1}{3}$; nous appellerons x l'axe AB qui est en même tems le nombre des termes, & z la base CB, qui est aussi le dernier Element; le rectangle BCMA sera xz, & comme son centre de gravité est éloigné de AE de $\frac{1}{2}x$ son moment par rapport à AE sera $\frac{1}{2}xxz$.

Les Elemens de la figure ayant pour exposant $-\frac{1}{3}$, leur somme sera au dernier z multiplié par le nombre des termes x comme 1 à $-\frac{1}{3}+1$, ou comme 1 à $\frac{2}{3}$, ou comme $\frac{3}{3}$ à $\frac{2}{3}$, ou comme 3 à 2, donc cette somme sera $\frac{3}{2}zx$, & les Elemens multipliés par leurs distances, étant le produit d'une suite dont l'exposant est $-\frac{1}{3}$ multipliée par une suite, dont l'exposant est 1, l'exposant des momens sera $-\frac{1}{3}+1$, ou $\frac{2}{3}$; ainsi la somme des momens sera au moment zx du dernier Element multiplié par le nombre des termes, comme 1 à $\frac{2}{3}+1$, ou comme $\frac{3}{3}$ à $\frac{5}{3}$, ou comme 3 à 5, donc cette somme sera $\frac{3}{5}xxz$; ainsi le moment des Elemens sera au moment du rectangle BCMA comme $\frac{3}{5}xxz$ à $\frac{1}{2}xxz$, ou comme $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$ à $\frac{5}{10}$, ou comme 6 à 5. Or les solides produits par la circonvolution de la figure, & du rectangle BCMA, sont entr'eux comme leurs momens; donc le solide

produit par la circonvolution de la figure autour de AE, est au cylindre décrit par le rectangle comme 6 à 5.

Ou bien comme on sçait que le centre de gravité de la figure est éloigné de la droite AE de deux cinquiémes de AB, ou de $\frac{2}{5} x$, on multipliera la somme $\frac{3}{2} xz$ des Elemens par la distance $\frac{2}{5} x$, & l'on aura pour le moment de la figure $\frac{6}{10} xxz$, & ce moment est à celui du Cylindre comme $\frac{6}{10} xxz$ à $\frac{1}{2} xxz$, ou comme 6 à 5, de même que ci-dessus.

Pour trouver le solide fait autour de BC on aura encore pour le moment du rectangle $\frac{1}{2} xxz$, & comme le centre de gravité de la figure est éloigné de la base de $\frac{3}{5} x$, on multipliera la somme $\frac{3}{2} xz$ par la $\frac{3}{5} x$ & le produit $\frac{9}{10} xxz$ sera le moment de la figure, c'est pourquoi ce moment sera à celui du rectangle comme $\frac{9}{10} xxz$ à $\frac{1}{2} xxz$ ou comme 9 à 5.

Donc le solide produit par la figure autour de AE est au solide autour de la base comme 6 à 9, ou comme 2 à 3.

Et pour avoir le solide autour de l'axe, on aura pour le moment du rectangle $\frac{1}{2} zzx$, à cause que le centre de gravité de ce rectangle est éloigné de l'axe de $\frac{1}{2}$z, & comme le centre de gravité de la figure est éloigné du même axe de toute la valeur de la base z, multipliant la figure $\frac{3}{2} xz$ par z, son moment sera $\frac{3}{2} xzz$, c'est pourquoi ce moment sera à celui du rectangle comme $\frac{3}{2} xzz$ à $\frac{1}{2} zzx$, ou comme 3 à 1; donc le solide décrit par la figure sera au Cylindre décrit par le rectangle comme 3 à 1, & ainsi des autres.

CHAPITRE VI.

Du centre de gravité, des arcs de cercle.

PROPOSITION XXXIV.

113. *Si une ligne* RS (Fig. 78.) *tourne autour d'un axe* AB, *auquel elle n'est pas perpendiculaire, & qu'on tire de ses extrémités* R, S *& de son centre de gravité* O *des droites* RH, OP, SB *perpendiculaires à l'axe, & une autre droite* OB *perpendiculaire sur son centre de gravité; la surface courbe que cette ligne décrit est égale à la partie* HB *de l'axe comprise entre les deux paralelles qui*

partent des extrémités, multipliée par la circonference que décriroit la droite OB *prise pour rayon.*

DEMONSTRATION.

Les triangles semblables ASB, ARH donnent RS, HB :: RA, AH, & à cause des triangles semblables RAH, BOP, on a RA, AH :: BO, OP, donc RS, HB :: BO, OP, & par conséquent RS×OP=HB×BO, & si au lieu de OP & de BO nous mettons les circonferences que ces lignes décriroient, & qui par conséquent sont en même raison que ces lignes, nous aurons RS multiplié par la circonference du rayon OP égal à HB multiplié par la circonference du rayon BO; mais RS multiplié par la circonference du rayon OP est égal à la surface que décrit la ligne RS autour de l'axe, à cause que OP est la distance de son centre de gravité à l'axe; donc HB multiplié par la circonference du rayon BO est égal à cette surface.

COROLLAIRE I.

114. *Si autour d'un cercle* ABC (Fig. 79.) *on circonscrit un Polygone regulier* DEFGHIL *dont aucun des côtés ne soit perpendiculaire au diametre* AC, *la surface que décrit le contour de ce Polygone en tournant autour du diametre* AC, *est égale au produit du diametre* DL *du Polygone, multiplié par le rayan* QO *du demi-cercle.*

Des extrémités G, F de l'un des côtés GF du Polygone, & du centre de gravité X, de ce même côté tirez les droites FM, XN, GQ perpendiculaires au diametre DL, & sur son centre de gravité X élevez la perpendiculaire XQ, la surface que décrira GF en tournant autour de AC ou de DL sera égale à la partie MQ de ce diametre multipliée par la circonference du rayon XQ, comme nous venons de voir; or faisant la même chose à l'égard des autres côtés nous trouverons que toutes les parties du diametre comprises entre les perpendiculaires tirées des extrémités des côtés, seront ensemble égales au diametre DL, & que toutes les perpendiculaires sur les centres de gravité des côtés seront égales entr'elles, & au rayon QO, à cause que le Polygone est regulier & circonscrit au cercle. Donc la somme des circonferences que ces côtés décriront en tournant autour de DL, sera égale à DL multipliée par la circonference du rayon QO.

COROLLAIRE II.

115. Si le Polygone circonſcrit au demi-cercle (*Fig.* 82.) avoit un ou deux côtés AB, CD perpendiculaires au diametre AC, on voit bien que les perpendiculaires tirées des extrémités de ces côtés ſur le diametre ne prendroient aucune partie du diametre, c'eſt pourquoi les ſurfaces décrites par les autres côtés BE, EF, FD, ſeroient enſemble égales au dimetre AC multiplié par la circonference du rayon OP, après quoi on ajoûteroit à ce produit les cercles décrits par les côtés BA, DC, & la ſomme ſeroit la ſurface entiére décrite par le contour du demi Polygone ABEFDC autour de l'axe AB.

PROPOSITION XXXV.

116. *Trouver la ſurface décrite par une demi-circonference de cercle autour de ſon diametre* (Fig. 80.).

Multipliez le diametre AC par la circonference du rayon OB, & le produit ſera la ſurface cherchée.

DEMONSTRATION.

Concevez un Polygone d'une infinité de côtés circonſcrits au demi-cercle; ce Polygone ayant ſes côtés infiniment proches de la circonference, ſon diametre ne differera point du diametre du cercle, & par la Propoſition précédente la ſomme des ſurfaces décrites par ſes côtés autour du diametre, ſera égale au diametre AC multiplié par la circonference du rayon BO. Or les côtés du Polygone étant infiniment proches de la circonference, ils ſe confondent avec elle, donc la ſurface décrite par la circonference eſt égale au diametre AC multiplié par la circonference du rayon BO.

COROLLAIRE I.

117. *La ſurface de la ſphere eſt égale à la ſurface du Cylindre circonſcrit;* la ſurface de la ſphere eſt égale à la ſurface décrite par la demi-circonference ABC, tournant autour du diametre AC, & cette ſurface eſt égale au diametre AC multiplié par la circonference du rayon BO, qui eſt la circonference du grand cercle de la ſphere. Or le Cylindre circonſcrit ayant pour baſe le grand cercle de la ſphere & pour hauteur le diametre AC, ſa ſurface eſt auſſi égale au diametre AC multiplié par la circon-

ference du rayon BO ; donc la ſurface du Cylindre & celle de la ſphere ſont égales entr'elles.

COROLLAIRE. II.

118. *La ſurface d'un ſegment de ſphere eſt égale à la ſurface de la partie du Cylindre circonſcrit laquelle a même hauteur que le ſegment.*

Suppoſons que la hauteur du ſegment ſoit la partie AX du diametre, la ſurface du ſegment ſera égale à la ſurface décrite par l'arc ABN autour du diametre. Or ſi l'on conçoit que de toutes les extrémités des côtés infiniment petits du Polygone circonſcrit, compris entre A & N, ſoient tirées des perpendiculaires au diametre, toutes les parties du diametre compriſes entre ces perpendiculaires, ſeront enſemble égales à la partie AX du diametre, donc la ſomme des ſurfaces que décriront tous ces côtés autour du diametre ſera égale à AX multipliée par la circonference du rayon BO, mais les ſurfaces décrites par ces côtés ne ſeront pas différentes de la ſurface décrite par l'arc entier ABN, donc cette ſurface, & par conſéquent celle du ſegment ſpherique ſera égale à AX multipliée par la circonference du rayon BO, ou par la circonference du grand cercle. Or la ſurface de la partie du Cylindre circonſcrit, qui a pour hauteur AX, eſt auſſi égale à AX multipliée par la circonference du grand cercle, donc la ſurface du ſegment eſt égale à la partie de la ſurface du Cylindre, laquelle a même hauteur que le ſegment.

COROLLAIRE III.

119. *La ſurface d'une zone ſpherique eſt égale à la ſurface de la partie correſpondante du Cylindre ;* c'eſt-à-dire, la ſurface décrite par l'arc BN compris entre les paralelles BP, NS, & qui tourne autour du diametre, eſt égale à la partie de la ſurface du Cylindre circonſcrit compriſe entre les mêmes paralelles, ou qui auroit pour hauteur la hauteur OX de la zone ; car on prouvera de même que ci-deſſus, que l'une & l'autre de ces ſurfaces eſt égale à la droite OX multipliée par la circonference du rayon OB ou par la circonference du grand cercle.

Tout ceci s'accorde parfaitement avec ce que nous avons dit de la ſurface de la ſphere dans la *Theorie & Pratique des Geometres.*

PROPOSITION XXXVI.

120. *Si l'on coupe la circonference d'un quart de cercle en plusieurs parties égales* AB, BC, CD, &c. (Fig. 81.), *& que des points de division on abaisse des perpendiculaires* BN, CM, DI, &c. *à l'un des rayons* AO, *les parties* AN, NM, MI, *que ces perpendiculaires couperont sur ce rayon, seront d'autant plus petites, qu'elles seront plus éloignées du centre* O, *& d'autant plus grandes qu'elles s'en approcheront d'avantage.*

Ceci est évident par la génération même du cercle, car à mesure que la circonference s'éloigne du point A, ses arcs AB, BC, CD, &c. se tournent davantage du côté du rayon AO, & lui présentent un plus grand front, d'où il suit que les distances AN, NM comprises entre les perpendiculaires tirées des extrémités doivent aller en s'agrandissant; mais comme on pourroit refuser de prendre ceci pour une demonstration Geometrique, nous allons en donner une autre qui satisfera davantage les personnes qui aiment que tout soit prouvé dans la rigueur.

DEMONSTRATION.

Prolongez les perpendiculaires hors de la circonference, & du point A tirez la tangente AZ qui sera paralelle aux perpendiculaires, parce qu'elle sera perpendiculaire au rayon AO. Des points de division B, C, D, &c. tirez des droites BZ, CX, DY, &c. perpendiculaires aux droites AZ, NX, MY, &c. & par conséquent égales aux droites AN, NM, MI, &c. parce que les unes & les autres sont perpendiculaires entre les perpendiculaires AZ, NX, &c. Cela posé, &c.

Les cordes AB, BC, CD, &c. étant inclinées sur les perpendiculaires ZA, XB, YC, &c. les perpendiculaires ZB, CX, DY marquent les distances de leurs sommets aux perpendiculaires ZA, XB, &c. mais la droite BC est moins inclinée sur la perpendiculaire XB que la droite AB sur sa perpendiculaire AZ; car si l'on prolonge AB, son prolongement Br sera tout entier hors du cercle, & par conséquent il passera entre BC & BX, & sera plus incliné sur BX que BC ne l'est sur la même BX; mais Br est autant incliné sur BX que AB sur AZ, à cause des paralelles AZ, BX, donc BC est moins incliné sur BX que AB sur AZ; or AB, BC sont égales à cause qu'elles soutiennent des arcs égaux, donc la distance CX du sommet de la corde BC

à la perpendiculaire BX eſt plus grande que la diſtance BZ du ſommet B de la corde AB à la perpendiculaire AZ; mais CX =NM & BZ=AN, donc NM eſt plus grande que AN & on prouvera de même que MI eſt plus grand que NM, &c.

COROLLAIRE I.

121. Donc ſi l'on conçoit que la circonference du quart de cercle ſoit diviſée en ſes Elemens & que de chacun d'eux on tire des perpendiculaires au rayon AO, ces perpendiculaires qui ſe toucheront dans toute leur longueur, prendront ſur le rayon des parties d'autant plus petites qu'elles ſeront plus éloignées du centre O, & d'autant plus grandes qu'elles s'en approcheront davantage, & par conſéquent ces lignes ſeront toutes d'inégale épaiſſeur, puiſque l'épaiſſeur d'une ligne doit ſe meſurer par la partie qu'elle prend ſur une ligne qui lui eſt perpendiculaire. Nous dirons bientôt comment on peut déterminer les differentes épaiſſeurs de ces lignes.

COROLLAIRE II.

122. Si l'on conçoit que la circonference du quart de cercle BOA (*Fig.* 80.), ſoit diviſée en ſes Elemens, & que le rayon OA ſoit auſſi diviſé en Elemens de même épaiſſeur que ceux de la circonference du quart de cercle, les perpendiculaires *as*, *bu*, &c. élevées ſur les diviſions du rayon ſeront les ordonnées ou les Elemens du quart de cercle OPA égal au quart de cercle BOA, & ces Elemens ſeront tous d'une égale épaiſſeur entr'eux, mais ils ſeront chacun plus épais que les perpendiculaires tirées des diviſions *d*, *e*, &c. de la circonference AB ſur ce même rayon AO, à l'exception de la derniere BO qui ſera de la même épaiſſeur; car les ordonnées *as*, *bu*, rencontrent toutes la circonference AP obliquement, donc elles prennent ſur cette circonference des parties plus grandes que celles qu'elles prennent ſur le rayon AO ſur qui elles ſont perpendiculaires, donc elles ſont plus épaiſſes que les perpendiculaires *df*, *er*, &c. qui prennent ſur la circonference AB des parties moindres, & quant aux deux dernieres OP, BO, il eſt viſible qu'elles ſont d'égale épaiſſeur, parce qu'elles ſont l'une & l'autre perpendiculaires au rayon & aux circonferences.

DEFINITION.

DEFINITION.

123. Les arcs A*d*, *de*, *eh*, &c. étant égaux entr'eux, les arcs A*d*, A*e*, A*h*, &c. sont par conséquent en proportion arithmetique, & les perpendiculaires *df*, *er*, &c. sont les sinus de ces arcs, c'est pourquoi nous appellerons ces perpendiculaires, *Sinus des arcs arithmetiquement proportionnels*, & les perpendiculaires *as*, *bu*, &c. ordonnées au quart de cercle.

COROLLAIRE III.

124. Quoique les sinus ne puissent pas être pris pour les Elemens du quart de cercle BOA, à cause qu'ils sont d'inégale épaisseur; il est cependant vrai qu'ils remplissent ce quart de cercle, de même que les ordonnées *as*, *bu*, &c. le remplissent ou du moins son égal; ainsi la somme des sinus multipliés chacun par la petite partie qu'il prend sur le rayon AO, est égale à la somme des ordonnées multipliées chacune par la partie qu'elle prend sur ce même rayon; c'est-à-dire, la somme des sinus ayant chacun son épaisseur particuliere est égale à la somme des ordonnées dont l'épaisseur est égale: appellant donc *y* l'épaisseur variante des sinus, *c* l'épaisseur constante des ordonnées, *s* les sinus & *o* les ordonnées, nous aurons tous les *ys* pris ensemble égaux à tous les *oc* pris ensemble.

COROLLAIRE IV.

125. Pour déterminer les petites parties inégales que chaque sinus prend sur le rayon AO, nous considérerons les Elemens du quart de circonference AB, comme autant de côtés infiniment petits d'un Polygone circonscrit. Or la surface que chaque côté décrit en tournant autour du rayon AO, est égale à ce côté multiplié par la circonference que décrit le sinus correspondant, c'est-à-dire, la perpendiculaire tirée de son centre de gravité sur le rayon, & par la Proposition XXXIV. cette même surface est égale à la partie du rayon comprise entre les perpendiculaires tirées des deux extrémités de ce côté, multipliée par la circonference du rayon BO; mais la partie comprise entre les deux perpendiculaires, n'est autre chose que la partie que le sinus correspondant prend sur le rayon, à cause de l'infinie petitesse du côté du Polygone, donc la surface décrite par ce côté est égale à la partie que prend le sinus sur le rayon multipliée par la cir-

conference du rayon BO, & mettant au lieu des circonferences les rayons qui les décrivent, & appellant aussi le côté du Polygone c parce que ce côté est égal à un Element de la circonference AB, & par conséquent à un Element du rayon AO ou BO, que nous appellerons R, nous aurons $cs = Ry$, donc $y = \frac{cs}{R}$, c'est-à-dire, la partie que prend le sinus sur le rayon AO est égale à ce sinus multiplié par c, ou à qui on donneroit la même épaisseur qu'au rayon, divisé par le rayon; & comme cela arriveroit par tout, il s'ensuit que les parties que les sinus prennent sur le rayon AO sont entr'elles comme ces sinus à qui on donneroit la même épaisseur divisés par le rayon, c'est-à-dire, que ces parties sont entr'elles comme les longueurs des sinus.

COROLLAIRE V.

126. Puisque nous avons trouvé $y = \frac{cs}{R}$, donc multipliant par s, nous aurons $ys = \frac{cs^2}{R}$, mais par le Corollaire III. nous avons tous les ys égaux à tous les oc, donc tous les $\frac{cs^2}{R}$ sont égaux à tous les oc, & multipliant par R & divisant par c, nous aurons tous les s^2 égaux à tous les oR, ou *la somme des quarrés des sinus pris d'une épaisseur égale à celle des ordonnées, est égale à la somme des ordonnées multipliée par le rayon, c'est-à-dire, au quart de cercle multiplié par le rayon.*

De même puisque $ys = \frac{cs^2}{R}$, multipliant par s nous aurons $ys^2 = \frac{cs^3}{R}$, mais tous les ys^2 sont égaux à tous les o^2c, c'est-à-dire, la somme des quarrés des sinus dans le quart de cercle est égale à la somme des quarrés des ordonnées, puisque les uns & les autres tournant autour du rayon AO produiroient des cercles dont les sommes seroient égales, donc tous les $\frac{cs^3}{R}$ sont égaux à tous les o^2c, & multipliant par R & divisant par c, nous aurons tous les s^3 égaux à tous les o^2R, c'est-à-dire, *la somme des cubes des sinus du quart de cercle pris d'égale épaisseur, est égale à la somme des quarrés des ordonnées du quart de cercle multipliée par le rayon.*

Et on trouvera de même que la somme des quatriémes puissances des sinus, est égale à la somme des troisiémes puissances des ordonnées multipliée par le rayon.

Et ceci doit s'entendre, non-seulement des sinus du quart de cercle, mais encore des sinus du demi-cercle, & des sinus d'une portion de demi-cercle, ou de quart de cercle.

Ainsi l'on doit dire que tous les quarrés des sinus d'un demi-cercle pris ensemble, sont égaux à la somme des ordonnées de ce demi-cercle multipliée par le rayon; que la somme de leurs cubes est égale à la somme des quarrés des ordonnées multipliée par le rayon, &c.

De même on doit dire que la somme des quarrés des sinus de la portion ANX est égale à la somme des ordonnées à cette portion, multipliée par le rayon, que la somme des cubes des sinus, &c. est égale à la somme des quarrés des ordonnées multipliée par le rayon, &c. en observant toujours que dans tout ceci nous prenons les sinus avec des épaisseurs égales à celle des ordonnées, à cause que dans les équations $s^2 = oR$, & $s^3 = o^2R$ la grandeur variante y disparoît.

COROLLAIRE VI.

127. *Si l'on donne aux sinus la même épaisseur qu'aux ordonnées, c'est-à-dire, si l'on prend une ligne droite* AB (Fig. 83.) *égale au quart de circonference* AB (Fig. 80.), *& que sur cette droite* AB *on conçoive les sinus mis perpendiculairement, ces sinus auront même épaisseur que les ordonnées du quart de cercle, & je dis que leur somme ou la figure mixtiligne* ABC *qu'ils formeront sera égale au quarré du rayon.*

Tandis que le quart de circonference AB (*Fig.* 80.) tourne autour du rayon AO tous ses Elemens décrivent des circonferences dont les rayons sont les sinus; or la somme de ces circonferences est égale à la surface décrite par le quart de circonference AB, & cette surface est égale à la surface du Cylindre circonscrit de même hauteur laquelle n'est autre chose que la somme des circonferences décrites par les ordonnées du quarré AOPH du rayon AO, donc la somme des circonferences décrites par les ordonnées du quarré est égale à la somme des circonferences décrites par les sinus du quart de cercle; & par conséquent si on ne considére de part & d'autre que la longueur des rayons des circonferences, la somme des sinus doit être égale à la somme des ordonnées du quarré, ou au quarré du rayon, car les sommes des circonferences étant égales, les sommes des rayons doivent aussi être égales; mais comme l'épaisseur des si-

nus dans le quart du cercle est inégale, & que celles des ordonnées au quarré est égale & plus grande; il est sûr que de ce côté là la somme des sinus doit être moindre, & elle l'est en effet, puisqu'elle n'occupe que le quart du cercle qui est moindre que l'espace qu'occupent les ordonnées du quarré. C'est pourquoi si nous donnons à tous les sinus une épaisseur égale à celle des ordonnées du quarré, alors il y aura égalité de toutes parts, & la figure ABC (*Fig.* 83.), sera égale au quarré OPHA (*Fig.* 80.).

Si nous faisons la même chose à l'égard des sinus de l'autre quart de cercle BOC, la figure mixtiligne ACD (*Fig.* 83.), sera égale à deux quarrés du rayon ou au rectangle ACRH (*Fig.* 80.).

Et il faut dire la même chose des sinus d'une portion de demi-cercle ou de quart de cercle, par exemple, si l'on coupe la demi-circonference ABC en N & qu'on tire la paralelle NS, & que dans la figure 83. on coupe la droite AD en H en même raison que la demi-circonference, & qu'on éleve la perpendiculaire HR, la somme des sinus compris dans la portion AHR, sera égale au rectangle AXSH (*Fig.* 80.) & ainsi des autres.

DEFINITION.

Nous appellerons la figure mixtiligne ABD (*Fig.* 83.), *Figure des Sinus du demi-cercle*, & la figure ABC, *Figure des Sinus du quart de cercle*.

COROLLAIRE VII.

128. Quoique ce que nous avons dit dans cette Proposition & dans ses Corollaires paroisse une pure speculation, on verra cependant dans la suite l'utilité que nous en tirerons, & en attendant je vais en faire l'application à un cas particulier.

Concevons un onglet dont la base soit le demi-cercle ABC (*Fig.* 80.), & dont la plus grande hauteur au point B soit égale au rayon BO, si l'on coupe cet onglet par un plan perpendiculaire au demi-cercle & au diametre AC, & dont la section avec la base soit le rayon BO, ce plan coupant sera un triangle rectangle isoscelle; ainsi élevant sur tous les points de la demi-circonference des perpendiculaires le long de la surface de l'onglet, ces perpendiculaires seront égales chacune au sinus correspondant par rapport à la longueur, mais leur épaisseur sera plus grande, puisqu'elle sera égale à celle des Elemens de la

demi-circonference, & par conféquent la fomme de ces perpendiculaires, qui n'eft autre chofe que la furface de l'onglet, fera égale à la figure des finus ou au rectangle ACRH qui eft le double du quarré du rayon.

De même la furface du demi-onglet fait fur la bafe ABO, fera égale au quarré du rayon, & fi on coupe l'onglet par un plan perpendiculaire, dont la fection fur la bafe foit la ligne NX, la furface de la portion de l'onglet qui aura pour bafe la figure ANX, fera égale au rectangle AXSH; & ainfi des autres.

Que fi l'onglet a une hauteur plus grande, qui foit, par exemple double, triple, &c. de celle que nous lui avons donnée, alors comme toutes les perpendiculaires qui compofent la furface feront auffi doubles, triples, &c. cette furface fera égale au double, au triple, &c. du rectangle ACRH, ou bien elle fera égale à un rectangle qui aura pour hauteur le même diametre AC, & pour bafe le double, ou le triple, &c. du rayon; de même la furface de la partie NCX de l'onglet, &c. fera égale à un rectangle qui aura la hauteur CX & pour bafe une droite double ou triple, &c. du rayon, & ainfi des autres.

PROPOSITION XXXVII.

129. *Trouver le centre de gravité d'une circonference de cercle & de fes parties.*

Il eft évident que le centre de gravité d'une circonference entiere n'eft pas différent du centre du cercle; car fi l'on conçoit que la circonference foit divifée en fes Elemens, & que de chaque Element on tire une droite à l'Element qui lui eft diametralement oppofé, cette droite paffera par le centre du cercle qui la divifera en deux parties égales; par conféquent les deux Elemens étant égaux, leur centre de gravité fera fur le milieu de cette ligne, ou au centre du cercle; & comme cela arrivera par tout, il s'enfuit que le centre de gravité de tous les Elemens, ou de la circonference entiere fera le centre du cercle.

Il ne s'agit donc que de trouver le centre de gravité d'un arc de cercle, & pour cela nous chercherons d'abord le centre de gravité d'un arc moindre que la demi-circonference, & celui là étant trouvé, ceux des arcs plus grands que la demi-circonference fe trouveront aifément.

Soit l'arc ABC dont la corde eft la droite AC (*Fig.* 84.); faites cette analogie: comme l'arc ABC eft à fa corde AC, ainfi

le rayon HO du cercle est à un 4e. terme qui sera la distance du centre de gravité de l'arc ABC au centre du cercle; c'est pourquoi divisant l'arc en deux parties égales au point B, vous tirerez la droite BO au centre, & vous prendrez sur BO de O en X, la partie OX égale au quatriéme terme trouvé, & le point X sera le centre de gravité demandé.

DEMONSTRATION.

Tirez la diametre HI paralelle à la corde AC; des extrémités A, C de cette corde, abaissez sur le rayon les perpendiculaires AD, CE; par la Proposition XXXIV. la surface décrite par l'arc ABC tournant autour du diametre, est égale à la partie DE du diametre, ou à la corde AC égale à DE multipliée par la circonference du rayon HO; or par le principe du centre de gravité, la même surface est égale à l'arc ABC multiplié par la circonference que décrit son centre de gravité autour du diametre; donc nous avons deux produits égaux, & nous connoissons les deux racines du premier, c'est-à-dire, la corde AE, & la circonference du rayon; car nous supposons que le rapport du rayon à la circonference soit connu & tel qu'Archimede nous l'a donné; divisant donc ce produit par la racine connue du second produit, c'est-à-dire par l'arc AC, le quotient sera, la circonference décrite par le centre de gravité de l'arc, & cette circonference étant connue, il sera facile de connoître son rayon, que l'on auroit d'abord trouvé, si au lieu des circonferences on avoit mis dans les deux produits les rayons de ces circonferences qui sont en même raison, ce que nous allons rendre plus clair par le calcul en cette sorte.

Appellons a l'arc ABC, R le rayon HO, s la corde AC & x la distance du centre de gravité de l'arc ABC au centre, puisque le produit de la corde AC par la circonference du rayon HO, est égal au produit de l'arc ABC par la circonference du rayon x, mettant les rayons au lieu des circonferences les produits seront encore égaux; donc $sR = ax$, & divisant par a nous aurons $\frac{sR}{a} = x$, d'où l'on tire $a, s :: R, x$, où l'arc ABC est à sa corde comme le rayon HO est à la distance OX du centre de gravité de l'arc ABC.

COROLLAIRE I.

130. Pour trouver le centre de gravité de l'arc APC plus

grand que la demi-circonference, on cherchera d'abord le centre X de l'arc ABC qui est son complement à la circonference; ensuite comme le centre de gravité de la circonference entiere est le centre O du cercle, & que la circonference entiere est égale à la somme des deux arcs ABC, APC, si l'on suppose que cette circonference tourne autour du point B, le moment de la circonference entiere, par rapport au point B, sera égal aux momens des deux arcs, & par conséquent les deux arcs seront en équilibre autour du centre O de la circonference entiere; ainsi l'on dira comme l'arc APC est à l'arc ABC, reciproquement la distance OX du centre de gravité de l'arc ABC au centre O, est à un quatriéme terme qui sera la distance du centre de gravité de l'arc APC au même centre O, prolongeant donc la droite BO & prenant de O en Q la droite OQ égale au quatriéme terme trouvé, le point Q sera le centre de l'arc APC. (*N.* 98.)

COROLLAIRE II.

131. Quand l'arc est égal à la demi-circonference, alors la corde de cet arc est égale au diametre & par conséquent double du rayon, donc cette corde est 2R, & l'on a $\frac{2RR}{a} = x$, & appellant la circonferenc entiere P, la demi-circonference sera $\frac{1}{2}$ P, c'est pourquoi mettant $\frac{1}{2}$P au lieu de a, on aura $\frac{4RR}{P} = x$, mais 4RR est le quarré de 2R ou du diametre; donc la distance du centre de gravité de la demi-circonference au centre O du cercle est égale au quarré du diametre divisé par la circonference entiere.

COROLLAIRE III.

132. La surface d'un onglet cylindrique, dont le plan incliné fait avec la base un angle de 45 degrés, soit que sa base soit plus grande ou moindre qu'un demi-cercle, est égale à l'arc de sa base multiplié par une ligne droite égale à la circonference que décrit le centre de gravité de cet arc, ce qui se démontre de même que pour les onglets rectilignes.

CHAPITRE VII.

Du Centre de gravité, du Cercle & de ses parties.

COMME tous les diametres du cercle coupent les Elemens qui leur sont perpendiculaires en deux parties égales, il est visible que le centre de gravité du cercle entier est le point ou tous les diametres s'entrecoupent, c'est-à-dire, le centre du cercle, ainsi il n'est question que de trouver les centres de gravité des différentes parties du cercle; & c'est ce que nous allons faire dans ce Chapitre.

PROPOSITION XXXVIII.

133. *Trouver le centre de gravité d'un secteur de cercle.*

Soit le secteur AOB (*Fig.* 85.), si vous coupez son arc en deux parties égales, & que vous tiriez au centre la droite CO, cette ligne coupera le secteur en deux parties égales, & par conséquent son centre de gravité sera sur CO, & pour le déterminer faites cette analogie : comme l'arc AB du secteur est à sa corde AB, ainsi les deux tiers du rayon CO sont à un quatriéme terme que vous porterez de O en X, & le point X sera le centre de gravité du secteur.

DEMONSTRATION.

Concevez que l'arc AB soit divisé en ses Elemens, que vous regarderez comme autant de côtés infiniment petits d'un Polygone circonscrit, & que de l'extrémité de ces Elemens soient tirées des droites EO, FO, &c. au centre O; le secteur sera divisé en une infinité de triangles, & comme les bases de ces triangles sont infiniment petites, les droites EO FO, peuvent être regardées comme les axes de ces triangles, c'est-à-dire, comme les lignes qui les coupent en deux également; c'est pourquoi leurs centres de gravité se trouveront sur ces lignes, & seront éloignés du sommet commun des deux tiers des droites EO, FO, &c. décrivant donc du centre O, & de l'intervale OR égal aux deux tiers du rayon un cercle RSV, la circonference de ce cercle ou l'arc RS de cette circonference passera par tous les centres de gravité

gravité des triangles, & pour trouver leur centre commun il ne s'agira plus que de trouver le centre de gravité de cet arc, parce que les triangles qui sont comme autant de poids attachés aux Elemens de cet arc étant tous égaux, ils sont entr'eux comme ces Elemens. Mais par la Proposition précédente, la distance du centre de gravité de l'arc RS est au rayon OR comme la corde RS est à l'arc RS, & à cause des secteurs semblables ORS, OAB, la corde RS est à l'arc RS, comme la corde AB à l'arc ACB; donc la distance du centre de gravité de l'arc RS ou de la somme des triangles qui composent le secteur ou du secteur lui-même est à RO ou aux deux tiers du rayon AO comme la oorde AB du secteur ACB est à son arc ACB. Donc comme l'arc ACB est à sa corde AB, ainsi les deux tiers du rayon AO sont à la distance OX du centre de gravité du secteur au centre du cercle.

COROLLAIRE I.

134. La corde AB soutenant aussi l'arc APB du grand secteur APBO, si l'on veut trouver le centre de gravité de ce secteur, on dira, comme l'arc APB est à sa corde AB, ainsi les deux tiers du rayon AO sont à un quatriéme terme que l'on portera de O en Z sur le rayon OP qui coupe l'arc APB en deux également, & le point Z sera le centre de gravité cherché.

COROLLAIRE II.

135. Pour trouver le centre de gravité d'un demi-cercle HBI (*Fig.* 84.) on fera la même analogie. Ainsi appellant la demi-circonférence $\frac{1}{2}P$, la corde HI ou le diametre $2R$, le rayon R, & la distance cherchée x, on aura $\frac{1}{2}P$, $2R$, $\frac{2}{3}R$, x; donc $\frac{8RR}{3P} = x$, c'est-à-dire la distance du centre de gravité d'un demi-cercle au centre O est égale à huit fois le quarré du rayon divisé par le triple de la circonférence entiere.

PROPOSITION XXXIX.

136. *Trouver le centre de gravité d'un segment* ACBN (Fig. 85.) Mesurez le secteur AOB, le triangle AOB, & le segment

ACB ; cherchez le centre de gravité X du secteur & le centre de gravité I du triangle, & parce que le secteur étant égal à la somme du triangle & du segment, son moment par rapport au centre O doit être égal aux momens du triangle & du segment pris ensemble, & que par conséquent le triangle & le segment doivent être en équilibre autour du centre X du secteur ; dites, le segment est au triangle réciproquement comme la distance IX du centre de gravité du triangle au centre de gravité du secteur est à un quatriéme terme qui sera la distance du centre de gravité du segment au même centre X du secteur ; portant donc ce quatriéme terme de X en T, le point T sera le centre de gravité du segment (*N.* 98).

Ou bien multipliez le secteur par la distance OX de son centre de gravité, ce qui vous donnera le moment du secteur ; multipliez de même le triangle par sa distance OI pour avoir son moment. Retranchez le moment du triangle de celui du secteur, & le reste sera le moment du segment, & comme ce moment est le produit du segment par la distance de son centre de gravité, divisez le moment par le segment, & le quotient sera la distance OT, ce qui n'a pas besoin de Demonstration.

PROPOSITION XL.

137. *Trouver le centre de gravité d'une bande, c'est-à-dire d'un espace compris entre deux segmens, soit que les cordes de ces segmens soient paralelles ou qu'elles ne le soient pas.*

Si les cordes des segmens sont paralleles & également éloignées du centre, il est visible que le centre du cercle est le centre de gravité de la bande.

Si les cordes AC, NM (*Fig.* 84.) sont paralleles, mais inégalement éloignées du centre, on cherchera par la Proposition précédente les centres de gravité des segmens ABC, NPM ; & concevant que le cercle tourne autour du point B, on multipliera le cercle par la distance du centre O au point B, & les segmens chacun par leur distance de gravité au point B, ce que l'on trouvera facilement puisqu'on connoîtra la distance de ces mêmes centres de gravité au centre O du cercle, & par-là on aura les momens du cercle & des segmens. Retranchant donc du moment du cercle les momens des segmens, le reste sera le moment de la bande ACMN, & divisant ce moment par la

grandeur de la bande, le quotient sera la distance de son centre de gravité au point B, & l'on prendra cette distance sur le diametre BP qui divise la bande en deux parties égales.

Mais si les cordes AB, CD (*Fig.* 87.) n'étoient pas paralleles, on chercheroit les centres de gravité des segmens AC, BD, & du trapeze ABCD, puis on chercheroit le centre de gravité commun à ces trois parties; ainsi qu'il a été enseigné plus haut.

Comme il est extremement embarrassant de trouver les centres de gravité des différentes parties du cercle par le moyen de l'Arithmetique ordinaire, nous allons montrer dans la Proposition suivante comment on peut y employer le calcul algebrique.

PROPOSITION XLI.

138. *Trouver les centres de gravité des différentes parties du cercle, leurs distances à différens axes de mouvement* TA, *ta*, T*t*, *&c. & les solides que les parties du cercle forment en tournant autour de ces axes* (Fig. 88. 89.).

Soit le cercle AB*a*B dans lequel est un secteur BCB, & des extrémités des rayons de ces secteurs soient tirées des droites BA, BA, B*a*, B*a*, aux extrémités du diametre A*a* qui coupe ce secteur en deux parties égales, & enfin la corde BB du secteur, nous aurons des segmens, des demi-segmens, des demi-secteurs & des triangles dont on demande les centres de gravité, les momens, & les solides formés par leur circonvolution tantôt autour de TA, tantôt autour de *ta*, & tantôt autour de T*t*. Dans la figure 88, le secteur BCB est moindre que le demi-cercle, & dans la figure 89. ce secteur est plus grand.

Pour resoudre cette question, nous chercherons d'abord les grandeurs de chacune de ces portions, puis nous chercherons leurs centres de gravité, & leurs momens, ce qui nous fera trouver ensuite les solides sans beaucoup de peine. Nous donnerons aux arcs & aux lignes dont nous avons besoin pour la solution du Problême, les dénominations suivantes que nous conserverons dans tout le reste de cet Ouvrage pour la facilité du calcul.

Comme le point V de la ligne VC se trouve entre le centre C & le point A du diametre A*a* dans la figure 88. & que ce même point se trouve en-dessous du centre dans la figure 89, il est visible que la ligne VC est R—*u* dans la figure 88, & qu'elle est *u*—R

dans la figure 89, ce que je dis afin qu'on ne ſoit pas ſurpris de trouver une double dénomination d'une même ligne.

La circonférence du cercle	$= P$.
La demi-circonférence - -	$= \frac{1}{2}P$.
Le rayon - - - - - - - -	$= R$.
La corde BA - - - - - - -	$= c$.
L'arc BAB du ſecteur - -	$= 2a$.
L'arc BA - - - - - - - -	$= a$.
La corde BB - - - - - -	$= 2s$.
Le ſinus BV - - - - - -	$= s$.
La Ligne VA - - - - - - -	$= u$.
La ligne V*a* - - - - - - -	$= 2R - u = h$.
La ligne VC - - - - - -	$= x = \begin{matrix} R - u \\ u - R \end{matrix}$.
L'arc B*a* - - - - - - - -	$= \frac{1}{2}P - a = \text{a}$.

Je fais $a - s = e$, $a + s = f$, & $R + u = z$ uniquement pour abreger le calcul ſelon les occurrences.

$$a - s = e.$$
$$a + s = f.$$
$$R + u = z.$$
$$2uR = cc = s^2 + u^2,\ \text{ou}\ u^2 = c^2 - s^2 = 2uR - s^2.$$

De plus, le diametre étant égal à $2R$, & les triangles rectangles aBV, aBA étant ſemblables, on a $2uR = c^2$, & dans le triangle rectangle BAV, on a $c^2 = s^2 + u^2$; c'eſt pourquoi au lieu de c^2 nous mettrons quelquefois $2uR$, & au lieu de v^2 nous mettrons $c^2 - s^2$, ou $2uR - s^2$. Tout ceci poſé, voici comment nous trouverons les grandeurs.

GRANDEURS.

139. Le ſecteur BABC étant compoſé d'une infinité de petits triangles qui ont le ſommet commun C, & dont les baſes ſont ſur l'arc BAB, la ſomme de ces triangles, ou le ſecteur ſera égal à la ſomme des baſes, ou à l'arc BAB multiplié par la moitié de la hauteur du triangle, ou par la moitié du rayon ; donc la grandeur de ce ſecteur ſera $2a \times \frac{1}{2}R = aR$.

Le triangle BBC égal à la baſe BB multipliée par la moitié de ſa hauteur VC ſera $2s \times \overline{\frac{1}{2}R - \frac{1}{2}u} = sR - su$, ſi le ſecteur eſt moindre que le demi-cercle, & $2s \times \overline{\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}R} = su - sR$ ſi le ſecteur eſt plus grand que le demi-cercle ; ainſi pour renfermer l'un & l'autre cas dans la même équation en mettant la dénomination x de la hauteur VC, le triangle ſera $sx = \begin{matrix} sR - su \\ su - sR \end{matrix}$.

Donc le triangle BCV moitié du triangle BBC sera $\frac{1}{2}sx = \begin{cases}\frac{1}{2}sR - \frac{1}{2}su \\ \frac{1}{2}su - \frac{1}{2}sR.\end{cases}$

Si du secteur BABC $= a$R on ôte le triangle BBC $= s$R $- su$ lorsque le secteur est moindre que le demi-cercle, ou si on lui ajoûte le même triangle BBC $= su - s$R, lorsque le secteur est plus grand que le demi-cercle, on aura dans l'un & dans l'autre cas le segment BAB $= a$R $- s$R $+ su$.

Donc le demi-segment BVA $= \frac{1}{2}a$R $- \frac{1}{2}s$R $+ \frac{1}{2}su$.

Le triangle BAB égal à BB $\times \frac{1}{2}$VA sera $2s \times \frac{1}{2}u = su$.

Donc le triangle BAV moitié de BAB sera $\frac{1}{2}su$.

Si du demi-segment BVA $= \frac{1}{2}a$R $- \frac{1}{2}s$R $+ \frac{1}{2}su$, on ôte le triangle BAV, on aura le segment BA $= \frac{1}{2}a$R $- \frac{1}{2}s$R.

Si au segment BAB $= a$R $- s$R $+ su$ on ajoûte le triangle BaB $= hs$, on aura le secteur BaBA $= a$R $- s$R $+ su + hs$, & comme $u + h = 2$R, ce secteur sera eR $+ 2s$R $= a$R $- s$R $+ 2s$R $= a$R $+ s$R $= f$R.

Donc le demi-secteur BaA $= \frac{1}{2}a$R $+ \frac{1}{2}s$R $= \frac{1}{2}f$R.

Le demi-cercle ADa sera $\frac{1}{2}$P $\times \frac{1}{2}$R $= \frac{1}{4}$PR.

Donc si du demi-cercle AD$a = \frac{1}{4}$PR on ôte le demi-secteur BaA $= \frac{1}{2}a$R $+ \frac{1}{2}s$R, on aura le segment B$a = \frac{1}{4}$PR $- \frac{1}{2}a$R $- \frac{1}{2}s$R; & comme $\frac{1}{2}$P $- a =$ a, & $\frac{1}{4}$P $- \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}$a, mettant cette valeur dans l'équation précedente, on aura le segment B$a = \frac{1}{2}$aR $- \frac{1}{2}s$R.

Centres de gravité & Momens.

140. Par la Proposition XXXVIII. nous aurons le centre de gravité du secteur BCBA en faisant $2a$, $2s$ :: $\frac{2}{3}$R, $\frac{2sR}{3a}$; donc la distance de ce centre au centre C du cercle sera $\frac{2sR}{3a}$, & par conséquent sa distance à l'axe de mouvement TA R $- \frac{2sR}{3a} = \frac{3a-2s}{3a}$R, & à l'axe de mouvement ta, R $+ \frac{2sR}{3a} = \frac{3a+2s}{3a}$R.

Multipliant donc la grandeur aR du secteur par la distance $\frac{3a-2s}{3a}$R, le produit $\frac{3a-2s}{3}$R^2 sera le moment du secteur par rapport à TA, & multipliant la même grandeur aR par la distance $\frac{3a+2s}{3a}$R, le produit $\frac{3a+2s}{3}$R^2 sera son moment par rapport à ta.

Le centre de gravité du demi-secteur BCA étant autant éloi-

gné des droites TA, *ta*, que le centre de gravité du secteur entier, son moment par rapport à TA sera $\frac{3a - 2s}{6}R^2$, & par rapport à *ta*, il sera $\frac{3a + 2s}{6}R^2$.

Quant au demi-cercle ADC, son centre de gravité étant sur le rayon DC qui le divise en deux parties égales & qui est parallele aux deux droites TA, *ta*, la distance de ce centre à l'une ou l'autre de ces droites sera R. Multipliant donc la valeur $\frac{1}{4}RP$ du demi-cercle par R, le produit $\frac{1}{4}R^2P$ sera son moment par rapport à TA ou *ta*.

La distance du centre de gravité du triangle BCB au centre C du cercle est $\frac{2}{3}VC = \frac{2}{3}x = \begin{matrix}\frac{1}{3}R - \frac{2}{3}u \\ \frac{2}{3}u - \frac{1}{3}R\end{matrix}$ selon que le point V se trouve au-dessus du centre C, ou au-dessous ; donc la distance de ce centre de gravité à TA est $R \mp \frac{2}{3}x$, c'est-à-dire $R - \frac{2}{3}x$, si le point V est au-dessus du centre C, & $R + \frac{2}{3}x$, si ce point est au-dessous ; & la distance de ce centre à *ta* est pour la même raison $R \pm \frac{2}{3}x$. Or la grandeur du triangle est $sx = \begin{matrix} sR - su \\ su - sR\end{matrix}$; multipliant donc cette grandeur par la distance $R \mp \frac{2}{3}x$, le produit $sxR \mp \frac{2}{3}sxx$ sera le moment du triangle par rapport à TA ; & mettant $sR - su$, ou $su - sR$, au lieu de sx ; & au lieu de $R \mp \frac{2}{3}x$, mettant $R - \frac{2}{2}R + \frac{2}{3}u$, ou $R + \frac{2}{3}u - \frac{2}{3}R$, c'est-à-dire $\frac{1}{3}R + \frac{2}{3}u$ pour l'un & l'autre cas, nous aurons pour le moment du triangle à l'égard de TA $\frac{sR^2 + suR - 2su^2}{3}$ lorsque le point V sera au-dessus du centre C, & $\frac{-sR^2 - suR + 2su^2}{3}$ lorsque ce point sera au-dessous du centre.

Ou bien si au lieu de u^2, on met sa valeur $2uR - s^2$, on aura pour le moment du triangle BCB par rapport à TA $\frac{sR^2 - 3suR + 2s^3}{3}$ lorsque le point V sera au-dessus de C, & $\frac{-sR^2 + 3suR - 2s^3}{3}$ lorsqu'il sera en-dessous.

De même multipliant la grandeur $\begin{matrix} sR - su \\ su - sR\end{matrix}$ du triangle BCB par la distance de son centre de gravité à *ta* qui est $R \pm \frac{2}{3}x = \frac{5}{3}R - \frac{2}{3}u$ pour l'un & l'autre cas, nous aurons pour le moment du triangle à l'égard de *ta* $\frac{5sR^2 - 7suR + 2su^2}{3}$ lorsque V sera au-dessus de C, & $\frac{-5sR^2 + 7suR - 2su^2}{3}$ lorsque V sera au-dessous.

Ou bien au lieu de u^2 mettant ſa valeur $2uR - s^2$, nous aurons pour le moment du triangle à l'égard de *ta* $\frac{5sR^2 - 3suR - 2s^3}{3}$ lorſque V ſera au-deſſus de C, & $\frac{-5sR^2 + 3suR + 2s^3}{3}$ lorſque V ſera au-deſſous de C.

Le triangle BCV moitié du triangle BCB ayant ſon centre de gravité autant éloigné des droites TA, *ta*, que celui du triangle BCB, ſon moment par rapport à TA ſera donc $\frac{\pm sR^2 \pm suR \mp 2su^3}{6}$ $= \frac{\pm sR^2 \mp 3suR \pm 2s^3}{6}$ les ſignes ſupérieurs marquent que le point V eſt au-deſſus du centre C, & les inférieurs marquent que ce point eſt au-deſſous, & ſon moment par rapport à *ta* ſera $\frac{\pm 5sR^2 \mp 7suR \pm 2su^2}{6} = \frac{\pm 5sR^2 \mp 3suR \mp 2s^3}{6}$.

Si du moment du ſecteur BCBA par rapport à TA on retranche le moment du triangle BBC par rapport à la même TA lorſque le ſecteur eſt moindre que le demi-cercle, ou ſi l'on ajoûte au moment du ſecteur celui du triangle, lorſque le ſecteur eſt plus grand que le demi-cercle, le reſte ou la ſomme ſera le moment du ſegment BAB par rapport à TA, & ce moment ſera pour l'un & pour l'autre cas $\frac{3a - 2s}{3}R^2 - \frac{sR^2 + 3suR - 2s^3}{3}$ $= aR^2 - sR^2 + suR - \frac{2}{3}s^3 = eR^2 + suR - \frac{2}{3}s^3$. Donc ce moment étant diviſé par la grandeur $eR + su$ du ſegment le quotient $R - \frac{2s^3}{3eR + 3su}$ ſera la diſtance du centre de gravité du ſegment BAB à la droite TA ; & par conſéquent la diſtance de ce même centre de gravité au centre C ſera $\frac{2s^3}{3eR + 3su}$.

De même ſi du moment du même ſecteur BCBA par rapport à *ta*, on retranche le moment du triangle BCB par rapport à la même *ta*, ou qu'on le lui ajoûte ſelon que le ſecteur ſera moindre ou plus grand que le demi-cercle, le reſte ou la ſomme ſera le moment du ſegment BAB par rapporr à *ta* ; & ce moment ſera pour l'un & pour l'autre cas $\frac{3a + 2s}{3}R^2 \frac{-5sR^2 + 3suR + 2s^3}{3}$ $= aR^2 - sR^2 + suR + \frac{2}{3}s^3 = eR^2 + suR + \frac{2}{3}s^3$. Diviſant donc ce moment par la grandeur $eR + su$ du ſegment, le quotient $R + \frac{2s^3}{3eR + 3su}$ ſera la diſtance du centre de gravité du ſegment à la droite *ta*.

Donc le moment du demi-ſegment BVA par rapport à TA,

est $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}suR - \frac{2}{6}s^3$, & par rapport à *ta*, $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}suR + \frac{2}{6}s^3$; & la distance du centre de gravité de ce demi-segment à TA ou à *ta* est la même que celle du centre de gravité du segment entier.

La distance du centre de gravité du triangle BB*a* à la droite *ta*, est $\frac{2}{3}h = \frac{4}{3}R - \frac{2}{3}u$; donc la distance de ce même centre à la droite TA est $2R - \frac{2}{3}h = 2R - \frac{4}{3}R + \frac{2}{3}u = \frac{2}{3}R + \frac{2}{3}u$. Multipliant donc la grandeur sh du triangle par la distance $\frac{2}{3}R + \frac{2}{3}u$, le produit sera le moment du triangle BB*a* par rapport à TA, & ce moment sera $\frac{2}{3}shR + \frac{2}{3}shu = \frac{4}{3}sR^2 - \frac{2}{3}suR + \frac{4}{3}suR - \frac{2}{3}su^2 = \frac{4}{3}sR^2 + \frac{2}{3}suR - \frac{2}{3}su^2$; ou bien en substituant la valeur $2uR - s^2$ de u^2, on aura $\frac{4}{3}sR^2 + \frac{2}{3}suR - \frac{4}{3}suR + \frac{2}{3}s^3 = \frac{4}{3}sR^2 - \frac{2}{3}suR + \frac{2}{3}s^3$.

Multipliant de même la grandeur sh du triangle BB*a* par la distance $\frac{2}{3}h$, on aura le moment de ce triangle par rapport à *ta*, & ce moment sera $\frac{2}{3}sh^2 = \frac{8}{3}sR^2 - \frac{4}{3}suR - \frac{2}{3}s^3$.

Donc le moment du triangle BV*a* moitié de BB*a* par rapport à *ta*, sera $\frac{4}{3}sR^2 - \frac{2}{3}suR - \frac{1}{3}s^3$.

Si l'on ajoûte au moment du segment BAB par rapport à TA le moment du triangle BB*a* par rapport à la même TA, la somme sera le moment par rapport à TA du secteur B*a*BA qui a son sommet à la circonférence, & ce moment sera $aR^2 + \frac{2}{3}sR^2 + \frac{1}{3}suR = fR^2 - \frac{1}{3}hsR$, & ajoûtant de même le moment du triangle BB*a* par rapport à *ta* au moment du segment BAB par rapport à *ta*, la somme sera le moment du secteur B*a*BA par rapport à *ta*, & ce moment sera $aR^2 + \frac{5}{3}sR^2 - \frac{1}{3}suR = fR^2 + \frac{1}{3}shR$.

Divisant donc ces momens par la grandeur fR du secteur, on aura pour la distance de son centre de gravité à la droite TA $R - \frac{hsR}{3fR} = R - \frac{hs}{3f}$, & pour la distance du même centre à la droite *ta*, $R + \frac{hs}{3f}$.

Donc le moment du demi-secteur B*a*A par rapport à TA sera $\frac{fR^2}{2} - \frac{hsR}{6}$, & par rapport à *ta*, $\frac{fR^2}{2} + \frac{hsR}{6}$.

Si du sommet *a* du triangle BC*a*, on tire une droite *ab* qui coupe le côté opposé en deux parties égales, on trouvera le centre de gravité de ce triangle en prenant les deux tiers de la droite *ab* du côté du sommet *a* ; de plus, si du point *b* on tire à BB une parallele *bg* qui coupe le diametre A*a*, la partie

CV ſera coupée en deux également, à cauſe que dans les triangles ſemblables CBV, Cbg, on a CB, Cb :: CV, Cg, donc $ag = R \pm \frac{1}{2}x$, & comme ag eſt égal à la diſtance du point b à la droite ta, les deux tiers de ag ſeront égaux à la diſtance des deux tiers de ab, ou du centre de gravité du triangle BCa à la même droite ta; donc cette diſtance ſera $\frac{2}{3}R \pm \frac{1}{3}x$, ou $\frac{2}{3}R + \frac{1}{3}R - \frac{1}{3}u = R - \frac{1}{3}u$ pour l'un & pour l'autre cas; & par conſéquent la diſtance de ce même centre par rapport à TA ſera $R + \frac{1}{3}u$.

Or le triangle $BCa = \frac{1}{2}sR$; multipliant donc cette grandeur par les diſtances trouvées, nous aurons pour le moment du triangle BCa par rapport à TA, $\frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{6}sRu$, & par rapport à ta, $\frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}sRu$.

Donc le moment du quadrilatere BCBA par rapport à TA, eſt $sR^2 + \frac{1}{3}suR$ & par rapport à ta, $sR^2 - \frac{1}{3}suR$.

Le triangle ABV eſt $\frac{1}{2}su$, & la diſtance de ſon centre de gravité à TA eſt $\frac{2}{3}u$, & par conſéquent la diſtance de ce même centre à ta eſt $2R - \frac{2}{3}u$, donc le moment du triangle par rapport à TA eſt $\frac{1}{3}su^2 = \frac{2suR}{3} - \frac{s^3}{3}$, & par rapport à ta, $suR - \frac{1}{3}su^2 = \frac{1}{3}suR + \frac{1}{3}s^3$.

Donc le moment du triangle BAB par rapport à TA eſt $\frac{4}{3}suR - \frac{2}{3}s^3$, & par rapport à ta, $\frac{2}{3}suR + \frac{2}{3}s^3$.

Si du moment du demi-ſegment BVA par rapport à TA on retranche le moment du triangle BVA, le reſte ſera le moment du ſegment BA, & ce moment ſera $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}suR - \frac{2}{6}s^3 - \frac{2}{3}suR + \frac{1}{3}s^3 = \frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}suR = \frac{1}{2}eR^2 - \frac{1}{6}suR$, & diviſant ce moment par la grandeur du ſegment BA qui eſt $\frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR = \frac{1}{2}eR$, le quotient $R - \frac{su}{3e}$ ſera la diſtance du centre de gravité de ce ſegment à la droite TA.

Et ſi du moment du demi-ſegment BVA par rapport à ta on ôte le moment du triangle BVA par rapport au même ta, le moment du ſegment BA ſera $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}suR + \frac{2}{6}s^3 - \frac{1}{3}suR - \frac{1}{3}s^3 = \frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{6}snR = \frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{6}suR$, & diviſant ce moment par la grandeur $\frac{1}{2}eR$, le quotient $R + \frac{su}{3e}$ ſera la diſtance du centre de gravité du ſegment BA à la droite ta.

Enfin ſi du moment $\frac{1}{4}PR^2$ du demi-cercle ADa, on ôte le moment du ſecteur BaA par rapport à TA, le reſte ſera le moment du ſegment Ba, & ce moment ſera $\frac{1}{4}PR^2 - \frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{6}sR^2 - \frac{1}{6}suR$, & mettant au lieu de $\frac{1}{2}P - a$ ſa valeur a, & au lieu de u ſa valeur

$2R - h$, nous aurons $\frac{1}{2}aR^2 - sR^2 + \frac{1}{3}shR$; & divisant ce moment par la grandeur $\frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR$ du segment, le quotient $R + \frac{shR}{3aR - 3sR}$ ou $R + \frac{sh}{3a - 3s}$ sera la distance du centre de gravité du segment Ba à la droite TA.

De même si du moment $\frac{1}{4}PR^2$ du demi-cercle ADa on ôte le moment $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{6}sR^2 - \frac{1}{3}suR$ du secteur BaA par rapport à ta, on aura pour le moment du segment Ba, $\frac{1}{4}PR^2 - \frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{6}sR^2 + \frac{1}{3}suR$, & mettant au lieu de $\frac{1}{2}P - a$ sa valeur a, & au lieu de u, sa valeur $2R - h$, nous aurons $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{3}shR$; & divisant ce moment par $\frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR$, le quotient $R - \frac{sh}{3a - 3s}$ sera la distance du centre de gravité du segment Ba à la droite ta.

Nous avons trouvé non-seulement les grandeurs de toutes les parties du cercle qu'on avoit proposées, mais encore les distances de leurs centres de gravité aux droites TA, ta, & leurs momens par rapport à ces mêmes droites, ce qui détermine absolument les centres de gravité des parties que le diametre Aa coupe en deux également, & par conséquent les momens de ces parties par rapport à Tt. Ainsi il ne reste plus qu'à déterminer les centres de gravité des parties du cercle que le diametre Aa ne coupe pas en deux également, pour trouver ensuite leurs momens par rapport à la droite Tt, après quoi les solides formés par la circonvolution de toutes les parties autour des droites TA, ta, Tt, se trouveront sans peine.

Pour trouver donc la distance du centre de gravité du secteur BCA au diametre Aa, ce qui nous donnera sa distance à la ligne Tt, je coupe les deux arcs BA, AB, chacun en deux parties égales aux points H, I (*Fig.* 86. 90.) ; je tire la droite HC, & la corde HI qui sera égale à la corde BA ; or comme HC divise le secteur BCA en deux parties égales, le centre de gravité de ce secteur sera sur cette ligne ; donc je dis, a, c :: $\frac{2}{3}R$, $\frac{2cR}{3a}$, & $\frac{2cR}{3a}$ est la distance CR du centre de gravité du secteur au centre C du cercle : maintenant pour trouver sa distance RS, je dis à cause des triangles semblables CHX, CRS, j'ai HC, HX :: CR, CS, ou R, $\frac{1}{2}c$ :: $\frac{2cR}{3a}$, $\frac{ccR}{3aR}$, & $\frac{ccR}{3aR}$ ou $\frac{cc}{3a}$ est la distance du centre de gravité du secteur BCA au diametre ; donc revenant aux Figures 88. 89. la distance de ce centre à la droite Tt est $R - \frac{cc}{3a}$.

Multipliant donc la grandeur $\frac{1}{2}aR$ du secteur BCA par la distance $R - \frac{cc}{3a}$ ou $R - \frac{2uR}{3a}$ le produit $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{2uR^2}{6}$ est le moment du secteur par rapport à Tt; multipliant de même la grandeur $\frac{1}{2}aR$ par la distance $\frac{cc}{3a}$ ou $\frac{2uR}{3a}$, le produit $\frac{1}{3}uR^2$ est le moment du secteur par rapport au diametre Aa.

Pour le demi-cercle aDA, je dis $\frac{1}{2}P$, $2R :: \frac{2}{3}R$, $\frac{8RR}{3P}$, & $\frac{8RR}{3P}$ est la distance du centre de gravité du demi-cercle au diametre; donc sa distance à la droite Tt est $R - \frac{8RR}{3P}$; multipliant donc la grandeur $\frac{1}{4}PR$ du demi-cercle par $R - \frac{8RR}{3P}$ le produit $\frac{1}{4}PR^2 - \frac{2R^3}{3}$ est le moment du demi-cercle par rapport à Tt; & multipliant la grandeur $\frac{1}{4}RP$ par $\frac{8R^2}{3P}$, le produit $\frac{2}{3}R^3$ est le moment du demi-cercle par rapport au diametre Aa.

Donc le moment du quart de cercle DCA par rapport à Tt, est $\frac{1}{8}PR^2 - \frac{1}{3}R^3$ & par rapport au diametre Aa, $\frac{1}{3}R^3$.

La grandeur du triangle ABC est $\frac{1}{2}sR$, & la distance de son centre de gravité à sa base AC est $\frac{1}{3}s$, donc sa distance à la droite Tt est $R - \frac{1}{3}s$. Multipliant donc la grandeur $\frac{1}{2}sR$ par $R - \frac{1}{3}s$ le produit $\frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}s^2R$ est le moment du triangle ABC par rapport à Tt; & multipliant la même grandeur $\frac{1}{2}sR$ par la distance $\frac{1}{3}s$, le produit $\frac{1}{6}s^2R$ est le moment du triangle ABC, par rapport au diamettre Aa.

Si du moment du secteur BCA par rapport à Tt on ôte le moment du triangle ABC par rapport au même Tt, le reste $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{2uR^2}{6} - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{6}s^2R$ est le moment du segment BA par rapport à Tt, & divisant ce moment par la grandeur $\frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR$ du segment, le quotient $R - \frac{2uR + s^2}{3a - 3s}$ sera la distance du centre de gravité du segment à la droite Tt.

De même si du moment du secteur BCA par rapport à Aa, on ôte le moment du triangle ABC par rapport à la même Aa, le reste $\frac{1}{3}uR^2 - \frac{1}{6}s^2R = \frac{1}{6}c^2R - \frac{1}{6}s^2R = \frac{1}{6}u^2R$ sera le moment du segment BA, & divisant ce moment par la grandeur $\frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR$, le quotient $\frac{u^2}{3a - 3s} = \frac{2uR - s^2}{3a - 3s}$ sera la distance du centre de gravité du segment BA au diametre Aa.

Le triangle BVC est $\frac{1}{2}sx$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}sR - \frac{1}{2}su$, si le point

V eſt au-deſſus du centre C, & $\frac{1}{2}su - \frac{1}{2}sR$ ſi ce point eſt au-deſſous ; & la diſtance de ſon centre de gravité au diametre A*a* eſt $\frac{1}{3}s$, donc ſa diſtance à la droite T*t* eſt $R - \frac{1}{3}s$; multipliant donc la grandeur par la diſtance $R - \frac{1}{3}s$, le produit $\frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{2}suR - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2u$ ſera le moment du triangle par rapport à T*t*, lorſque V ſera au-deſſus du centre C, & ce moment ſera $\frac{1}{2}suR - \frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}s^2u + \frac{1}{6}s^2R$ lorſque V ſera au-deſſous de C.

De même multipliant la grandeur du triangle par ſa diſtance $\frac{1}{3}s$, le produit $\frac{1}{6}s^2R - \frac{1}{6}s^2u$ ſera le moment du triangle par rapport au diametre A*a* lorſque V ſera au-deſſus de C, & ce moment ſera $\frac{1}{6}s^2u - \frac{1}{6}s^2R$ lorſque V ſera au-deſſous de C.

Si du moment du ſecteur BCA, par rapport à la droite T*t* on ôte le moment du triangle BVC, lorſque le ſecteur BCB eſt moindre que le demi-cercle, ou ſi on lui ajoûte le même moment lorſque le ſecteur BCB eſt plus grand que le demi-cercle, le reſte ou la ſomme ſera le moment du demi-ſegment BVA par rapport à T*t*, & ce moment ſera $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{2uR^2}{6} - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}suR + \frac{1}{6}s^2R - \frac{1}{6}s^2u$ pour l'un & pour l'autre cas.

Et ſi du moment du ſecteur BCA par rapport au diametre A*a*, on ôte le moment du triangle BCV, ou ſi on le lui ajoûte ſelon que le ſecteur BCB eſt moindre ou plus grand que le demi-cercle, le reſte ou la ſomme ſera le moment du demi-ſegment BVA par rapport au diametre A*a*, & ce moment pour l'un & pour l'autre cas ſera $\frac{1}{3}uR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2u$, diviſant donc ce moment par la grandeur $\frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR + \frac{1}{2}su = \frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}su$, le quotient $\frac{2uR^2 - s^2R + s^2u}{3eR + 3su}$ ſera la diſtance du centre de gravité du demi-ſegment BVA au diametre A*a*, & par conſéquent ſa diſtance à la droite T*t* ſera $R - \frac{2uR^2 + s^2R - s^2u}{3eR + 3su}$, ce que l'on auroit trouvé de même ſi on avoit diviſé le moment du demi-ſegment BVA par rapport à T*t* par ſa grandeur $\frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR + \frac{1}{2}su$.

La grandeur du triangle BVA eſt $\frac{1}{2}su$, & la diſtance de ſon centre de gravité au diametre A*a* eſt $\frac{1}{3}s$, donc ſa diſtance à la droite T*t* eſt $R - \frac{1}{3}s$; multipliant donc la grandeur $\frac{1}{2}su$ par la diſtance $R - \frac{1}{3}s$ le produit $\frac{1}{2}suR - \frac{1}{6}ssu$ ſera le moment du triangle BVA par rapport à T*t*, & multipliant $\frac{1}{2}su$ par la diſtance $\frac{1}{3}s$, le produit $\frac{1}{6}ssu$ ſera le moment du même triangle BVA par rapport au diametre A*a*.

La grandeur du triangle BC*a* eſt $\frac{1}{2}sR$, & la diſtance de ſon

centre de gravité au diametre Aa eſt $\frac{1}{3}s$, donc ſa diſtance à la droite Tt eſt $R - \frac{1}{3}s$; multipliant donc la grandeur $\frac{1}{2}sR$ par la diſtance $R - \frac{1}{3}s$, le produit $\frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}ssR$ ſera le moment du triangle BCa par rapport à Tt, & multipliant la même grandeur $\frac{1}{2}sR$ par la diſtance $\frac{1}{3}s$, le produit $\frac{1}{6}ssR$ ſera le moment du triangle BCa par rapport au diametre Aa.

Si l'on ajoûte le moment du triangle BCa par rapport à Tt au moment du ſecteur BCA, la ſomme $\frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{2}aR^2 - \frac{2uR^2}{6}$, ſera le moment par rapport à Tt du ſecteur BaA, qui a ſon ſommet à la circonference, & ſi l'on diviſe ce moment par la grandeur $\frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}sR$ du ſecteur BaA le quotient $R - \frac{2uR - s^2}{3a + 3s} = R - \frac{c^2 - s^2}{3f}$ ſera la diſtance du centre de gravité du ſecteur BaA à la droite Tt, & ajoûtant le moment du triangle BCa par rapport au diametre Aa au moment du ſecteur BCA, la ſomme $\frac{2}{3}uR^2 + \frac{1}{6}s^2R$ ſera le moment du ſecteur BaA par rapport au diametre Aa, & diviſant ce moment par la grandeur $\frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}sR$ du ſecteur BaA le quotient $\frac{2uR + s^2}{3a + 3s} = \frac{c^2 + s^2}{3f}$ ſera la diſtance du centre de gravité du ſecteur BaA au diametre Aa.

Le triangle BAa eſt sR, & la diſtance de ſon centre de gravité au diametre Aa eſt $\frac{1}{3}s$, donc ſa diſtance à la droite Tt eſt $R - \frac{1}{3}s$, multipliant donc la grandeur sR par la diſtance $R - \frac{1}{3}s$, le produit $sR^2 - \frac{1}{3}s^2R$ ſera le moment du triangle BaA par rapport à Tt; & multipliant la même grandeur par la diſtance $\frac{1}{3}s$, le produit $\frac{1}{3}s^2R$ ſera le moment du triangle BaA par rapport au diametre Aa.

Comme nous avons oublié ci-deſſus de chercher le moment du triangle BaA par rapport à TA, & à ta, nous en dirons un mot quand nous aurons fini ce qui regarde la droite Tt.

Si du moment du demi-cercle ADa par rapport à Tt on retranche le moment du ſecteur BaA, le reſte $\frac{1}{4}PR^2 - \frac{2}{3}R^3 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{6}s^2R - \frac{1}{2}aR^2 + \frac{2uR^2}{6}$ ſera le moment du ſegment Ba par rapport à Tt; & mettant au lieu de $\frac{1}{2}P - a$ ſa valeur a, nous aurons $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{2}{3}R^3 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{6}s^2R + \frac{2uR^2}{6}$, diviſant donc ce moment par la grandeur $\frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR$ du ſegment, le quotient $R - \frac{4R^2 + s^2 + 2uR}{3a - 3s}$ ſera la diſtance du centre de gravité du ſegment Ba par rapport à Tt.

Et ôtant du moment $\frac{2}{3}R^3$ du demi-cercle par rapport au diametre Aa, le moment du ſecteur BaA le reſte $\frac{2}{3}R^3 - \frac{1}{3}uR^2 - \frac{1}{6}s^2R$ ſera le moment du ſegment Ba par rapport au diametre Aa, & diviſant ce moment par la grandeur $\frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR$, le quotient $\frac{4R^2 - 2uR - s^2}{3a - 3s}$, ſera la diſtance du centre de gravité du ſegment par rapport au diametre Aa.

Voilà donc toutes les grandeurs des parties propoſées du cercle, leurs centres de gravité, les diſtances des centres de gravité de ces parties aux droites TA, ta, Tt, Aa, & leurs momens par rapport à ces droites; il ne nous reſte plus qu'à parler des ſolides faits autour de ces droites, mais auparavant nous allons chercher les momens du triangle aBA par rapport aux droites TA, ta.

Le moment du triangle BVa par rapport à TA, eſt $\frac{2}{3}sR^2 - \frac{1}{3}suR + \frac{1}{3}s^3$, & celui du triangle ABV par rapport à la même TA, eſt $\frac{2}{3}suR - \frac{1}{3}s^3$; or ces deux triangles font enſemble le triangle aBA, ajoûtant donc leurs momens, la ſomme $\frac{2}{3}sR^2 - \frac{1}{3}suR + \frac{1}{3}s^3 + \frac{2}{3}suR - \frac{1}{3}s^3 = \frac{2}{3}sR^2 + \frac{1}{3}suR$, ſera le moment du triangle BaA par rapport à TA, & diviſant ce moment par la grandeur sR du triangle le quotient $\frac{2}{3}R + \frac{1}{3}u$, ſera la diſtance du centre de gravité du triangle BaA à la droite TA.

De même ajoûtant enſemble les momens des triangles BVa, ABV par rapport à ta la ſomme $\frac{4}{3}sR^2 - \frac{2}{3}suR - \frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{3}suR + \frac{1}{3}s^3 = \frac{4}{3}sR^2 - \frac{1}{3}suR$ ſera le moment du triangle BaA par rapport a ta, & diviſant ce moment par la grandeur sR, le quotient $\frac{4}{3}R - \frac{1}{3}u$ ſera la diſtance du centre de gravité du triangle à la droite ta.

SOLIDES.

141. Nous avons déja dit pluſieurs fois que le moment d'une ſurface qui tourne autour d'une ligne droite eſt le produit de cette ſurface par la diſtance de ſon centre de gravité, au lieu que le ſolide fait par la circonvolution eſt le produit de la ſurface par la circonference que décrit le centre de gravité, d'où il ſuit que le moment eſt au ſolide comme le rayon eſt à la circonference. Donc pour avoir les ſolides des parties du cercle dont nous venons de trouver les momens, il n'y a qu'à dire comme le rayon eſt à la-

circonference, ou comme 7 à 22, ainsi le moment de telle partie est au solide de cette partie.

Par exemple, pour trouver le solide produit par la circonvolution du secteur BCBA autour de TA, on dira comme R, P :: $\frac{3a - 2s}{3} R^2$, $\frac{3a, 2s}{3R} R^2P$, ainsi $\frac{3a - 1s}{3R} R^2P$, ou $\frac{3a - 2s}{3} RP$ sera le solide cherché.

De même pour trouver le solide produit par la circonvolution tion du triangle BV*a* autour de *ta*, on dira comme R, P :: $\frac{4}{3} sR^2 - \frac{2}{3} suR - \frac{1}{3} s^3$, $\frac{4sR^2P - 2suRP - s^3P}{3R}$, & ce quatriéme terme sera le solide demandé, & ainsi des autres, ce qui ne demande pas que je m'étende d'avantage la dessus.

La Figure 91. marque les momens des parties du cercle par rapport à *ta*, lorsque le secteur BCBA est moindre que le demi-cercle, & la Figure 92. marque ces mêmes momens par rapport à *ta*, lorsque le secteur BCBA est plus grand que le demi-cercle, & l'on peut voir dans quel embarras on seroit s'il falloit chercher la solidité de chaque partie en particulier, independamment de la connoissance du centre de gravité de sa base ; je n'ai point donné de figures pour les momens de ces mêmes parties par rapport à TA ou à T*t* ou à A*a*, parce qu'il est facile de se les représenter sur le modéle de ces deux ci.

Comme nous aurons quelquefois besoin dans le reste de cet ouvrage de ce que nous venons de dire dans cette Proposition, je vais en faire une petite recapitulation qui sera comme une espece de table à laquelle on pourra avoir recours.

RECAPITULATION.

Grandeurs des différentes parties du Cercle.

Le demi-cercle AD*a*, - -	$\frac{1}{4} PR$.
Le secteur BCBA, - - -	aR.
Le demi-secteur BAC, - - -	$\frac{1}{2} aR$.
Le triangle BBC, - -	$sx = sR - su$ ou $su - sR$.
Le triangle BCV, - - -	$\frac{1}{2} sx = \frac{1}{2} sR - \frac{1}{2} su$ ou $\frac{1}{2} su - \frac{1}{2} sR$.
Le segment BAB, - -	$aR - sR + su = eR + su$.
Le demi-segment BAV, - - -	$\frac{1}{2} aR - \frac{1}{2} sR + \frac{1}{2} su = \frac{1}{2} eR + \frac{1}{2} su$.

Le triangle BAB, - - su.
Le triangle BAV, - - $\frac{1}{2}su$.
Le ſegment BA, - - $\frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR = \frac{1}{2}eR$.
Le triangle B*a*B, - - - sh.
Le triangle B*a*V, - - $\frac{1}{2}sh$.
Le ſecteur B*a*BA, à la circonference, $aR - sR + su + sh = aR + sR = fR$.
Le ſecteur B*a*A, à la circonference, $\frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR + \frac{1}{2}su + \frac{1}{2}sh = \frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}sR = \frac{1}{2}fR$.
Le ſegment B*a*, $\frac{1}{4}PR - \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR = \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR$.
Le triangle BC*a*, $\frac{1}{2}sR$.

Diſtances des Centres de gravité à la droite TA.

Du demi-cercle AD*a*, - R.
Du ſecteur BCBA, - - $R - \frac{2sR}{3a} = \frac{3a-2s}{3a}R$.
Du demi-ſecteur BCA, - $R - \frac{2sR}{3a} = \frac{3a-2s}{3a}R$.
Du triangle BBC, - - $R \mp \frac{2}{3}x = \frac{1}{3}R + \frac{2}{3}u$.
Du triangle BCV, - - *idem*.
Du ſegment BAB, - - $R - \frac{2s^3}{3eR + 3su} = R - \frac{2s^3}{3aR - 3sR + 3su}$.
Du demi-ſegment BAV, *idem*.
Du triangle BAB, - - $\frac{2}{3}u$.
Du triangle BAV, - - *idem*.
Du ſegment BA, - - $R - \frac{su}{3e}$.
Du triangle BB*a*, - - $2R - \frac{2}{3}h = 2R - \frac{4}{3}R + \frac{2}{3}u = \frac{2}{3}R + \frac{2}{3}u$.
Du triangle B*a*V, - - *idem*.
Du ſecteur B*a*BA, - - $R - \frac{hs}{3f}$.
Du demi-ſecteur B*a*B, - - *idem*.
Du ſegment B*a*, - - $R + \frac{sh}{3a - 3s}$.
Du triangle BC*a*, - - $R + \frac{1}{3}u$.

Diſtances des centres de gravité par rapport à ta.

Du demi-cercle AD*a*, - - - R.

De

Du secteur BCBA, - - $\frac{3a+2s}{3a}R$.
Du demi-secteur BCA, - *idem.*
Du triangle BBC, - - $R \pm \frac{2}{3}x = \frac{5}{3}R - \frac{2}{3}u$.
Du triangle BCV, - - *idem.*
Du segment BAB, - - $R + \frac{2s^3}{3eR + 3su} = R + \frac{2s^3}{3aR - 3sR + 3su}$.
Du demi segment BAV, - *idem.*
Du triangle BAB, - - $2R - \frac{2}{3}u$.
Du triangle BAV, - - *idem.*
Du segment BA, - - $R + \frac{su}{3e}$.
Du triangle BB*a*, - - $\frac{2}{3}h = \frac{4}{9}R - \frac{2}{3}u$.
Du triangle B*a*V, - - *idem.*
Du secteur B*a*BA à la circonference, $R + \frac{hs}{3f}$.
Du demi-secteur B*a*B, - *idem.*
Du segment B*a*, - - $R - \frac{sh}{3a - 3s}$.
Du triangle BC*a*, - - $R - \frac{1}{3}u$.

Distances des centres de gravité à la droite Tt.

Du demi-cercle ADC, - - $R - \frac{8RR}{3P}$.
Du secteur BCA, - - - $R - \frac{cc}{3a} = R - \frac{2uR}{3a}$.
Du triangle BCV, - - - $R - \frac{1}{3}s$.
Du demi-segment BVA, - $R - \frac{2uR^2 + s^2R - s^2u}{3eR + 3su}$.
Du triangle BAV, - - - $R - \frac{1}{3}s$.
Du segment BA, - - - $R - \frac{2uR + s^2}{3a - 3s}$.
Du triangle B*a*V, - - - $R - \frac{1}{3}s$.
Du secteur B*a*A à la circonference, $R - \frac{2uR - s^2}{3a + 3s} = R - \frac{c^2 - s^2}{3f}$.
Du segment B*a*, - - - $R - \frac{4R^2 + s^2 + 2uR}{3a - 3s}$.
Du triangle BC*a*, - - $R - \frac{1}{3}s$.

Distances des centres de gravité au diametre, Aa.

Du demi-cercle, - - - - $\frac{8RR}{3P}$.

Du secteur BCA, - - - - $\frac{cc}{3a} = \frac{2uR}{3a}$.

Du triangle BCV, - - - - $\frac{1}{3}s$.

Du demi-segment BVA, - - - $\frac{2uR - s^2R + s^2u}{3eR + 3su}$.

Du triangle BAV, - - - - $\frac{1}{3}s$.

Du segment BA, - - - - $\frac{2uR - s^2}{3a - 3s}$.

Du triangle B*a*V, - - - - $\frac{1}{3}s$.

Du secteur B*a*A, - - - - $\frac{2uR + s^2}{3a + 3s} = \frac{c^2 + s^2}{f^2}$.

Du segment B*a*, - - - - $\frac{4R^2 - s^2 - 2uR}{3a - 3s}$.

Du triangle BC*a*, - - - - $\frac{1}{3}s$.

Momens par rapport à TA.

Du demi-cercle AD*a*, - - $\frac{1}{4}R^2P$.

Du secteur BCBA, - - $\frac{3a - 2s}{3}R^2$.

Du demi-secteur BCA, - - $\frac{3a - 2s}{6}R^2$.

Du triangle BBC, - - $\frac{\pm sR^2 \pm suR \mp 2su}{3}$.

Du triangle BCV, - - $\frac{\pm sR^2 \pm suR \mp 2su}{6}$.

Du segment BAB, - - $eR^2 + suR - \frac{2}{3}s^3$.

Du segment BAV, - - $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}suR - \frac{1}{3}s^3$.

Du triangle BAB, - - $\frac{4}{3}suR - \frac{2}{3}s^3$.

Du triangle BAV, - - $\frac{2suR}{3} - \frac{2s^3}{3}$.

Du segment BA, - - $\frac{1}{2}eR^2 - \frac{1}{6}suR$.

Du triangle B*a*B, - - $\frac{4}{3}sR^2 - \frac{4}{3}suR + \frac{4}{3}s^3$.

Du triangle B*a*V, - - $\frac{2}{3}sR^2 - \frac{1}{3}suR + \frac{1}{3}s^2$.

Du secteur B*a*BA à la circonference, - - $aR^2 + \frac{1}{3}sR^2 + \frac{1}{3}suR = fR^2 - \frac{1}{3}hsR$.

Du demi-secteur B*a*A, - $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{6}sR^2 + \frac{1}{6}suR = \frac{1}{2}fR^2 - \frac{1}{6}hsR$.

Du ſegment B*a*, - - - - $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{6}shR$.

Du triangle BC*a*, - - $\frac{1}{2}sR^2 + \frac{5}{6}suR$.

Momens par rapport à ta.

Du demi-cercle AD*a*, - $\frac{1}{4}R^2P$.

Du ſecteur BCBA, - - $\frac{3a+2s}{3}R$.

Du ſecteur BCA, - - $\frac{3a+2s}{6}R^2$.

Du triangle BBC, - - $\frac{\pm 5sR^2 \mp 3suR \mp 2s^3}{3}$.

Du triangle BCV, - - $\frac{\pm 5sR^2 \mp 3suR \mp 2s^3}{6}$.

Du ſegment BAB, - - $eR + suR + \frac{2}{3}s^3$.

Du ſegment BAV, - - $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}suR \frac{1}{3}s^3$.

Du triangle BAB, - - $\frac{2}{3}suR + \frac{2}{3}s^3$.

Du triangle BAV, - - $\frac{2}{3}suR + \frac{1}{3}s^3$.

Du ſegment BA, - - $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{6}suR$.

Du triangle B*a*B, - - $\frac{8}{3}sR^2 - \frac{4}{3}suR - \frac{2}{3}s^3$.

Du triangle B*a*V, - - $\frac{4}{3}sR^2 - \frac{2}{3}suR - \frac{1}{3}s^3$.

Du ſecteur B*a*BA à la circonference, - $aR^2 + \frac{5}{3}sR^2 - \frac{1}{3}suR = fR^2 + \frac{1}{3}hsR$.

Du demi-ſecteur B*a*A, $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{5}{6}sR^2 - \frac{1}{6}suR = \frac{1}{2}fR^2 + \frac{1}{6}hsR$.

Du ſegment B*a*, - - - $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}shR$.

Du triangle BC*a*, - - $\frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}suR$.

Momens par rapport à Tt.

Du demi-cercle ADC, - $\frac{1}{4}PR^2 - \frac{2}{3}R^3$.

Du ſecteur BCA, - - $\frac{1}{2}AR^2 - \frac{aR^2}{3}$.

Du triangle BCV, - - $\pm \frac{1}{2}sR^2 \mp \frac{1}{2}suR \mp \frac{1}{6}s^2R \pm \frac{1}{6}s^2u$.

Du demi-ſegment BVA, $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{3}uR^2 - \frac{1}{2}sR + \frac{1}{2}suR + \frac{1}{6}s^2R - \frac{1}{6}s^2u$.

Du triangle BAV, - - $\frac{1}{2}suR - \frac{1}{6}ssu$.

Du ſegment BA, - - $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{3}uR^2 - \frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}s^2R$.

Du triangle BV*a*, - - $\frac{1}{2}shR - \frac{1}{6}ssh$.

Du ſecteur B*a*A à la circonference, $\frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}sR^2 + \frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{3}uR^2$.

Du ſegment B*a*, - - - $\frac{1}{2}aR - \frac{2}{3}R^3 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{3}uR^2$.

Du triangle BC*a*, - - $\frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}ssR$.

Momens par rapport au diametre Aa,

Du demi-cercle AD*a*, - - - $\frac{2}{3}R^3$.

Du ſecteur BCA, - - - $\frac{1}{3}uR^2$.

Du triangle BCV, - - - $\pm\frac{1}{6}s^2R \mp s^2u$.

Du demi-ſegment BVA, - - $\frac{1}{3}uR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2u$.

Du triangle BAV, - - - $\frac{1}{6}ssu$.

Du ſegment BA, - - - $\frac{1}{6}u^2R$.

Du triangle BV*a*, - - - $\frac{1}{6}ssh$.

Du ſecteur B*a*A, - - - $\frac{1}{3}uR^2 + \frac{1}{6}s^2R$.

Du ſegment B*a*, - - $\frac{2}{3}R^3 - \frac{1}{3}uR^2 - \frac{1}{6}s^2R = \frac{1}{6}h^2R$.

Du triangle BR*a*, - - - $\frac{1}{6}ssR$.

PROPOSITION XLII.

142. *Trouver les centres de gravité des parties d'une Ellipſe, leurs diſtances par rapport à differens axes de mouvement, & les ſolides formés par la circonvolution de ces parties autour des axes de mouvement.*

Soit l'Ellipſe AD*a* (*Fig.* 93), & ſon ſecteur BCBA autour du grand axe, & des extrémités B, B, des jambes de ce ſecteur ſoient tirées les droites B*a*, B*a*, BA, BA qui forment dans cette Ellipſe pluſieurs parties dont on demande les centres de gravité, les diſtances de ces centres aux axes TA, *ta*, T*t*, A*a*; décrivez autour du grand axe un cercle A*da*, dans lequel vous décrirez le ſecteur *b*C*b*A fait par le prolongement de la corde BB, & vous tirerez les droites *ba*, *ba*, *b*A, *b*A; l'axe A*a* ſera donc comme dans la Propoſition précédente 2R, la droite AV, *u* la droite VC $= x$, mais la droite BV; ne ſera plus *s*, & pour trouver ſa dénomination il faut d'abord chercher le rapport du rayon *d*C du cercle au demi-petit axe DC de l'Ellipſe, parce que BV & toutes les paralleles à BV ſeront dans la même raiſon par la proprieté de l'Ellipſe, ainſi que nous l'avons expliqué dans la *Théorie & pratique des Geometres*. Suppoſons donc que ce rapport ſoit comme *m* eſt à *n*, nous dirons *m*, *n*, *s*, $\frac{sn}{m}$ & par conſéquent $\frac{sn}{m}$ ſera la dénomination de BV, enſuite on cherchera les centres

de gravité, les distances de ces centres, & le mouvement des parties du cercle comme dans la Proposition précédente, & par tout où se trouvera s, on substituera sa valeur $\frac{sn}{m}$; de même par tout où se trouvera s^2, on substituera $\frac{s^2 n^2}{m^2}$, & de même des autres puissances de s.

C'est ainsi que Wallis resoût ce Problême, mais comme il est facile de se tromper en agissant ainsi, d'autant plus que l'expression des solides faits par le demi-cercle ne contenant point la lettre s, il faudroit chercher un autre moyen pour trouver les solides correspondans de l'Ellipse; voici une autre maniere de resoudre ce Problême beaucoup plus sûre & plus facile.

Je distingue d'abord deux sortes de momens ou de solides, ceux qui sont faits autour de TA & ta, & ceux qui sont faits autour de Tt & de Aa.

Dans les momens ou les solides faits autour de TA & ta, les parties de l'Ellipse dont les circonvolutions forment ces momens ou ces solides, sont aux parties correspondantes du cercle comme n est à m; par exemple, le secteur BCBA est au secteur bCbA comme n à m, ou comme le petit axe au grand axe, & ainsi des autres par la proprieté de l'Ellipse; & les distances des centres de gravité de ces parties aux droites TA, ta, sont les mêmes que les distances des centres de gravité des parties correspondantes du cercle aux mêmes droites TA, ta; or les momens des parties de l'Ellipse par rapport à TA, ta, sont aux momens des parties correspondantes du cercle par rapport aux mêmes TA, ta, en raison composée des parties & des distances, & les distances sont égales, donc ces momens sont entr'eux comme les parties ou comme n à m, ainsi le moment du secteur BCBA est au moment du secteur bCbA, comme n à m.

Ayant donc trouvé que le moment du demi-cercle Ada par rapport à TA est $\frac{1}{4}R^2P$, on dira comme $m, n :: \frac{1}{4}R^2P, \frac{1}{4}\frac{nR^2P}{m}$, & le moment de la demi-Ellipse ADa par rapport à TA sera $\frac{1}{4}\frac{nR^2P}{m}$.

De même ayant trouvé que le moment du secteur bCbA par rapport à TA est $\frac{3a-2s}{3}R^2$, on dira comme $m, n :: \frac{3a-2s}{3}R^2$, $\frac{3an-2sn}{3m}R^2$ & le moment du secteur BCBA de l'Ellipse sera

$\frac{3an - 2un}{3m}R^2$, & de même des momens des autres parties par rapport à TA ou à *ta*.

Dans les momens ou solides faits autour de T*t* ou de A*a*, on observera que non-seulement les parties de l'Ellipse sont aux parties correspondantes du cercle comme *n*, à *m*, mais encore les distances de leurs centres de gravité à T*t* ou à *ta*, sont dans la même raison, donc les momens des parties de l'Ellipse étant aux momens des parties correspondantes du cercle en raison composée des parties & des distances, cette raison est doublée de la raison de *n* à *m*, & comme la raison doublée de *n* à *m*, est égale à la raison n^2, m^2, des quarrés des *n*, *m*; les momens des parties de l'Ellipse par rapport à T*t*, ou à A*a*, sont aux momens correspondans des parties du cercle par rapport aux mêmes T*t* ou à A*a* comme n^2, à m^2.

Ayant donc trouvé que le moment du demi-cercle A*da* par rapport à T*t* est $\frac{1}{4}PR^2 - \frac{2}{3}R^3$, on dira m^2, n^2 :: $\frac{1}{4}PR^2 - \frac{2}{3}R^3$, $\frac{n^2PR^2}{4m^2} - \frac{2n^2RRR}{3m^2}$. De même ayant trouvé que le moment du secteur *b*CA par rapport à T*t* est $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{uR^2}{3}$, on dira m^2, n^2 :: $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{uR^2}{3}$, $\frac{n^2aR^2}{2m^2} - \frac{n^2uR^2}{3m^2}$ & $\frac{n^2uR^2}{2m^2} - \frac{n^2uR^2}{3m^2}$ sera le moment du secteur BCA par rapport à T*t* de même que $\frac{n^2PR^2}{4m^2} - \frac{2n^2R^3}{3m^2}$ sera celui de la demi-Ellipse par rapport à la même T*t*, & de même des autres momens par rapport à T*t* ou à A*a*.

PROPOSITION XLIII.

143. *Trouver le centre de gravité de la Lunule d'Hypocrate* ABCD, (Fig. 94.) *la distance de ce centre aux différens axes de mouvement* HR, AC, S*r*, R*r*, *& les momens de la Lunule par rapport à ses axes.*

La Lunule d'Hypocrate se fait en décrivant d'abord un cercle ABCD, puis du milieu de son diametre élevant le rayon OP perpendiculaire, & du point P intervale PA décrivant l'arc de cercle ADC qui forme la Lunule ABCD.

Le triangle AOP étant rectangle & isoscele, le quarré de AP est égal aux quarrés de AO, OP, ou au double du quarré de AO, donc le cercle du rayon AP est double du cercle du rayon AO, & par conséquent le quart de cercle APCD est égal au demi-cercle ABC, & ôtant de part & d'autre le segment commun ADCO,

il reste le triangle APC égal à la Lunule ABCD, & c'est ce qu'on appelle la quadrature de la Lunule.

Maintenant pour trouver son centre de gravité, concevons d'abord que la Lunule tourne autour de l'axe de mouvement Sr, la grandeur du demi-cercle ABC est $\frac{1}{4}PR$, & la distance de son centre de gravité au diametre AC est $\frac{8PR}{3P}$ par la Proposition XLI. donc la distance de ce centre à la droite Sr est $R + \frac{8RR}{3P}$ à cause de OP égal au rayon $AO = R$; donc le moment du demi-cercle par rapport à Sr, est $\frac{1}{4}PR^2 + \frac{2}{3}R^3$, ce qu'on trouve en multipliant la grandeur $\frac{1}{4}PR$ par la distance $R + \frac{8RR}{3P}$.

La grandeur du triangle ACP est $\frac{1}{2} AC \times OP = RR$ & la distance de son centre de gravité à la droite Sr est $\frac{2}{3}R$.

Ajoûtant donc le moment $\frac{1}{4}PR^2 + \frac{2}{3}R^3$ du demi-cercle ABC au moment $\frac{2}{3}R^3$ du triangle APC, la somme $\frac{1}{4}PR^2 + \frac{4}{3}R^3$ sera le moment du secteur APCB à la circonference par rapport à Sr.

Le rayon AP de l'arc AC étant égal à $\sqrt{2R^2}$, la circonference de ce rayon sera à la circonference du rayon AO ou R qui est P, comme R à $\sqrt{2R^2}$, & par conséquent cette circonference sera $\sqrt{2P^2}$, & l'arc AC étant le quart de cette circonference sera $\frac{1}{4}\sqrt{2P^2}$, & sa corde sera $2R$; donc pour trouver le centre de gravité du secteur APCD on dira comme $\frac{1}{4}\sqrt{2P^2}, 2R :: \frac{2}{3}\sqrt{2R^2}, \frac{16R\sqrt{2R^2}}{3\sqrt{2P^2}}$, & $\frac{16R\sqrt{2R^2}}{3\sqrt{2P^2}} = \frac{16RR}{3P}$ sera la distance du centre de gravité du secteur APCD à la droite Sr; or le secteur APCD étant égal au demi-cercle ABC vaut $\frac{1}{4}PR$, multipliant donc cette grandeur par la distance $\frac{16RR}{3P}$ le produit $\frac{4}{3}R^3$ sera le moment du secteur APCD par rapport à la droite Sr.

Otant donc le moment $\frac{4}{3}R^3$ du secteur APCD du moment $\frac{1}{4}PR^2 + \frac{4}{3}R^2$ du secteur APCB, le reste $\frac{1}{4}PR^2$ sera le moment de la Lunule par rapport à Sr, & comme la Lunule est égale au triangle $APC = R^2$, si l'on divise le moment $\frac{1}{4}R^2P$ par la grandeur R^2, le quotient $\frac{1}{4}P$ sera la distance du centre de gravité de la Lunule à la droite Sr; prenant donc sur PB la grandeur $PZ = \frac{1}{4}P$, ou au quart de la circonference du rayon AO, le point Z sera le centre de gravité de la Lunule.

COROLLAIRE I.

144. Donc si le centre de gravité de la Lunule étoit connu la quadrature du cercle seroit connuë, car la droite ZP seroit égale au quart AB de la circonference du rayon AO.

COROLLAIRE II.

145. Si l'on conçoît que le cercle entier ABCP tourne autour de *Sr*, son moment sera $\frac{1}{2}PR^2$, car la grandeur du cercle est $\frac{1}{2}$ PR & la distance de son centre de gravité O à la droite *Sr* est R, donc le moment du cercle est à celui de la Lunule comme $\frac{1}{2}PR^2$ à $\frac{1}{4}PR^2$ ou comme $\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{4}$ ou comme 2 à 1.

COROLLAIRE III.

146. Si l'on décrit autour de *Sr* un demi-cercle SM*r* égal au demi-cercle ABC, le moment du demi-cercle SM*r* par rapport à la droite *Sr* sera $\frac{2}{3}R^3$ par la Proposition XLI. mais le moment du triangle APC par rapport à *Sr*, est aussi $\frac{2}{3}R^3$ comme nous venons de le démontrer, donc le solide produit par le triangle autour de *Sr* est égal au solide produit par le demi-cercle SM*r* autour de la même droite *Sr*.

COROLLAIRE IV.

147. Le moment du secteur APCD par rapport à *Sr* est $\frac{4}{3}R^3$, ôtant donc de ce moment celui du triangle APC, le reste $\frac{2}{3}R^3$ sera le moment du segment ADCO par rapport à *Sr*; donc le moment du segment ADCO, celui du triangle APC, & celui du demi-cercle SM*r* par rapport à *Sr* sont égaux entr'eux.

COROLLAIRE V.

148. Si au moment de la Lunule $\frac{1}{4}PR^2$ on ajoûte le moment du segment ADCO $\frac{2}{3}R^2$ la somme $\frac{1}{4}PR^2 + \frac{2}{3}R^3$ sera le moment du demi cercle ABC par rapport à *Sr*, mais le moment du cercle entier ABCP est $\frac{1}{2}PR^2$, ôtant donc de ce moment celui du demi-cercle ABC le reste $\frac{1}{4}PR^2 - \frac{2}{3}R^3$ sera le moment du demi-cercle APC, donc le moment du demi-cercle ABC est au moment du demi-cercle APC comme $\frac{1}{4}PR^2 + \frac{2}{3}R^3$ à $\frac{1}{4}PR^2 - \frac{2}{3}R^3$ & la différence de ces deux momens est $\frac{4}{3}R^3$, donc la partie extérieure du moment du cercle ABCP autour de *Sr* surpasse

sa

ſa partie intérieure de $\frac{4}{3}R^3$, mais $\frac{2}{3}R^3$ eſt le moment du demi-cercle S*Mr*, donc la partie extérieure ſurpaſſe l'intérieure de deux fois le moment du demi-cercle S*Mr*, & mettant les ſolides au lieu des momens, la partie extérieure de l'anneau décrit par le cercle ABCP, ſurpaſſe la partie intérieure de deux fois la ſphere que décrit ſon demi-cercle autour de ſon diametre, ce qui s'accorde parfaitement avec ce que nous avons dit la deſſus dans la *Theorie & pratique des Geometres.*

COROLLAIRE VI.

149. Puiſque la couronne ſolide décrite par le ſegment ADCO autour de *Sr*, eſt égale à la ſphere décrite par le demi-cercle SM*r* autour de la même *Sr* (*N.* 147.), & que la corde AC du ſegment eſt égale au diametre *Sr*, il s'enſuit que ſi un ſegment ADC dont la corde eſt parallele au diametre de ſon cercle tourne autour de ce diametre, la couronne ſolide qu'il décrit eſt égale à la ſphere que décriroit autour de la corde AC un demi-cercle ABC qui auroit la corde AC pour diametre; ce qui s'accorde encore avec ce que nous avons dit dans l'ouvrage que nous venons de citer.

COROLLAIRE VII.

150. Puiſque la diſtance $PZ = \frac{1}{4}P$ ſi l'on en ôte $PO = R$, le reſte $\frac{1}{4}P - R$ ſera la diſtance du centre de gravité de la Lunule au diametre AC, & multipliant la grandeur RR de la Lunule par cette diſtance, le produit $\frac{1}{4}PRR - R^3$ ſera le moment de la Lunule par rapport à AC.

Or le moment du demi-cercle ABC par rapport à AC eſt $\frac{2}{3}R^3$ par la Propoſition XLI, ôtant donc de ce moment celui de la Lunule, le reſte $\frac{2}{3}R^3 - \frac{1}{4}PR^2 + R^3 = \frac{5}{3}R^3 - \frac{1}{4}PR^2$ ſera le moment du ſegment ADC autour de AC.

Donc le moment de la Lunule eſt à celui du demi-cercle comme $\frac{1}{4}PR^2 - R^3$ à $\frac{2}{3}R^3$, ou comme $\frac{1}{4}P - R$ à $\frac{2}{3}R$, & ce moment eſt à celui du ſegment ADC comme $\frac{1}{4}PR^2 - R^3$ à $\frac{5}{3}R^3 - \frac{1}{4}PR^2$ ou comme $\frac{1}{4}P - R$ à $\frac{5}{3}R - \frac{1}{4}P$.

Si l'on conçoit que le triangle APC tourne autour de AC, ſon moment ſera $\frac{1}{3}R^3$, à cauſe que la diſtance de ſon centre de gravité à la droite AC eſt $\frac{1}{3}R$, & que ſa grandeur eſt RR; donc ce moment eſt à celui du demi-cercle ABC comme 1 à 2; donc le Rhombe décrit par la circonvolution du triangle autour de AC

eſt à la ſphere circonſcrite ou à la ſphere que décrit le demi-cercle ABC comme 1 à 2.

COROLLAIRE VIII.

151. La diſtance ZO étant $\frac{1}{4}$P — R, ſi du rayon BO = R on ôte cette diſtance, le reſte R — $\frac{1}{4}$P + R = 2R — $\frac{1}{4}$P ſera la diſtance du centre de gravité de la Lunule à la droite HR, multipliant donc ſa valeur RR par cette diſtance, le produit $2R^3 - \frac{1}{4}PR^2$ ſera le moment de la Lunule par rapport à HR.

Or par la Propoſition XLI. le moment du demi-cercle ABC par rapport à HR eſt $\frac{1}{4}PR^2 - \frac{2}{3}R^3$, ôtant donc de ce moment celui de la Lunule, le reſte $\frac{1}{4}PR^2 - \frac{2}{3}R^3 - 2R^3 + \frac{1}{4}PR^2 = \frac{1}{2}PR^2 - \frac{8}{3}R^3$, ſera le moment du ſegment ADC par rapport à HR.

COROLLAIRE IX.

152. Le centre Z étant ſur le diametre PB parallele à Rr, la diſtance de ce centre à cette droite eſt égale au rayon R, donc le moment de la Lunule par rapport à Rr eſt R^3 & par conſéquent ce moment eſt égal au cube du rayon. Ainſi nous avons non-ſeulement la quadrature de la Lunule, mais encore la cubature de l'un de ſes momens.

Or le moment du demi-cercle ABC par rapport à Rr, eſt par la Propoſition XLI. $\frac{1}{4}PR^2$, ôtant donc de ce moment celui de la Lunule, le reſte $\frac{1}{4}PR^2 - R^3$ ſera le moment du ſegment ADC par rapport à Rr.

COROLLAIRE X.

153. Le moment du triangle APC par rapport à AC eſt $\frac{1}{3}R^3$ (*N.* 150.), donc le moment de la Lunule par rapport à Rr eſt au moment du triangle par rapport à AC, comme R^3 à $\frac{1}{3}R^3$ ou comme 3 à 1, or le moment du triangle par rapport à AC eſt à celui du demi-cercle ABC par rapport à la même AC comme 1 à 2 (*N.* 150.), donc le moment de la Lunule par rapport à Rr, eſt au moment du demi-cercle par rapport à AC comme 3 à 2, & par conſéquent le ſolide de la Lunule autour de Rr, eſt à la ſphere comme 3 à 2.

COROLLAIRE XI.

154. Pour trouver le moment de la demi-Lunule ABD autour du diametre BP, on prendra d'abord le moment du quart

de cercle ABO par rapport à BO qui est $\frac{1}{3}R^3$ par la Proposition XLI. ensuite le moment du triangle AOP en cette sorte: du sommet P tirez la droite PX sur le milieu X de sa base AO, prenez les deux tiers de cette ligne de P en Q, & le point Q sera le centre de gravité du triangle; du point Q tirez la perpendiculaire Qa, & cette perpendiculaire qui est la distance du centre Q au diametre BP, sera les deux tiers de XO ou le tiers du rayon à cause des triangles semblables PXO, PQa. C'est pourquoi multipliant la grandeur $\frac{1}{2}RR$ du triangle par la distance $\frac{1}{3}R$, le produit $\frac{1}{6}R^3$ sera le moment du triangle par rapport au diametre BP, & ajoûtant ce moment à celui du demi-cercle ABO, la somme $\frac{1}{3}R^3 + \frac{1}{6}R^3 = \frac{1}{2}R^3$ sera le moment du secteur ABP dont le sommet P est à la circonference.

Maintenant le moment du secteur ADP par rapport à BP est $\frac{1}{3}uR^2$ par la Proposition XLI. & dans cette expression la lettre u marque le sinus verse DO, & le quarré R^2 est le quarré du rayon AP. Or le sinus verse DO étant égal au rayon DP moins le rayon OD, vaut $\sqrt{2R^2} - R$, & multipliant par le quarré du rayon AP, c'est-à-dire, par $2R^2$ le produit $2R^2\sqrt{2R^2} - 2R^3$ divisé par 3, ou $\frac{2R^2\sqrt{2R^2} - 2R^3}{3}$ sera le moment du secteur ADP par rapport au diametre BP; ôtant donc ce moment de celui du secteur ABP, le reste $\frac{1}{2}R^3 - \frac{2R^2\sqrt{2R^2} + 2R^3}{3} = \frac{7}{6}R^3$ $- \frac{4}{6}R^2\sqrt{2R^2}$ sera le moment de la demi-Lunule par rapport au diametre BP. Divisant donc ce moment par $\frac{1}{2}RR$ ou par $\frac{1}{2}R^2$ qui est la valeur de la demi-Lunule, le quotient $\frac{7}{3}R - \frac{4}{3}\sqrt{2R^2}$ sera la distance du centre de gravité de la demi-Lunule au diametre BP, & la distance de ce centre à la droite Sr ou à la droite AR sera la même que celle du centre de gravité de la Lunule entiere. Prenant donc les $\frac{7}{3}$ du rayon AO, & en retranchant les $\frac{4}{3}$ du rayon AP, le reste sera la distance cherchée.

COROLLAIRE XII.

155. Nous avons enseigné dans la *Theorie & pratique des Geometres*, après Wisthon dans ses Commentaires sur la Geometrie du pere Tacquet, de quelle maniere on pouvoit diviser une Lunule en autant de parties qu'on voudra, égales ou en raison donnée, & nous allons montrer ici comment on peut trouver les centres de gravité de chacune de ces parties.

Soit donc la demi-Lunule BCD (*Fig.* 96.) partagée en trois parties égales par les droites *pm*, *qn*, lesquelles étant prolongées, vont aboutir au sommet P du diametre, ainsi que nous l'avons enseigné dans l'Ouvrage cité. Tirez la droite *po*, & cherchez le moment du secteur BO*p*, par rapport au diametre BP, ajoutez-y le moment du triangle OP*p*, par rapport au même diametre, & la somme sera le moment du secteur BP*p*. Cherchez aussi le moment du secteur DP*m* par rapport au diametre, & le retranchant du moment du secteur BP*p*, le reste sera le moment de la portion BD*mp* de la demi-Lunule, divisant donc ce moment par la grandeur de cette portion, le quotient sera la distance du centre de gravité de la portion au diametre, & retranchant du moment de la demi-Lunule le moment de la portion BD*mp*, le reste sera le moment de la portion restante *p*C*m*, dont vous trouverez aisément la distance du centre de gravité au diametre.

Pour trouver de même les distances des centres de gravité de chaque portion restante en particulier, vous chercherez le moment de la portion BD*nq* de la même façon, & de ce moment retranchant le moment de la portion BD*mp*, le reste sera le moment de la portion *mpqn*, & ce moment divisé par la grandeur de cette portion vous donnera la distance de son centre de gravité au diamétre.

Et pour avoir la distance du centre de gravité de la troisiéme portion *nq*C, vous retrancherez du moment de la demi-lunule, le moment de la portion BD*nq*, & le reste sera le moment de la portion *nq*C, dont vous trouverez par conséquent la distance de même que ci-dessus.

Et pour déterminer la position de ces centres de gravité, vous ferez les mêmes opérations, en cherchant les momens par rapport à la droite *Sr*, ce qui vous donnera les distances des centres de gravité à la droite *Sr*. Ainsi mettant sur *Sr* ou P*r* les distances trouvées par rapport au diametre, & tirant des points de division des paralleles au diamétre, puis marquant sur *r*R les distances trouvées par rapport à S*r*, & tirant des points de division des paralleles à *Sr*, l'intersection de ces paralleles & des précédentes, déterminera la position des centres de gravité.

Je ne donne point le calcul de tout ceci de peur de rendre cet ouvrage trop long, mais si l'on a bien compris tout ce qui a été dit ci-dessus, on en viendra facilement à bout.

Les figures 96, 98, 99, représentent les momens de la lunule dont nous venons de parler.

CHAPITRE VIII.

Des Centres de gravité de la figure des sinus verses, & de celles des sinus droits, & des momens de ces deux figures par rapport à différens axes de mouvement.

DEFINITION.

156. SI après avoir divisé une circonférence de cercle en plusieurs parties égales (*Fig.* 100.) & tiré les sinus XO, BV, &c. on prend une ligne droite *tda* égale à la demi-circonférence & partagée en un même nombre de parties, & que sur les points de division on éleve des perpendiculaires égales aux sinus XO, BV, &c. par l'extrémité desquelles on fasse passer une courbe *tca*, l'espace *tca* compris entre la courbe *tca* & la droite *tda*, s'appellera *Figure des sinus droits* des arcs du demi-cercle arithmétiquement proportionnels, comme nous avons dit plus haut.

Et si sur cette même droite *ta*, mais de l'autre côté on éleve des perpendiculaires égales aux sinus verses AO, AV, AC, &c. des arcs arithmétiquement proportionnels, & qu'on fasse passer une courbe AD*t* par l'extrémité de ces perpendiculaires, la figure AD*ta* que ces perpendiculaires rempliront s'appellera *Figure des sinus verses* des arcs arithmétiquement proportionnels.

Et si l'on divise la hauteur A*a* de cette figure en parties égales aux points V, C, V, & que par les points de division on tire les droites VB, CD, &c. paralleles à la base *tda*, les droites AV, AC, &c. seront des sinus verses arithmétiquement proportionnels, & les paralleles VB, CD, &c. seront les arcs de ces sinus, de sorte que si l'on conçoit ces paralleles infiniment proches les unes des autres, elles seront les Elémens de la figure AD*ta* qui prise en ce sens sera la *figure des arcs* de demi-cercle correspondans aux sinus verses arithmétiquement proportionnels.

157. Si de tous les points de division de la demi-circonférence AD*a*, on tire des droites X*a*, B*a*, D*a*, &c. à l'extremité

du diamétre A*a*, on aura des triangles OX*a*, NB*a*, MD*a*, &c. inscrits au demi-cercle ; & si l'on prolonge les sinus jusqu'à la rencontre des cordes inférieures, on aura d'autres triangles AQ*a*, XI*a*, BY*a*, &c. circonscrits au demi-cercle.

Il est aisé de voir que dans la figure des sinus verses AD*ta*, on peut avoir des rectangles inscrits *ao*Xz, *zn*B*b*, B*m*D*d*, &c. qui seront en même nombre que les triangles inscrits dans le demi-cercle, & des rectangles circonscrits *a*AQz, zXI*b*, *b*BY*d*, &c. qui seront aussi en même nombre que les triangles circonscrits au demi-cercle.

158. *Les bases* XO, NB, MD, &c. *des triangles inscrits au demi-cercle sont moindres chacune que les arcs correspondans* XA, BX, DB, &c. cela est évident par rapport à la premiere base XO, laquelle étant le sinus de l'arc XA est par conséquent moindre que cet arc ; & quant aux autres si l'on tire la corde BX, on trouvera que dans le triangle BXN, l'angle BXN vaut la moitié de l'arc B*a*, à cause que son sommet est à la circonférence, & que l'angle BNX ayant son sommet entre la circonférence & le cercle, vaut la moitié de l'arc BX, plus la moitié de l'arc *a*P, ainsi que nous l'avons démontré dans *la Theorie & Pratique des Géométres.* Mais l'arc *a*P est égal à l'arc B*a*, donc l'angle BNX vaut la moitié de l'arc BX, plus la moitié de l'arc B*a*, donc il est plus grand que l'angle BXN qui ne vaut que la moitié de l'arc B*a*. Mais dans les triangles, les plus grands côtés sont opposés aux plus grands angles, donc la corde BX opposée à l'angle BNX est plus grande que le côté BN opposé à l'angle BXN, or la corde BX est moindre que son arc BX, donc BN est encore moindre que l'arc BX, & ainsi des autres.

159. *Les bases* AQ, IX, YB, &c. *des triangles circonscrits au demi-cercle sont chacune plus grandes que les arcs correspondans* AX, BX, &c.

Divisez l'arc XA en deux parties égales, & du centre C tirez la droite CS qui passe par le point de division, cette droite CS sera parallelle à Q*a*, à cause que l'angle X*a*A étant à la circonférence, vaut la moitié de l'arc XA, & que l'angle SCA étant au centre, vaut aussi la moitié du même arc, parce qu'il n'en embrasse que la moitié ; d'où il suit que ces deux angles sont égaux, & que les droites SC, Q*a* sont également inclinées sur A*a*, & par conséquent paralleles entr'elles. Donc à cause des triangles semblables Q*a*A, SCA, on aura A*a*, AC :: AQ,

AS; mais Aa est double de AC, donc AQ est aussi double de AS; or AS étant la tangente de l'arc, Ah est plus grande que cet arc, ainsi qu'il est démontré dans les Elemens; donc le double de AS ou la base AQ est plus grande que le double de l'arc Ah, ou que l'arc AX.

Par rapport aux autres bases du point B, tirez la tangente BH; l'angle HBA du segment BA vaut la moitié de l'arc BA, & dans le triangle rectangle IaO, l'angle IaO à la circonférence vaut aussi la moitié de cet arc, donc ces deux angles sont égaux, & par conséquent leurs complemens a 90 dégrés; c'est-à-dire l'angle HBI & l'angle aIO sont aussi égaux; donc le triangle HBI est isoscele, & HI est égal à BH, mais BH+HX est plus grand que l'arc BX, que BH, XH renferment; donc HI + HX, ou la base IX est aussi plus grande que l'arc BX, & de même des autres.

PROPOSITION XLIV.

160. *Trouver la grandeur de la figure* AD*ta des sinus verses, & celle de ses parties* (Fig. 100.).

Ayant divisé la demi-circonférence ADa en parties égales, inscrivez & circonscrivez des triangles comme il vient d'être dit, ensuite divisez la base *tda* de la figure des sinus verses en un même nombre de parties égales, & inscrivez & circonscrivez des rectangles dans cette figure en coupant la droite Aa en même raison que le diamétre Aa du demi-cercle.

Les triangles inscrits dans le demi-cercle, & les rectangles inscrits dans la figure des sinus auront les hauteurs égales; car de part & d'autre ces hauteurs sont égales aux sinus verses aO, aV, aC, &c. Or les bases des rectangles étant égales aux arcs AX, XB, &c. sont plus grandes que les bases des triangles, donc chaque rectangle est plus que double de chaque triangle correspondant.

De même, les triangles & les rectangles circonscrits ont les hauteurs égales, mais les bases des triangles étant plus grandes que les arcs correspondans, sont par conséquent plus grandes que celles des rectangles; donc chaque rectangle est moins que double de chaque triangle.

Or si l'on inscrit & l'on circonscrit un plus grand nombre de triangles au demi-cercle, & un plus grand nombre de rectangles à la figure, la différence des triangles inscrits aux circonscrits, diminuera de plus en plus de même que la différence des rectangles

inscrits aux circonscrits, & jamais cependant les rectangles inscrits ne seront moins que doubles des triangles inscrits, ni les rectangles circonscrits plus que doubles des triangles circonscrits; donc quand le nombre des inscrits & circonscrits de part & d'autre sera infini, la différence des inscrits aux circonscrits deviendra infiniment petite ou nulle, & les rectangles seront doubles des triangles. Mais la somme infinie des triangles est la même chose que le demi-cercle AD*a*, & la somme infinie des rectangles ne différe point de la figure AD*ta*; donc la figure AD*ta* des sinus verses est double du demi-cercle.

On prouvera de la même façon que la partie *b*BA*a* de la figure est double du secteur B*a*A du demi-cercle, que la partie *d*DA*a* est double du secteur D*a*A, & ainsi des autres. De même la partie *d*D*t* est double du segment D*a*D, la partie B*bt* est double du segment B*a*B, &c. Il est clair que le rectangle A*at*T est coupé par la courbe AD*t* en deux parties égales & semblables; donc la partie extérieure BKA est égale à la partie intérieure B*bt* du côté de *t*, & par conséquent double du segment B*a*, ou du segment BA égal à B*a*, & ainsi des autres.

Maintenant pour exprimer ces grandeurs algébriquement; nous sçavons par la Proposition XLI que la grandeur du demi-cercle est $\frac{1}{4}$RP; donc la grandeur de la figure des sinus sera $\frac{2}{4}$RP, ou $\frac{1}{2}$RP. En nous servant toujours des mêmes dénominations de la Proposition citée,

Le secteur B*a*A est $\frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}sR = \frac{1}{2}fR$; donc la partie correspondante *b*BA*a*, est $aR + sR = fR$,

Le segment ABA est $\frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR = \frac{1}{2}eR$; donc la portion extérieure BKA est $aR - sR = eR$,

Le segment B*a*B est $\frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR = \frac{1}{4}PR - \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR = \frac{1}{4}PR - \frac{1}{2}fR$; donc la portion B*bt* est $aR - sR = \frac{1}{2}PR - aR - sR = \frac{1}{2}PR - fR$.

Le rectangle *b*BV*a* est *ah*; donc si de la portion *b*BA*a*, on ôte le rectangle *b*BV*a*, le reste BVA sera $aR + sR - ah = aR + sR - 2aR + au = - aR + sR + au = - eR + au$.

Mais quant à la portion DCA en particulier, comme alors $a = \frac{1}{4}P$, $s = R$, & $u = R$, la valeur de cette portion est $- \frac{1}{4}PR + RR + \frac{1}{4}PR = RR$; & par conséquent cette portion est égale à la moitié *adc* de la figure des sinus droits (*N.* 127.)

Le rectangle *bm*C*a* est *a*R, ôtant donc ce rectangle de la portion *b*BA*a*, le reste *m*BAC sera $aR + sR - aR = sR$.

Donc

Donc si de la portion DAC, on ôte la portion *m*BAC, le reste D*m*B sera $R^2 - sR$; or comme $R - s$ qui est la différence du rayon au sinus est égal au sinus verse D4 ou VC du complement DB de l'arc BA au quart de circonférence, il s'ensuit que la portion D*m*B est égale au produit du rayon par ce sinus verse, ainsi si ce sinus verse est x, la portion D*m*B sera $R^2 - sR = xR$.

PROPOSITION XLV.

161. *Trouver les centres de gravité de la Figure des sinus verses; de ses parties, & les momens par rapport aux axes de mouvement* TA, *ta*, T*t*, A*a*.

Concevons que le demi-cercle soit composé d'une infinité de triangles inscrits ou circonscrits, dont les droites X*a*, B*a*, D*a*, &c. representent les axes ou les lignes sur lesquelles sont les centres de gravité de ces triangles, & que la figure AD*ta* soit aussi composée d'une infinité de rectangles inscrits ou circonscrits dont les droites *z*X, *b*B, *d*D, &c. représentent les axes.

Les rectangles seront aux triangles comme 2 à 1, & la distance de leur centre de gravité à la droite *ta* sera à la distance du centre de gravité des triangles à la même droite *ta*, comme $\frac{1}{2}$ à $\frac{2}{3}$, ou comme 3 à 4. Car on sçait que le centre de gravité d'un rectangle est éloigné de sa base de la moitié de sa hauteur, & que le centre d'un triangle est éloigné de son sommet des deux tiers de sa hauteur; or les hauteurs sont égales de part & d'autre. Donc, &c. Mais les momens sont les produits des figures par les distances de leurs centres de gravité; donc les momens des rectangles seront aux momens des triangles comme les produits des rectangles par les distances de leurs centres aux produits des triangles par les distances de leurs centres, c'est-à-dire en raison composée de la raison 2, 1, qui est la raison des rectangles aux triangles, & de la raison 3, 4, qui est la raison des distances des centres de gravité ; or la raison composée de ces deux raisons est 6, 4, ou 3, 2, donc les momens des rectangles sont aux momens des triangles, comme 3 à 2. Mais la somme des rectangles est égale à la figure AD*ta*, & la somme des triangles est égale au demi-cercle, donc le moment de la figure des sinus verses par rapport à *ta*, est au moment du demi-cercle AD*a* par rapport à *ta*, comme 3 à 2. Puis donc que nous avons trouvé dans la Proposition XLI que le moment du demi-

cercle ADa par rapport à ta étoit $\frac{1}{4}R^2P$. Faisant cette analogie 2. 3 :: $\frac{1}{4}R^2P$, $\frac{3}{8}R^2P$, le moment de la figure ADta, par rapport à ta sera $\frac{1}{8}R^2P$, & divisant ce moment par la grandeur $\frac{1}{2}$PR de la figure, le quotient $\frac{6}{8}R = \frac{3}{4}R$ sera la distance du centre de gravité de la figure ADta à la droite ta. Donc sa distance à la droite TA sera $\frac{1}{4}R$, & par conséquent multipliant la grandeur $\frac{1}{2}$PR par $\frac{1}{4}$R, le produit $\frac{1}{8}PR^2$ sera le moment de la figure par rapport à TA.

Observez en passant que les Elemens de la Figure ADta perpendiculaires à la base ta, composent la somme des sinus verses des arcs arithmétiquement proportionnels, ou la somme de tous les u, ou celles de tous les h ; car en prenant les sinus par le sommet A du diametre A du cercle, c'est-à-dire en prenant les sinus verses AO, AV, AC, &c. ces sinus seront égaux aux droites xF, bB, dD, &c. de la figure ADta, & par conséquent les Elemens de cette figure à commencer du côté de t, composent la figure des sinus verses des arcs arithmétiquement proportionnels, & en prenant les sinus par l'autre extremité a du diametre, c'est-à-dire en prenant les sinus aA, aO, aV, &c. les droites aA, zX, bB, &c. de la figure ADta sont égaux à ces sinus, & par conséquent les Elemens de cette figure, à commencer du côté de a composent la figure des sinus de complement des arcs arithmétiquement proportionnels ; or comme le moment de la figure, ou la somme des momens de ses Elemens par rapport à ta, est une somme de triangles rectangles isosceles dans chacun desquels la base est un des Elemens, il s'ensuit que la somme de ces momens n'est que la moitié de la somme des quarrés des Elemens, car chaque quarré est double du triangle rectangle correspondant ; donc si l'on fait les quarrés des sinus verses des arcs arithmétiquement proportionnels d'un demi-cercle, cette somme qui est ou tous les u^2, ou tous les h^2 sera double de $\frac{1}{8}R^2P$, ou bien la moitié de tous les u^2, ou de tous les h^2 sera égale à $\frac{1}{8}R^2P$.

Le moment du secteur BaA par rapport à ta, est $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{2}{6}sR^2 - \frac{1}{2}suR = \frac{1}{2}fR^2 + \frac{1}{6}shR$; donc faisant cette analogie, 2, 3 :: $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{2}{6}sR^2 - \frac{1}{2}suR$. $\frac{3}{4}aR^2 + \frac{2}{4}sR^2 - \frac{3}{4}suR$, le moment de la portion bBAa par rapport à ta sera $\frac{3}{4}aR^2 + \frac{2}{4}sR^2 - \frac{3}{4}suR = \frac{3}{4}fR^2 + \frac{1}{4}shR$, divisant donc ce moment par la grandeur $aR + sR = fR$ de la portion, le quotient $\frac{3}{4}R + \frac{sh}{4f}$

sera la distance du centre de gravité de la portion $bBAa$ à la droite ta. Donc la distance de ce centre à la droite TA sera $2R - \frac{3}{4}R - \frac{sh}{4f} = \frac{5}{4}R - \frac{sh}{4f}$, & multipliant la grandeur fR par la distance $\frac{5}{4}R - \frac{sh}{4f}$, le produit $\frac{5}{4}fR^2 - \frac{1}{4}shR = \frac{5}{4}aR^2 + \frac{3}{4}sR^2 + \frac{1}{4}suR$ sera le moment de la portion $bBAa$ par rapport à TA.

Le moment du segment ABA par rapport à TA est $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}suR = \frac{1}{2}eR^2 - \frac{1}{6}suR$; faisant donc la même analogie, le moment de la partie extérieure BKA par rapport à TA sera $\frac{3}{4}aR^2 - \frac{3}{4}sR^2 - \frac{1}{4}suR = \frac{3}{4}eR^2 - \frac{1}{4}suR$, & divisant ce moment par la grandeur eR de cette portion, le quotient $\frac{3}{4}R - \frac{su}{4e}$ sera la distance de son centre de gravité à la droite TA; donc sa distance à la droite ta sera $\frac{5}{4}R + \frac{su}{4e}$, & cette distance multipliée par la grandeur eR donnera $\frac{5}{4}eR^2 + \frac{1}{4}suR$ pour le moment de la même partie par rapport à ta.

J'ai commencé à chercher le moment de cette partie BKA par rapport à TA plutôt que par rapport à ta, parce que cette partie est extérieure & appartient à la figure oposée ADtT, & non pas à la figure ADta. D'ailleurs les triangles infiniment petits qui remplissent le secteur ABA, & dont les rectangles infiniment petits de la portion BKA sont doubles ont leur sommet au point A, & non pas au point a comme ceux dont nous avons parlé ci-dessus.

Le moment du segment Ba par rapport à ta est $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}shR$; faisant donc la même analogie, le moment de la portion tbB, par rapport à ta sera $\frac{3}{4}aR^2 - \frac{3}{4}sR^2 - \frac{1}{4}shR$, & divisant ce moment par la grandeur $aR - sR$ de cette portion, le quotient $\frac{3}{4}R - \frac{sh}{4a - 4s}$ sera la distance du centre de gravité de la portion tbB à la base ta, donc sa distance à la droite TA sera $\frac{5}{4}R + \frac{sh}{4a - 4s}$, & multipliant cette distance par la grandeur $aR - sR$, le produit $\frac{5}{4}aR^2 - \frac{5}{4}sR^2 + \frac{1}{4}shR$ sera le moment de la portion tbB par rapport à TA.

Si du moment de la portion $bBAa$ par rapport à ta, on ôte le moment du rectangle $bBVa$, le reste sera le moment de la portion BVA par rapport à ta. Or le rectangle $bBVa$ est ah, & la distance de son centre à la droite ta est $\frac{1}{2}h$, & à la droite TA; $2R - \frac{1}{2}h$, donc le moment du rectangle par rapport à ta

est $\frac{1}{2}ah^2 = 2aR^2 - 2auR + \frac{1}{2}au^2 = 2aR^2 - auR - \frac{1}{2}as^2$, & par rapport à TA, son moment est $2ahR - \frac{1}{2}ah^2 = 2aR^2 - \frac{1}{2}au^2 = 2aR^2 - auR + \frac{1}{2}as^2$.

Otant donc du moment de la portion $bBAa$ par rapport à ta, le moment du rectangle $bBVa$, le reste $-\frac{5}{4}aR^2 + \frac{5}{4}sR^2 + auR - \frac{1}{4}suR + \frac{1}{2}as^2$ sera le moment de la portion BVA par rapport à ta, & de même ôtant du moment de la portion $bBAa$ par rapport à TA celui du rectangle $bBVa$, le reste $-\frac{3}{4}aR^2 + \frac{3}{4}sR^2 + auR + \frac{1}{4}suR - \frac{1}{2}as^2$ sera le moment de la portion BVA par rapport à ta, & divisant ces deux momens par la grandeur $-aR + sR + au$ de cette portion, le premier quotient $\frac{5}{4}R - \frac{suR + 2as^2}{4sR + 4au}$ sera la distance du centre de gravité de la portion BVA à la droite ta, & le second quotient $\frac{3}{4}R + \frac{suR - 2as^2}{-4sR + 4au}$ sera la distance de ce même centre à la droite TA.

Quand l'arc BA du secteur BaA devient égal au quart de la circonférence, alors nous avons $a = \frac{1}{4}P$, $s = u = R$, substituant donc ces valeurs dans le moment du secteur par rapport à ta, qui est $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{5}{6}sR^2 - \frac{1}{6}suR$, nous aurons $\frac{1}{8}PR^2 + \frac{5}{6}R^3 - \frac{1}{6}R^3 = \frac{1}{8}PR^2 + \frac{2}{3}R^3$, & faisant l'analogie ordinaire, le moment de la portion $dDAa$ sera $\frac{3}{16}PR^2 + R^3$.

Or le rectangle $dDCa$ est $\frac{1}{4}PR$, & son moment par rapport à ta est $\frac{1}{8}PR^2 = \frac{2}{16}PR^2$. Retranchant donc ce moment du moment $\frac{3}{16}PR^2 + R^3$, le reste $\frac{1}{16}PR^2 + R^3$ sera le moment de la portion DAC par rapport à ta. Et divisant ce moment par la grandeur RR de cette portion, le quotient $\frac{1}{16}P + R$ sera la distance du centre de gravité de la portion DAC par rapport à ta. Donc sa distance par rapport à TA sera $R - \frac{1}{16}P$, & son moment $R^3 - \frac{1}{16}PR^2$.

Et si de la distance $\frac{1}{16}P + R$ nous retranchons R, le reste $\frac{1}{16}P$ sera la distance du centre de gravité de la portion DCA à la droite DC, & par conséquent le moment de cette portion par rapport à DC sera $\frac{1}{16}PR^2$.

Les momens de la figure $ADta$ & de ses portions par rapport à ta, TA, étant ainsi trouvés, il nous reste à chercher les momens de la même figure & de ses portions par rapport à Aa, Tt, pour pouvoir déterminer les centres de gravité. Et pour cela concevons que sur le point a soit élevé une perpendiculaire au plan $ADta$ égale à la droite ta, & que la figure $ADta$ se meuve toujours parallelement à elle-même le long de cette per-

pendiculaire, il se formera par ce mouvement un parallelepipede dont la base sera la figure AD*ta*, & la hauteur sera égale à la droite *ta*, & ce parallelepipede sera composé d'une infinité de plans paralleles égaux entr'eux & à la base AD*ta*. Concevons encore que ce parallelepipede soit coupé par un plan incliné de 45 dégrés sur la base & qui passe par la droite A*a*, le parallelepipede sera coupé en deux onglets dont le premier ou l'inférieur qui aura pour base la figure AD*ta* sera le moment de cette figure par rapport à A*a*, & l'autre qui aura pour base la face supérieure du parallelepipede sera le moment de la même figure AD*ta* par rapport à T*t*. Or la somme des plans paralleles à la base qui composent le premier onglet est égale à la somme des plans qui composent le parallelepipede moins la somme des plans qui composent le second onglet. Retranchant donc de la somme des plans qui composent le parallelepipede, la somme des plans qui composent le second onglet, le reste sera la valeur du premier onglet, ou le moment de la figure AD*ta* par rapport à A*a*.

Mais le parallelepipede étant composé de plans tous égaux entr'eux & à la base, sa valeur est $\frac{1}{4}$PPR, à cause que sa base est $\frac{1}{2}$PR, & sa hauteur $\frac{1}{2}$P. Et la somme des plans qui composent le second onglet est égale à la somme des plans *zx*A*a*, *b*B*a*, *d*DA*a*, *b*BA*a*, *x*FA*a*, *t*DA*a*, en supposant que les divisions de *ta* soient infiniment petites; or chacun de ces plans est *a*R + *s*R, donc la somme des plans qui composent le second onglet, est égale à la somme de tous les *a*R + *s*R dont le dernier est *t*DA*a* = $\frac{1}{2}$PR. Mais tous les *a* ou les arcs du demi-cercle AD*a* étant en progression arithmétique sont au dernier $\frac{1}{2}$P multiplié par le nombre des termes $\frac{1}{2}$P, comme 1 à 2; donc la somme de tous les *a* est $\frac{1}{8}P^2$, donc tous les *a*R sont égaux à $\frac{1}{8}P^2R$. De même tous les *s* ou la somme des sinus du demi-cercle, est égale à $2R^2$, comme il a été démontré ci-dessus, donc tous les *s*R sont égaux à $2R^3$; ainsi tous les *a*R + *s*R, ou tous les plans qui composent le second onglet sont ensemble égaux à $\frac{1}{8}P^2R + 2R^3$. Otant donc du parallelepipede $\frac{1}{4}P^2R$, le second onglet $\frac{1}{8}P^2R + 2R^3$, le reste $\frac{1}{8}P^2R - 2R^3$ sera le premier onglet ou le moment de la figure AD*ta* par rapport à A*a*, & divisant ce moment par la grandeur $\frac{1}{2}$PR de la figure, le quotient $\frac{1}{4}P - \frac{4R^2}{P}$ sera la distance du centre de gravité de la figure AD*ta*

à la droite Aa ; donc sa distance à la droite Tt sera $\frac{1}{4}P + \frac{4R^2}{P}$ & multipliant cette distance par la grandeur $\frac{1}{2}$PR, le produit $\frac{1}{8}P^2R + 2R^3$ sera le moment par rapport à Tt, ou le second onglet.

Concevons de même que sur le point a soit élevée une perpendiculaire égale à la droite ab, & que la portion bBAa se meuve toujours parallelement à elle-même le long de cette perpendiculaire, il se formera par ce mouvement un parallelepipede qui sera composé d'une infinité de plans égaux entr'eux, & à la portion bBAa. Concevons encore que ce parallelepipede soit coupé par un plan incliné de 45 dégrés & qui passe par la droite Aa, nous aurons deux onglets dont le premier ou l'inférieur qui aura pour base la portion bBAa sera le moment de cette portion par rapport à Aa, & le second qui aura pour base la face du parallelepipede opposée à bBAa sera le moment de la même portion par rapport à bB. Or la somme des plans qui composent le premier onglet sera égale à la somme des plans du parallelepipede moins la somme des plans du second onglet, c'est-à-dire moins la somme des plans zXAa, &c. jusqu'au dernier bBAa, ou de tous les aR + sR jusqu'au dernier qui est la portion bBAa que j'appellerai AR + SR.

Mais le parallelepipede ayant pour hauteur la droite ab = A, est $A^2R + ASR$, & quant à la somme des aR + sR qui composent le second onglet, premierement tous les a, c'est-à-dire les arcs arithmétiquement proportionnels jusqu'au dernier AB = A valent $\frac{1}{2}A^2$, & tous les s ou les sinus de ces arcs jusqu'au dernier SV = S valent uR, comme il a été démontré en parlant de la figure des sinus ; donc tous les aR + sR qui composent le second onglet, valent $\frac{1}{2}A^2R + uR^2$. Otant donc du parallelepipede $A^2R + ASR$ l'onglet $\frac{1}{2}A^2R + uR^2$, le reste $\frac{1}{2}A^2R + ASR - uR^2$, ou $\frac{1}{2}a^2R + asR - uR^2$, en remettant a au lieu de A, sera le premier onglet, ou le moment de la portion bBAa par rapport à Aa, & divisant ce moment par la grandeur aR + sR le quotient $\frac{a^2 + 2as - 2uR}{2a + 2s} = \frac{1}{2}a - \frac{2uR + as}{2a + 2s}$ sera la distance du centre de gravité de la portion bBAa par rapport à Aa ; & comme $ta = \frac{1}{2}P$, il s'ensuit que la distance de ce centre à la droite Tt est $\frac{1}{2}P - \frac{1}{2}a + \frac{2uR + as}{2a + 2s}$.

La portion bBt étant aR − sR, on démontrera de la même

façon que son moment par rapport à la droite Tt est $\frac{1}{2}a^2R - asR + hR^2$, & son onglet opposé ou qui acheveroit le parallelepipede de sa base $\frac{1}{2}a^2R - hR^2$, & divisant le moment $\frac{1}{2}a^2R - asR + hR^2$ par la grandeur $aR - sR$, le quotient $\frac{a^2 - 2as + 2hR}{2a - 2s}$ sera la distance du centre de gravité de la portion bBt par rapport à Tt, & par conséquent sa distance par rapport à Aa sera $\frac{1}{2}P - \frac{a^2 + 2as - 2hR}{2a - 2s}$.

La portion BKA étant $aR - sR$, on démontrera encore de la même façon que son moment par rapport à Aa est $\frac{1}{2}a^2R - asR + uR^2$, & l'onglet de complement au parallelepipede, $\frac{1}{2}a^2R - uR^2$; & que la distance du centre de gravité à la droite Aa, est $\frac{a^2 - 2as + 2uR}{2a - 2s}$, & à la droite Tt, $\frac{1}{2}P - \frac{a^2 + 2as - 2uR}{2a - 2s}$.

Le rectangle $bBVu$ est ah, & son moment par rapport à Aa est $\frac{1}{2}a^2h = a^2R - \frac{1}{2}a^2u$; ôtant donc ce moment de celui de la portion $bBAa$ par rapport à Aa, le reste $\frac{1}{2}a^2R + asR - uR^2 - a^2R + \frac{1}{2}a^2u = -\frac{1}{2}a^2R + asR - uR^2 + \frac{1}{2}a^2u$ sera le moment de la portion BAV par rapport à Aa, & divisant ce moment par la grandeur $-aR + sR + au$ de la portion BAV, le quotient $\frac{1}{2}a \frac{-2uR + as}{-aR + sR + au}$ sera la distance du centre de gravité de cette portion à la droite Aa, & sa distance à la droite Tt $\frac{1}{2}P - \frac{1}{2}a + \frac{2uR - as}{-aR + sR + au}$. L'onglet du complement au parallelepipede sera $-\frac{1}{2}a^2R + uR^2 + \frac{1}{2}a^2u$.

Si nous supposons que la portion BAV soit la portion DAC, & que la portion $bBAa$ soit la portion $dDAa$, alors nous aurons $a = \frac{1}{4}P$, $s = u = R$; substituant donc ces valeurs dans le moment $-\frac{1}{2}a^2R + asR - uR^2 + \frac{1}{2}a^2u$, nous aurons $\frac{1}{4}PR^2 - R^3$ pour le moment de la portion DAC par rapport à Aa, & divisant ce moment par la grandeur RR, le quotient $\frac{1}{4}P - R$ sera la distance de son centre de gravité à la droite Aa, d'où il suit que sa distance à la droite Tt sera $\frac{1}{4}P + R$, & comme CD $= \frac{1}{4}P$, il s'ensuit encore que la distance de ce centre à la droite dDK est R, & le moment de la portion DAC par rapport à cette droite est R^3.

PROPOSITION XLVI.

162. *Trouver les momens de la figure ate des sinus droits, & les momens de ses parties par rapport aux droites at, aA, &c.* (Fig. 100).

La figure *tac* étant égale au double du quarré du rayon (*N.* 127.) vaut $2R^2$, & comme son moment par rapport à *ta* est un onglet composé de triangles rectangles isoscelès dont les bases sont les sinus *zr*, *br*, &c. & que par conséquent chaque triangle est égal à la moitié du quarré de sa base, il s'ensuit que le moment de la figure *tac* est égal à la moitié de la somme des quarrés des sinus des arcs arithmétiquement proportionnels du demi-cercle AD*a*. Or la somme des quarrés des sinus est égale au demi-cercle AD*a* multiplié par le rayon (*N.* 126.) dont cette somme est $\frac{1}{4}PR^2$, & sa moitié ou le moment de la figure *tac* par rapport à *ta* est $\frac{1}{8}PR^2$. Divisant donc ce moment par la grandeur $2R^2$, le quotient $\frac{1}{16}P$ sera la distance du centre de gravité de la figure *tac* à la droite *ta*, & par conséquent sa distance à la droite *mc* sera $R - \frac{1}{16}P$, & multipliant la grandeur $2R^2$ par cette distance le produit $2R^3 - \frac{1}{8}PR^2$ sera le moment par rapport à *mc*.

Donc le moment de la portion *dca* moitié de *tac* par rapport à *at* sera $\frac{1}{16}PR^2$, & par rapport à *mc*, $R^3 - \frac{1}{16}PR^2$.

La portion *bra* est *u*R (*N.* 127.) & son moment par rapport à *ta* est égal à la moitié de la somme des quarrés des sinus entre *a* & *br*. Or la somme des quarrés de ces sinus est égale la portion ABV du demi-cercle AB*a* multipliée par le rayon (*N.* 126); donc cette somme est $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}suR$, c'est-à-dire le demi-segment ABV $= \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR + \frac{1}{2}su$ multiplié par le rayon $= R$. Donc la moitié de cette somme ou le moment de la portion *bra* par rapport à *ta* est $\frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}suR$, & divisant ce moment par la grandeur *u*R, le quotient $\frac{aR - sR + su}{4u}$ sera la distance du centre de gravité de la portion *bra* à la droite *ta*; & par conséquent sa distance à la droite *mc* sera $R - \frac{aR + sR + su}{4u}$ & le moment de la portion par rapport à *mc*, sera $uR^2 - \frac{aR^2 + sR^2 - suR}{4}$. Et on trouvera de la même façon les momens des autres portions par rapport à *ta* ou à *mc*.

Maintenant pour trouver les momens par rapport à la droite *am*; nous trouverons d'abord que le centre de la figure *tac* doit être nécessairement sur la droite *dc* qui coupe ses Elemens paralleles à la base *ta* en deux parties égales, donc la distance de ce centre à la droite *am* étant égale à la droite *da* est $\frac{1}{4}P$. Multipliant donc la grandeur 2RR par $\frac{1}{4}P$, le produit $\frac{1}{2}PR^2$ sera

le

le moment de la figure *tac* par rapport à *am* ou à *tn*.

Et pour trouver le moment des autres parties, prenons la partie *abr*, & concevons que sur le point *a* soit élevée une perpendiculaire égale à *ab*, & que la portion *abr* se meuve parallelement à elle-même le long de cette perpendiculaire, il se formera par ce mouvement un prisme dont la base sera la portion *abr*, & la hauteur sera égale à la droite *ab*. Concevons encore que ce Prisme soit coupé par un plan incliné de 45 dégrés, & qui passe par la droite *am*; nous aurons deux onglets dont le premier ou l'inférieur qui aura pour base la portion *abr*, sera le moment de cette portion par rapport à la droite *am*, & le second qui aura pour base la face du parallelepipede opposée à la portion *abr*, sera le moment de cette même portion par rapport à la droite *br*; or coupant ce second onglet par des plans paralleles à la base, ces plans seront égaux chacun à chacun aux plans *azr*, &c. jusqu'au dernier *abr*, nous supposons *ba* divisée en parties infiniment petites & égales, & que par conséquent la portion *abr*, est composée d'une infinité de droites *zr*, &c. Or tous les *azr*, &c. jusqu'au dernier *abr* sont égaux à tous les uR, c'est-à-dire à tous les sinus verses AO, &c. jusqu'au dernier AV du segment ABV, multipliés par le rayon R (*N*. 127.), & la somme de tous les AO, &c. jusqu'au dernier AV est égale à la portion BKA de la figure AD*ta*; car chaque Element de cette portion est égale au diametre A*a*, moins la droite correspondante *a*O, &c. Puis donc que nous avons trouvé $BKA = aR - sR$ (*N*. 160), multipliant cette grandeur par R, le produit $aR^2 - sR^2$ sera le second onglet ou le moment de la partie *abr* par rapport à *br*. Divisant donc ce moment par la grandeur uR de cette partie le quotient $\frac{aR - sR}{u}$ sera la distance du centre de gravité de la portion *abr* à la droite *br*, donc sa distance à la droite *am* sera $a - \frac{aR + sR}{u}$ & le moment de la portion *bra* par rapport à cette droite sera $auR - aR^2 + sR^2$; donc aussi la distance de son centre de gravité à la droite *tn* sera $\frac{1}{2}P - a + \frac{aR - sR}{u}$, & le moment de la portion par rapport à *tn* sera $\frac{1}{2}uPR - auR + aR^2 - sR^2$.

Et si nous supposons que *br* soit *dc*, & que *ba* soit *da*, alors nous aurons $a = \frac{1}{4}P$, & $s = u = R$; ainsi substituant ces valeurs, le moment de la portion *adc* par rapport à la droite *dc* sera $\frac{1}{4}R^2P - R^3$, par rapport à *am*, $\frac{1}{4}PR^2 - \frac{1}{4}PR^2 + R^3 = R^3$; & par

rapport à *tn*, $\frac{1}{2}PR^2 - \frac{1}{4}PR^2 + \frac{1}{4}PR^2 - R^3 = \frac{1}{2}PR^2 - R^3$; & divisant ces momens par la grandeur R^2, le quotient $\frac{1}{4}P - R$ sera la distance du centre de gravité de la portion *adc* à la droite *dc*, le quotient R sera la distance à la droite *am*, & le quotient $\frac{1}{2}P - R$ la distance à la droite *tn*.

On trouvera de la même façon que le moment de la portion *tbr* par rapport à *tn*, est $ahR - aR^2 + sR^2$, & que ce moment par rapport à *am* est $\frac{1}{2}hPR - ahR + aR^2 - sR^2$, & par rapport à *br* $aR^2 - sR^2$.

COROLLAIRE I.

163. Si l'on multiplie les Elemens du rectangle A*at*T perpendiculaires à la base *ta* (*Fig.* 100.) par les Elemens de la figure *atc* des sinus droits pris aussi perpendiculairement sur la même base *ta*, on aura un solide represénté par la figure 105, lequel sera coupé en deux autres solides égaux entr'eux, si sur tous les points de la courbe AD*t* on éleve des perpendiculaires sur la base jusqu'à la rencontre de la surface courbe de ce solide; or je dis que le solide fait sur AD*ta*, ou sur AD*t*T est triple du moment du demi-cercle AD*a* par rapport au diametre A*a*.

Pour le démontrer, considérons que les rectangles infiniment petits inscrits ou circonscrits à la figure AD*ta*, ainsi qu'il a été dit plus haut, sont aux triangles infiniment petits inscrits ou circonscrits au demi-cercle, comme 2 à 1, & que le solide dont nous parlons n'est autre chose que la somme de ces petits rectangles, c'est-à-dire des droites *xz*, B*b*, D*d*, &c. multipliées chacune par son sinus correspondant *zr*, *br*, &c. de même que le moment du demi-cercle par rapport à A*a* n'est autre chose que la somme des petits triangles ou des droites X*a*, B*a*, D*a*, &c. multipliées chacune par la distance de son centre de gravité au diametre A*a*. Or les distances des centres de gravité de ces petits triangles sont éloignées du point *a* de $\frac{2}{3}$ de X*a*, B*a*, D*a*, &c. & par conséquent les distances de ces mêmes centres au diamétre A*a*, sont $\frac{2}{3}$XO, $\frac{2}{3}$BV, $\frac{2}{3}$DC, &c. ou $\frac{2}{3}zr$, $\frac{2}{3}br$, $\frac{2}{3}dc$, &c. Si nous appellons donc *p* chaque rectangle de la figure AD*ta*, & *n* chaque sinus *zr*, *br*, &c. le solide fait sur la figure AD*ta* sera la somme des *pn*. Or chaque triangle étant la la moitié de chaque rectangle sera $\frac{1}{2}p$, & la distance de son centre de gravité au diametre A*a* sera $\frac{2}{3}n$, donc le moment du demi-cercle par rapport à A*a* sera la somme de tous les $\frac{2}{6}pn$,

ou $\frac{1}{3}pn$; donc ce moment ſera au ſolide fait ſur la figure ADta, comme $\frac{1}{3}pn$ à pn, ou comme $\frac{1}{3}$ à 1, ou comme 1 à 3.

Et ceci doit s'entendre auſſi des parties correſpondantes du ſolide & de l'onglet, c'eſt-à-dire, la partie du ſolide qui aura la portion bBAa pour baſe, ſera triple du moment du ſecteur BaA, & ainſi des autres.

Or le moment du demi-cercle par rapport à Aa eſt $\frac{2}{3}R^3$, donc le ſolide fait ſur ADta eſt $2R^3$.

De même le moment du ſegment BaA eſt $\frac{1}{3}uR^2 + \frac{1}{6}s^2R$, donc la partie du ſolide qui a pour baſe la portion bBAa eſt $uR^2 + \frac{1}{2}s^2R$.

Le moment du ſegment Ba eſt $\frac{1}{6}h^2R$, donc la partie du ſolide qui a pour baſe la portion tbB eſt $\frac{1}{2}h^2R$, & par la même raiſon la partie du ſecond ſolide qui a pour baſe la portion BKA eſt $\frac{1}{2}u^2R$.

La partie du ſolide qui a pour baſe bBVa eſt le produit du plan bra par la droite aV, or le plan $bra = u$R, & la droite aV $= h$, dont cette partie du ſolide eſt uhR ou s^2R à cauſe que s eſt moyen proportionnel entre u & h; ôtant donc cette partie de la partie qui a pour baſe bBAa, le reſte $uR^2 - \frac{1}{2}s^2R$ ſera la valeur de la partie du ſolide qui a pour baſe la partie BAV, & mettant au lieu de s^2 ſa valeur $2uR - u^2$, nous aurons $uR^2 - uR^2 + \frac{1}{2}u^2R = \frac{1}{2}u^2R$ pour la valeur de la partie qui a pour baſe BAV, d'où il ſuit que cette partie eſt égale à celle qui a pour baſe BKA, & que par conſéquent les perpendiculaires élevées ſur la courbe BA coupent en deux parties égales la portion du ſolide fait ſur la partie BKAV, ce qui mérite d'être remarqué.

COROLLAIRE. II.

164. Les parties az, ab, ad, &c. de la droite at, ſont les arcs arithmetiquement proportionnels du demi-cercle ADa, les droites zr, br, dc, &c. ſont leurs ſinus droits, & les droites zX, bB, dD, &c. ſont les ſinus verſes des arcs de complement; or le ſolide fait ſur la figure ADta, eſt le produit des droites zX, bB, &c. par les droites zr, br, &c. donc ce ſolide eſt la ſomme de tous les ſinus droits multipliés par les ſinus verſes des complemens, c'eſt-à-dire de tous les sh du demi-cercle.

De même la partie de ce ſolide faite ſur la baſe bBAa, eſt la ſomme des ſinus droits depuis le ſommet A du demi cercle juſqu'au plus grand ſinus BV, multipliés par les ſinus verſes des

complemens, c'est-à-dire, la somme de tous les *sh* correspondans aux arcs arithmetiquement proportionnels dont le plus grand est AB, donc tous les *sh* du demi-cercle valent $2R^3$, & tous les *sh* de la portion BAV du demi cercle valent $uR^2 + \frac{1}{2}s^2R$ & ainsi des autres.

Mais si nous prenons le solide fait sur AD*t*T, alors il est visible que les Elemens de la base de ce solide multipliés par les droites *zr*, *br*, &c. sont les sinus verses des arcs arithmetiquement proportionnels, & par conséquent ce solide est la somme de tous les *su* du demi-cercle, donc tous les sinus des arcs arithmetiquement proportionnels multipliés par les sinus verses, sont aussi $2R^3$, & comme le solide fait sur la base BKA est $\frac{1}{2}u^2R$, il s'ensuit que les sinus droits de la portion ABV du cercle multipliés par les sinus verses de cette même portion, sont $\frac{1}{2}u^2R$, c'est-à-dire, la moitié du quarré du plus grand sinus verse AV multiplié par le rayon, & ainsi des autres.

Et ceci nous fait connoître dans le demi-cercle & dans ses parties, non-seulement la somme des sinus droits multipliés par les sinus verses des complemens, mais encore la somme des sinus droits multipliés par les sinus verses en supposant toujours les arcs arithmetiquement proportionnels.

COROLLAIRE III.

165. *La somme des arcs arithmetiquement proportionnels du demi-cercle multipliés chacun par son sinus verse est égale au moment* $\frac{1}{8}P^2R + 2R^3$ *de la figure* AD*ta par rapport à* T*t*.

Ce moment est un onglet dont le plan incliné passe par la droite T*t*; or si l'on coupe cet onglet par des plans paralleles à T*t* & perpendiculaires à la figure, il est visible que ces plans seront les produits des droites *tx*, *tb*, *td*, &c. par les droites F*x*, *b*B, *d*D, &c. Or les droites *tx*, *tb*, *td*, &c. sont les arcs arithmetiquement proportionnels du demi-cercle en commençant par le point *a* de ce demi-cercle, & les droites F*x*, *b*B, *d*D, &c. sont les sinus verses de ces arcs; donc si l'on conçoit que les plans coupans soient infiniment proches, la somme de ces plans ou l'onglet sera égale à la somme des arcs arithmetiquement proportionnels multipliés chacun par son sinus verse.

La somme des arcs arithmetiquement proportionnels du demi-cercle multipliés chacun par le sinus verse de son complement est égale au moment $\frac{1}{8}P^2R - 2R^3$ *de la figure* AD*ta par rapport à* A*a*.

Ce moment est un onglet dont le plan incliné de 45 dégrés passe par la droite A*a*, or si l'on coupe cet onglet par des paralleles à A*a*, & perpendiculaires à la base AD*ta*, ces plans seront les produits des droites *az*, *ab*, *ad*, &c. par les droites zX, *b*B, *d*D, &c. mais les droites *az*, *ab*, *ad*, &c. sont les arcs arithmetiquement proportionnels du demi-cercle AD*a* en commençant par A, & les droites zX, *b*B, *d*D, &c. sont les sinus verses de leur complement, donc si l'on conçoit que les plans soient en nombre infini, leur somme ou l'onglet sera égale à la somme des arcs arithmetiquement multipliés chacun par le sinus verse de son complement.

La somme des sinus verses arithmetiquement proportionnels du demi-cercle, multipliés chacun par son arc est égale au moment $\frac{1}{4}$R²P *de la figure* AD*ta par rapport à* TA.

Ce moment est un onglet dont le plan incliné passe par la droite TA; or si l'on coupe cet onglet par une infinité de plans paralleles à TA & perpendiculaires à la figure AD*ta*, ces plans seront les produits des droites AV, AC, &c. arithmetiquement proportionnelles par les droites VB, CD, &c. mais les droites AV, AC, &c. sont les sinus verses arithmetiquement proportionnels du demi-cercle, & les droites VB, CD, &c. sont les arcs correspondans, donc la somme des plans ou l'onglet est égale à la somme, &c.

La somme des sinus verses arithmetiquement proportionnels du demi-cercle multipliés chacun par l'arc de complement est égale au moment $\frac{1}{4}$ R²P *de la figure* AD*ta par rapport à ta*.

Le plan incliné de l'onglet qui représente ce moment passe par la droite *ta*; or si cet onglet est coupé par une infinité de plans paralles à *ta* perpendiculaires à la base, ces plans seront les produits des droites arithmetiquement proportionnelles *a*V, *a*C, &c. par les droites VB, CD, &c. mais les droites *a*V, *a*C, &c. sont les sinus verses arithmetiquement proportionnels du demi-cercle en commençant par *a*, & les droites VB, CD, &c. sont les arcs des complemens. Donc, &c.

Ce que nous venons de dire des onglets entiers doit s'entendre aussi de leurs parties; par exemple, si l'on veut sçavoir qu'elle est la somme de tous les arcs arithmetiquement proportionnels depuis le sommet A du demi-cercle jusqu'au plus grand AB, multipliés chacun par son sinus verse, on prendra dans le moment AD*ta* par rapport à T*t* la portion dont la base est *t*B*b*, ou

bien on prendra le moment de la figure BKA par rapport à A*a*, ce qui revient au même, & l'une & l'autre de ces parties sera la somme cherchée, & ainsi des autres.

La somme des arcs arithmetiquement proportionnels du demi-cercle multipliés chacun par son sinus droit, est égale au moment $\frac{1}{2}$ R^2P *de la figure tac des sinus droits par rapport à am ou à tn.*

Si l'on conçoit que l'onglet qui représente ce moment par rapport à *am*, soit coupé par une infinité de plans paralleles à *am* & perpendiculaires sur la figure, ces plans seront les produits des droits *az*, *ab*, *ad*, &c. par les droites *zr*, *br*, &c. c'est-à-dire, les produits des arcs arithmetiquement proportionnels par leurs sinus droits, donc, &c.

Si l'on fait sur *ta* un triangle rectangle isoscele *atn*, il est évident que les Elemens de ce triangle paralleles à *tn* seront les arcs arithmetiquement proportionnels du demi-cercle, multipliant donc chacun de ces Elemens par le sinus droit correspondant *zr*, *br*, &c. le solide qui en sera formé & qui est représenté en petit par la figure 106. sera égale au moment $\frac{1}{2}$ R^2P.

Si l'on coupe le solide représenté par la figure 105. &c. qui est fait par les produits des sinus verses zX, *b*B, &c. multipliez par les sinus droits, par une infinité de plans perpendiculaires à la base AD*ta* & paralleles à *ta*, les droites AV, AC seront les sinus verses arithmetiquement proportionels, & les droites VB, CD, &c. seront les arcs correspondans de ces sinus, & enfin les plans perpendiculaires sur ces droites seront égaux chacun à chacun aux parties correspondantes *azr*, *abr*, &c. de la figure des sinus droits, en observant que les côtés *az*, *ab*, *ad* de ces parties ne seront plus arithmetiquement proportionnelles ; donc la somme de ces parties *azr*, *abr*, &c. sera égale au solide & par conséquent elle sera $2R^3$, & en effet, si les sinus verses AV, AC, &c. du demi-cercle sont en proportion arithmetique, les sommes des sinus droits des parties correspondantes ABV, ADC, &c. du demi-cercle sont égales aux rectangles AV52, AC32, &c. jusqu'au dernier A*a*42. Or la somme de ces rectangles forme un onglet dont la base est le rectangle A*a*42, & dont la grande hauteur est égale au diametre, & par conséquent cet onglet est égal à $2R^2$ multiplié par 2R & divisé par 2, ou à $2R^3$ qui est précisément la valeur du solide.

COROLLAIRE IV.

166. Si l'on multiplie les Elemens du rectangle ATta (*Fig.* 100.) paralleles à ta par les ordonnées au diametre Aa du demi-cercle ADa, le solide qui en sera formé sera un demi-cylindre représenté par la figure 107. & par conséquent il sera égal au demi-cercle AD$a = \frac{1}{4}$ PR multiplié par la hauteur $ta = \frac{1}{2}$P, donc ce demi-cylindre sera $\frac{1}{8}$ P^2R. Or si sur tous les points de la courbe ADt (*Fig.* 100.) on éleve des perpendiculaires jusqu'à la rencontre de la surface du demi-cylindre, il est évident que ce demi-cylindre sera coupé en deux parties égales, de même que la courbe ADt coupe la rectangle ATta en deux parties égales; donc le demi-solide fait sur la figure ADta ou le quart du cylindre sera $\frac{1}{16}$ P^2R.

Maintenant pour trouver la valeur des différentes parties de ce demi-solide correspondantes aux parties de la base ADta, concevons que le demi-cylindre soit coupé par une infinité de plans perpendiculaires au rectangle ATta, & au côté ta, ces plans seront tous égaux entr'eux, & à la base du demi-cylindre ou au demi-cercle ADa, & les perpendiculaires élevées sur la courbe ADt, couperont ces plans de façon que la somme de leurs parties qui seront sur la moitié ADta du rectangle sera égale à la somme de leurs parties qui seront sur l'autre moitié ADtT.

De là il est évident que les parties du solide fait sur la portion bBAa, sont égales aux demi-cercles de la partie bKAa du rectangle, moins les portions de ces demi-cercles qui sont sur la partie BKA de ce rectangle; or comme nous supposons que les plans qui coupent le solide sont ses Elemens, les parties az, ab, ad, &c. de la droite at, seront en progression arithmetique, & par conséquent ces parties seront les arcs du demi-cercle arithmetiquement proportionnels, & les bases zX, bB, &c. des plans bBAa seront les sinus verses de leurs complemens, donc les bases QX, KB, &c. des plans qui sont sur KBA, seront les sinus verses des arcs arithmetiquement proportionnels du demi-cercle depuis A jusqu'au plus grand AB, ainsi les plans qui sont sur ABK sont égaux chacun à chacun aux portions AXO du demi-cercle jusqu'à la plus grande ABV, & appellant l'arc de chacune de ces parties a son sinus droit s, son sinus verse u, chaque partie du demi-cercle sera $\frac{1}{2}a$R $- \frac{1}{2}s$R $+ \frac{1}{2}su$; donc pour trouver la portion du solide faite sur ABK, il faut trouver la

somme de tous les $\frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR + \frac{1}{2}su$ jusqu'au plus grand ABV, que nous appellerons $\frac{1}{2}AR - \frac{1}{2}SR + \frac{1}{2}SV$.

Or tous les $\frac{1}{2}a$ étant en progression arithmetique, leur somme est $\frac{1}{4}A^2$, donc tous $\frac{1}{2}aR$ sont $\frac{1}{4}A^2R$.

Tous les s sont égaux à VR, c'est-à-dire, au plus grand sinus verse V multiplié par le rayon, ainsi que nous l'avons déja dit en parlant des sinus droits (Proposition XXXVI.), donc tous les $-\frac{1}{2}SR$ sont égaux à $-\frac{1}{2}VR$.

Tous les su sont les produits des sinus droits jusqu'au plus grand SV, par les sinus verses jusqu'au plus grand AV; or nous avons vû dans le Corollaire II. que la somme des sinus droits du demi-cercle multipliée par les sinus verses, étoit égale au solide fait par ADtT; en multipliant ses Elemens paralleles à Aa par les sinus droits, donc la somme des sinus droits jusqu'au plus grand SV multipliés par les sinus verses jusqu'au plus grand AV, est égale à la partie de ce solide faite sur ABK; mais par le Corollaire premier cette portion est $\frac{1}{2}u^2R = uR^2 - \frac{1}{2}s^2R$, donc tous les $\frac{1}{2}su$ sont égaux à $\frac{1}{2}VR^2 - \frac{1}{4}S^2R$.

Donc tous les $\frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR + \frac{1}{2}su$ jusqu'au plus grand $\frac{1}{2}AR - \frac{1}{2}SR + SV$, valent $\frac{1}{4}A^2R - \frac{1}{2}VR + \frac{1}{2}VR - \frac{1}{4}S^2R = \frac{1}{4}A^2R - \frac{1}{4}S^2R$.

Mais tous les plans du solide qui sont sur bKAa, étant égaux chacun au demi-cercle $\frac{1}{4}PR$, leur somme est $\frac{1}{4}APR$, c'est-à-dire le demi-cercle multiplié par l'arc AB, ôtant donc de cette somme celle des plans qui sont sur ABK le reste $\frac{1}{4}APR - \frac{1}{4}A^2R + \frac{1}{4}S^2R$, ou $\frac{1}{4}aPR - \frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{4}s^2R$ sera la partie du solide faite sur bBAa.

Puisque la portion du solide faite sur AKB est $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{4}s^2R$, la portion faite sur bBt égale à AKB sera $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{4}s^2R$.

Si du solide $\frac{1}{16}RP^2$ fait sur ADta, on ôte la portion $\frac{1}{4}aPR - \frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{4}s^2R$, le reste $\frac{1}{16}RP^2 - \frac{1}{4}aPR + \frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{4}s^2R$ sera la portion restante tbB.

Si de la portion faite sur bBAa on ôte la portion faite sur bBVa, qui est la portion BVa du demi-cercle multipliée par ab, ou $\frac{1}{2}aaR - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{2}ash = \frac{1}{4}aPR - \frac{1}{2}a^2R + \frac{1}{2}asR - \frac{1}{2}asu$, le reste $\frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{4}s^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{2}asu$ sera la portion du solide faite sur BAV.

Si nous concevons que bB devienne dD, alors nous aurons $a = \frac{1}{4}P$, $s = u = R$, & mettant ces valeurs dans l'expression du solide fait sur bBAa, nous aurons $\frac{1}{16}RP^2 - \frac{1}{64}RP^2 + \frac{1}{4}R^3$ =

$=\frac{3}{64}RP^2+\frac{1}{4}R^3$ pour la valeur de la portion faite sur *d*DA*a*.

La portion faite sur *d*DC*a* étant égale au quart de cercle multiplié par $ad=\frac{1}{4}P$, vaut $\frac{1}{32}PPR=\frac{2}{64}P^2R$; ôtant donc cette portion de la précédente le reste $\frac{1}{64}P^2R+\frac{1}{4}R^3$ sera la valeur du solide fait sur DAC.

COROLLAIRE V.

167. *Si l'on prend les sinus verses du demi-cercle arithmetiquement proportionnels, la somme des arcs correspondans à ces sinus multipliés chacun par leurs sinus droits est égale à* $\frac{1}{16}P^2R$.

Par le Corollaire précédent les Elemens de la figure AD*ta*, paralleles à la base *ta* multipliés par les ordonnées du demi-cercle, sont égaux à $\frac{1}{16}P^2R$. Or quand on prend les Elemens de la figure AD*ta* paralleles à *ta*, les abscisses AV, AC, &c. c'est-à-dire, les sinus verses sont arithmetiquement proportionnels, & les Elemens de la figure sont les arcs correspondans à ces sinus de même que les ordonnées du cercle sont les sinus de ces arcs; donc, &c.

D'où l'on voit, que si on demandoit, par exemple, la somme des arcs correspondans aux sinus verses arithmetiquement proportionnels depuis A jusqu'au plus grand AV multipliés par leurs sinus droits, la portion du solide faite sur BDV, c'est-à-dire, la portion $\frac{1}{4}a^2R+\frac{1}{4}s^2R-\frac{1}{2}asR+\frac{1}{2}asu$ seroit la somme cherchée & ainsi des autres.

REMARQUE.

168. Tout ce que nous venons de dire dans ce Chapitre touchant la figure des sinus verses & des sinus droits, peut être d'un grand secours dans bien des occasions, & l'on ne doit pas le négliger: Nous allons en faire voir l'usage à l'égard de la cycloïde dans le Chapitre suivant.



CHAPITRE IX.

Du centre de gravité de la Cycloïde & de ses parties, & de leurs momens à l'égard des différens axes de revolution.

DEFINITION.

169. SI un cercle ADa (*Fig.* 108.), dont le diametre Aa est perpendiculaire sur une tangente *ta*, roule d'un mouvement uniforme le long de *ta* jusqu'à ce que l'autre extrémité A de son diametre, soit parvenuë en un point *t* de la droite *ta*, & qu'étant remis au point *a*, il roule sur *a*P jusqu'à ce que le point A parvienne en un point P de la droite *a*P, la figure comprise entre la courbe *tonm*AP que décrit le point A, & la base *t*P s'appelle en général *cycloïde*, & en particulier *cycloïde ordinaire*, ou simplement *cycloïde*, si la base *t*P est égale à la circonference du cercle, *cycloïde alongée* lorsque *t*P est plus grand que la circonference, & *cycloïde racourcie*, lorsque *t*P est moindre.

Le cercle en roulant à deux mouvemens, l'un direct de *a* en *t*, & l'autre autour de son centre; quand les vitesses de ces deux mouvemens sont égales, c'est-à-dire, quand le point A roulant autour de son centre, parcourt un arc égal à la partie de *ta* que le cercle parcourt dans le même tems, la cycloïde décrite est la cycloïde ordinaire; quand au contraire l'arc que parcourt le point A est moindre que la partie de *ta*, que le cercle parcourt dans le même tems, la cycloïde est *allongée*, & quand l'arc est plus grand, la cycloïde est *racourcie*, ce qui est évident, puisque les mouvemens étant supposés uniformes, la demi-circonference parcouruë par le point A quand le cercle sera en *t*, sera à la droite *at* parcouruë par le cercle, comme le premier arc parcouru par le point A au premier moment est à la partie de *at* parcouruë par le cercle dans le même moment.

Nous parlerons principalement dans ce Chapitre de la cycloïde ordinaire, & nous ferons voir ensuite comment on peut appliquer aux deux autres tout ce que nous en aurons dit.

170. Puisque dans la cycloïde ordinaire la demi-base *ta* est

égale à la demi-circonference AD*a*, il est évident que si l'on coupe cette demi-base en parties égales *ax*, *xb*, *db*, &c. & la demi-circonference en un même nombre de parties égales AX, XB, BD, &c. les parties de la base seront égales chacune à chacune aux parties de la demi-circonference.

Donc quand le cercle sera parvenu de *a* en *x*, tous les points de l'arc *au* se seront appliqués successivement sur tous les points de la droite *tx*, & par conséquent le cercle touchera le point *x* par le point *u*, & il sera dans la position *xrs*; ainsi le point A aura parcouru un arc égal à l'arc *au* ou AX, tirant donc du point X une droite X*m* parallele à la base *ta*, l'arc *sm* sera égal à l'arc AX, à cause que son sinus est autant éloigné de son centre, que le sinus de l'arc AX est éloigné du sien, & le point A sera en *m*, qui sera un point de la courbe.

Or l'arc *sm* étant égal à l'arc AX, il est évident que l'arc *mrx* sera égal à l'arc XD*a*, l'un & l'autre étant le complement des arcs égaux AX, *sm*, donc les cordes *mx*, X*a* seront égales, & comme elles sont entre les paralleles *m*X, *ta*, elles seront également inclinées & paralleles entr'elles, donc les deux droites *m*X, *xa*, comprises entre ces paralleles, seront égales, & par conséquent *mx* sera égale à l'arc XA de même que *xa* est égal à l'arc *au* ou XA.

On demontrera de même que quand le cercle touchera la droite *ta* au point *b*, le point A sera en *n*, que la corde *nb* sera égale & parallele à la corde B*a*, & que la droite *n*B sera égale à la partie *ba* de la base, & par conséquent aux deux arcs AX, XB, ou à l'arc AB.

Par la même raison, quand le cercle touchera la droite *ta* en *d*, le point A sera en *o*, & la droite *o*D sera égale à l'arc DA, & ainsi des autres.

171. Donc pour décrire une cycloïde ordinaire il faut diviser la demi-circonference AD*a* en plusieurs parties égales, puis ayant tiré la tangente *ta* égale à la demi-circonference, il faut la partager en un même nombre de parties, après quoi tirant les cordes X*a*, B*a*, D*a*, & les droites indefinies X*m*, B*n*, D*o*, &c. paralleles à la base *ta*, il faut des points de division de la base tirer des droites *xm*, *bn*, *do*, &c. paralleles chacune aux cordes correspondantes X*a*, B*a*, D*a*, &c. & les points *m*, *n*, *o*, &c. où ces lignes couperont les paralleles à la base seront autant de points de la courbe de la cycloïde, faisant donc passer

une courbe *tonm*A par tous ces points, l'espace *t*A*a* sera la demi-cycloïde, & faisant la même chose de l'autre côté on aura la cycloïde entiere.

172. Puisque les droites X*m*, B*n*, D*o*, &c. paralleles à *ta*, sont égales aux arcs correspondans AX, AB, AD, &c. & que la même chose arriveroit quand même les divisions de la demi-circonference AD*a*, & de la base *ta* seroient infinies, il s'ensuit que toute ligne D*o* parallele à *ta* & comprise entre la courbe de la demi-cycloïde, & la demi-circonference est égale à l'arc DA qu'elle coupe.

PROPOSITION XLVII.

173. *Trouver la grandeur de la cycloïde & de ses parties.* (Fig. 108.)

On peut considérer dans la cycloïde deux sortes de parties, les unes qui sont faites par des droites V*n*, C*o*, &c. paralleles à la base *ta*, & les autres qui sont faites par des droites *mx*, *nb*, *od*, &c. paralleles aux cordes du cercle *générateur*, c'est-à-dire, du cercle qui forme la cycloïde. Commençons par les premieres.

Si l'on prend les Élemens de la demi-cycloïde *at*A paralleles à la base *at*, les parties que ces Élemens prendront sur le diametre seront égales entr'elles, ainsi les droites AV, AC, AV, &c. seront les sinus verses du demi-cercle arithmetiquement proportionnels, en supposant que AV est une des petites parties coupées par les ordonnées à la demi-cycloïde; donc les droites VB, CD, VQ, &c. qui sont partie des ordonnées, seront les sinus droits correspondans aux sinus verses arithmetiquement proportionnels, & les droites B*n*, D*o*, &c. qui sont les restes des ordonnées, seront les arcs correspondans à ces mêmes sinus verses, donc les ordonnées entieres seront la somme des sinus droits & des arcs correspondans aux sinus verses arithmetiquement proportionnels; mais la somme des sinus droits dans cette supposition est égale à la somme des ordonnées au demi-cercle, & vaut par conséquent $\frac{1}{4}$ RP, car la somme des ordonnées au demi-cercle est la même chose que le demi-cercle, & la somme des arcs correspondans aux sinus verses arithmetiquement proportionnels, est égal à la figure AD*ta* (*Fig.* 100.) dont les Elemens sont paralleles à la base *at*, ainsi qu'il a été observé ci-dessus; donc cette somme est $\frac{1}{2}$ RP, ajoûtant donc ensemble la somme $\frac{1}{4}$ RP des sinus à la somme $\frac{1}{2}$ RP des arcs, nous aurons $\frac{1}{4}$ RP,

$+\frac{1}{2}$ RP $=\frac{3}{4}$ RP pour la valeur de la demi-cycloïde *to*A*a*, & par conséquent la cycloïde entiere sera $\frac{6}{4}$ RP $=\frac{3}{2}$ RP.

De là il suit, 1°. Que la demi-cycloïde est au demi-cercle comme $\frac{3}{4}$ RP à $\frac{1}{4}$ RP ou comme 3 à 1, & la cycloïde entiere au cercle entier aussi comme 3 à 1, à cause que les entiers sont entr'eux comme leurs moitiés. 2°. Que la partie A*ota*D de la demi-cycloïde est égale à la figure AD*ta* (*Fig.* 100.), l'une & l'autre de ces figures ayant pour Elemens les arcs correspondans aux sinus verses arithmetiquement proportionnels du demi-cercle.

La portion A*n*V de la demi-cycloïde est égale à la partie ABV du demi-cercle, plus la partie A*n*BXA, laquelle est égale à la partie ABV de la figure AD*ta* (*Fig.* 100.); or la partie ABV du demi-cercle vaut $\frac{1}{2}a$R $-\frac{1}{2}s$R $+\frac{1}{2}su$, & la portion BVA de la figure AD*ta* est $-a$R $+s$R $+au$, ajoûtant donc ensemble ces deux parties, nous aurons $-\frac{1}{2}a$R $+\frac{1}{2}s$R $+\frac{1}{2}su+au$ pour la portion A*n*V de la demi-cycloïde.

De même la portion A*o*C de la demi-cycloïde est égale au quart de cercle ADC plus la partie A*o*DBA égale à la portion ADC de la figure AD*ta* (*Fig.* 100.); or le quart de cercle AC vaut $\frac{1}{8}$ RP, & la portion ADC de la figure AD*ta* vaut RR, ajoûtant donc ensemble ces deux valeurs, nous aurons $\frac{1}{8}$ RP $+$ RR pour la valeur de la portion A*o*C de la demi-cycloïde, & ainsi des autres.

Pour trouver les grandeurs des parties faites par des droites paralleles aux cordes X*a*, B*a*, &c. tirons par le sommet une tangente AI (*Fig.* 109.), qui sera parallele à la base *ta*, prolongeons les cordes jusqu'à la rencontre des paralleles qui leur sont immédiatement superieures, ce qui nous donnera des triangles circonscrits au demi-cercle AI*a*, X*ra*, &c. des points des divisions de la base tirons des droites paralleles aux cordes correspondantes du demi-cercle, & prolongeons-les jusqu'à la rencontre des paralleles à la base qui leur sont immédiatement supérieures & nous aurons autant de trapezes circonscrits à la demi-cycloïde A2*xa*, 3*nba*, &c. dans chacun de ces trapezes inscrivons un triangle tel que 3*px* égal & semblable au triangle correspondant du demi-cercle, ce qui restera de chaque trapeze sera un parallelogramme; car par exemple, le triangle 3*px* ayant son côté 3*x* parallele au côté X*a* du triangle X*ra* par la construction, son côté *px* sera aussi parallele au côté *ra* à cause de la similitude des deux triangles; mais *nb* est aussi parallele à 3*a*, ou B*a* par la construction,

donc *nb* est parallele à *px*, & par conséquent *nbxp* est un parallelogramme; & on prouvera la même chose à l'égard des autres trapezes.

Or les bases AI, X*r*, &c. des triangles circonscrits au demi-cercle étant plus grandes que les arcs correspondans du demi-cercle (*N.* 159.), les bases des triangles inscrits dans les trapezes seront plus grandes que les bases des parallelogrammes restans; par exemple, la base 3*p* du triangle 3*px* égale à la base X*r*, est plus grande que la base *bx* ou *np* du parallelogramme *nbxp*, à cause que cette base est égale à un arc de cercle, lequel est moindre que *r*X ; & de même dans les autres trapezes. Donc les parallelogrammes restans ayant même hauteur que les triangles inscrits aux trapezes ne seront pas tout-à-fait doubles de ces triangles, & par conséquent les trapezes ne seront pas tout-à-fait triples de ces mêmes triangles ou des triangles correspondans du demi-cercle.

D'autre part, des extrémités des cordes X*a*, B*a*, &c. (*Fig.* 110.) tirons des paralleles à la base jusqu'à la rencontre des cordes immediatement supérieures, ce qui nous donnera des triangles inscrits au demi-cercle OX*a*, PB*a*, &c: des points de division de la base tirons des droites *xr*, *bs*, &c. paralleles aux cordes correspondantes, & des points *r*, *s*, &c. tirons des droites paralleles à la base jusqu'à la rencontre des paralleles aux cordes immediatement superieures, ce qui nous donnera autant de trapezes inscrits à la demi-cycloïde O*rxa*, *lsbx*, &c. Dans chacun de ces trapezes inscrivons des triangles égaux & semblables aux triangles correspondans du demi-cercle, & les restes des trapezes seront des parallelogrammes; par exemple, *sbxp* sera un parallelogramme, & ainsi des autres, ce qui se démontrera comme ci-dessus.

Or les bases des triangles inscrits au demi-cercle étant moindres que les arcs correspondans (*N.* 158.), les bases des triangles inscrits aux trapezes seront moindres que les bases des parallelogrammes; par exemple, la base *pl* du triangle *pla* sera moindre que la base *sp* ou *bx* du parallelogramme *spxb*, à cause que *bx* est égal à un arc du demi-cercle, donc les parallelogrammes restans ayant même hauteur que les triangles inscrits seront plus que doubles de ces triangles, & par conséquent les trapezes seront un peu plus que triples de ces mêmes triangles ou des triangles inscrits au demi-cercle.

Puis donc que les trapezes circonſcrits à la demi-cycloïde ſont moins que doubles des triangles circonſcrits au demi-cercle, & que les trapezes inſcrits à la demi-cycloïde ſont plus que doubles des triangles inſcrits à ce même demi-cercle, ſi nous concevons que les diviſions de la demi-circonference & de la baſe augmentent, & que par conſéquent les triangles circonſcrits & inſcrits au demi-cercle ſoient en plus grand nombre, de même que les trapezoïdes circonſcrits & inſcrits à la demi-cycloïde, la différence des circonſcrits aux inſcrits deviendra moindre, & cependant jamais les trapezes circonſcrits ne deviendront plus que triples des triangles circonſcrits, de même que les trapezes inſcrits ne deviendront moins que triples des triangles inſcrits, c'eſt pourquoi quand le nombre des circonſcrits & inſcrits ſera infini de part & d'autre, la différence des triangles inſcrits aux circonſcrits, & des trapézes inſcrits aux circonſcrits ſera nulle, & les trapezes ſeront préciſement triples des triangles; mais la ſomme infinie des trapezes eſt égale à la demi-cycloïde, & la ſomme infinie des triangles eſt égale au demi-cercle, donc la demi-cycloïde eſt triple du demi-cercle.

Et ceci eſt également vrai à l'égard des parties de la demi-cycloïde, & des parties correſpondantes du demi-cercle; ainſi la partie *bnAa* de la demi-cycloïde (*Fig.* 108.), eſt triple du ſecteur B*a*A, la partie *ytg* eſt triple du ſegment Q*a*Q, & ainſi des autres.

Or le ſecteur B*a*A eſt $\frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}sR$, donc la portion *nba*A de la demi-cycloïde eſt $\frac{3}{2}aR + \frac{3}{2}sR$.

Le ſegment reſtant *a*B*a* eſt $\frac{1}{4}RP - \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR$, donc la portion *nbt* de la demi-cycloïde eſt $\frac{3}{4}RP - \frac{3}{2}aR - \frac{3}{2}sR = \frac{3}{2}aR - \frac{3}{2}sR$, & ainſi des autres.

Proposition XLVIII.

174. *Trouver les momens de la cycloïde & de ſes parties par rapport à differens axes de mouvement.*

Les Elemens de la demi-cycloïde *t*A*a* paralleles à la baſe *ta* (*Fig.* 108.), ſont compoſés des Elemens du demi-cercle AD*a*, & de ceux de la figure A*ota*D*a*, égaux à ceux de la figure AD*ta*, des ſinus verſes (*Fig.* 100.), à cauſe que les uns & les autres ſont la ſomme des arcs du demi-cercle correſpondans aux ſinus verſes arithmetiquement proportionnels, & quoique les Elemens de la figure AD*ta* (*Fig.* 100.) ſoient poſés différemment de ceux de la figure A*ota*DA (*Fig.* 108.) cependant leurs diſtances à la droite *at* eſt la même de part & d'autre; ainſi le moment de la

demi-cycloïde par rapport à la droite *at*, eſt compoſé du moment du demi-cercle AD*a* par rapport à la même droite, & du moment de la figure AD*ta* (*Fig.* 100.). Or le moment du demi-cercle AD*a* par rapport à *ta* eſt $\frac{1}{4}R^2P$, & le moment de la figure AD*ta* par rapport à *ta* eſt $\frac{3}{8}R^2P$, donc le moment de la demi-cycloïde par rapport à *ta*, eſt $\frac{1}{4}R^2P + \frac{3}{8}R^2P = \frac{5}{8}R^2P$; & diviſant ce moment par la grandeur $\frac{3}{4}RP$, le quotient $\frac{5}{6}R$ ſera la diſtance du centre de gravité de la demi-cycloïde à la droite *ta*, donc ſa diſtance par rapport à la droite A4 eſt $\frac{7}{6}R$, & multipliant la grandeur $\frac{3}{4}RP$ par $\frac{7}{6}R$, le produit $\frac{21}{24}R^2P = \frac{7}{8}R^2P$, ſera le moment de la demi-cycloïde par rapport à A4.

Donc le moment de la cycloïde entiere par rapport à *ta*, eſt $\frac{10}{8}R^2P$, & par rapport à A4 $\frac{14}{8}R^2P$ & les diſtances de ſon centre de gravité aux droites *ta*, A4, ſont les mêmes que celles du centre de gravité de la demi-cycloïde.

Le moment de la partie *n*AV de la demi-cycloïde par rapport à *ta*, eſt compoſé du moment du demi-ſegment BAV du demi-cercle, & de la partie *n*AXB égale à la portion BAV de la figure AD*ta* (*Fig.* 100.); or le moment du demi-ſegment BAV eſt $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}suR + \frac{1}{3}s^3$, & le moment de la portion BAV de la figure AD*ta*, eſt $-\frac{5}{4}eR^2 + auR - \frac{1}{4}suR + \frac{1}{2}as^2$, donc le moment de la portion *n*AV de la demi-cycloïde par rapport à *ta*, eſt $-\frac{3}{4}eR^2 + auR + \frac{1}{4}suR + \frac{1}{2}as^2 + \frac{1}{3}s^3$, & diviſant ce moment par la grandeur $-\frac{1}{2}eR + au + \frac{1}{2}su$, le quotient $\frac{-9eR + 12auR + 3suR + 6as^2 + 4s^3}{-6eR + 12au + 6su}$ ſera la diſtance du centre de gravité de la portion *n*AV de la demi-cycloïde à la droite *ta*.

De même le moment du demi-ſegment BAV du demi-cercle par rapport à TA eſt $\frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}suR - \frac{1}{3}s^3$, & le moment de la portion BAV de la figure AD*ta* (*Fig.* 100.) par rapport à TA eſt $-\frac{3}{4}eR^2 + auR + \frac{1}{4}suR - \frac{1}{2}as^2$; ajoûtant donc enſemble ces deux momens, la ſomme $-\frac{1}{4}eR^2 + auR + \frac{3}{4}suR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{3}s^3$ ſera le moment de la portion *n*AV de la demi-cycloïde par rapport à A4 (*Fig.* 108.), & diviſant ce moment par la grandeur $-\frac{1}{2}eR + au + \frac{1}{2}su$ le quotient $\frac{-3eR^2 + 12auR + 9suR - 6as^2 - 4s^3}{-6eR + 12au + 6su}$ ſera la diſtance du centre de gravité de la portion *n*AV à la droite A4.

Et ſi nous ſuppoſons que la portion *n*AV de la demi-cycloïde devienne la portion *o*AC, alors nous aurons $a = \frac{1}{4}P$, $s = u = R$, & mettant ces valeurs dans les deux momens ci-deſſus, nous

nous aurons $\frac{1}{16}$ PR^2 + $\frac{4}{3}$ R^3 pour le moment de la portion *o*AC par rapport à *ta*, & diviſant ce moment par ſa grandeur qui eſt $\frac{1}{8}$ RP+RR, le quotient $\frac{9PR^2+64R^2}{6PR+48R}$ ſera la diſtance du centre de gravité de la portion *o*AC par rapport à *ta*. Nous aurons auſſi $\frac{1}{16}$ PR^2 + $\frac{2}{3}$ R^3 pour le moment de la portion par rapport à A4, & diviſant ce moment par la grandeur $\frac{1}{8}$ PR+RR le quotient $\frac{3PR^2+32R^2}{6PR+48R}$ ſera la diſtance du centre de gravité de la portion *o*AC à la droite A4, & ainſi des autres portions de la demi-cycloïde faites par des paralleles à la baſe *at*.

Quant aux momens des portions faites par des paralleles aux cordes X*a*, B*a*, &c. nous les trouverons encore de la même façon. Car par exemple, ſi de la portion *nba*A on retranche le ſecteur correſpondant AB*a* du demi-cercle, le reſte A*nba*BA ſera égal à la portion *b*BA*a* de la figure AD*ta* (*Fig.* 100.) & pour s'en convaincre, il n'y a qu'à faire attention que la partie A*n*BA dans la demi-cycloïde eſt égale à la partie ABV de la figure AD*ta*, à cauſe que les Elemens de l'une & de l'autre portion ſont les arcs correſpondans aux ſinus verſes arithmetiquement proportionnels depuis A juſqu'au plus grand AV, & que le parallelogramme reſtant *nba*B eſt égal au rectangle reſtant *b*BV*a* dans la figure AD*ta*; puis donc que la portion *nba*BA dans la demi-cycloïde eſt égale à la portion *b*BA*a* de la figure AD*ta*, & que les Elemens de ces deux portions; quoique différemment arrangés, ſont cependant dans la même diſtance à la droite *at*, il s'enſuit que les momens de ces deux portions par rapport à *ta* ou à AT, ou A4 doivent être égaux; & il en eſt de même des autres portions.

Le moment de la portion *nba*A de la demi-cycloïde par rapport à *ta* étant donc composé du moment du ſecteur B*a*A du demi-cercle, & du moment de la portion *b*BA*a* de la figure AD*ta* (*Fig.* 100.), ſi nous prenons le moment $\frac{1}{2}a$R^2 + $\frac{5}{6}$ *s*R^2 — $\frac{1}{6}$ *su*R du ſecteur B*a*A du demi-cercle par rapport à *ta*, & le moment $\frac{3}{4}a$R^2 + $\frac{5}{4}$ *s*R^2 — $\frac{1}{4}$ *su*R de la portion *b*BA*a* de la figure AD*ta* la ſomme $\frac{5}{4}a$R^2 + $\frac{25}{12}$ *s*R^2 — $\frac{5}{12}$ *su*R, ſera le moment de la portion *nba*A de la demi-cycloïde par rapport à *ta*, & diviſant ce moment par la grandeur $\frac{3}{2}$ *a*R + $\frac{3}{2}$ *s*R de cette portion, le quotient $\frac{15aR^2+25sR^2-5suR}{18aR^2+18sR}$ ſera la diſtance du centre de gravité de cette portion par rapport à *ta*.

Et si nous prenons le moment $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{6}sR^2 + \frac{1}{6}suR$ du secteur BaA par rapport à TA, & le moment $\frac{5}{4}aR^2 + \frac{3}{4}sR^2 + \frac{1}{4}suR$ de la portion bBAa de la figure ADta, la somme $\frac{7}{4}aR^2 + \frac{11}{12}sR^2 - \frac{5}{12}suR$ sera le moment de la portion nbaA de la demi-cycloïde par rapport à A4. Et divisant ce moment par la grandeur $\frac{3}{4}aR + \frac{3}{4}sR$, le quotient $\frac{21aR^2 + 11sR^2 + 5suR}{18aR + 18sR}$ sera la distance du centre de gravité de la portion nbaA par rapport à A4.

La portion restante tnb de la demi-cycloïde étant la somme d'une infinité de trapezes circonscrits ou inscrits, chacun desquels est composé d'un triangle égal au triangle correspondant circonscrit ou inscrit au demi-cercle, & d'un parallelogramme égal au rectangle correspondant circonscrit ou inscrit à la figure ADta, il est visible que son moment par rapport à ta est égal au moment du segment BaB du demi-cercle, plus le moment de la portion tbB de la figure ADta par rapport à ta. Or le moment du segment BaB est $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}shR$, & le moment la portion tBb de la figure ADta est $\frac{3}{4}aR^2 - \frac{3}{4}sR^2 - \frac{1}{4}shR$; ajoûtant donc ces deux momens ensemble, la somme $\frac{5}{4}aR^2 - \frac{5}{4}sR^2 - \frac{5}{12}hRs$ sera le moment de la portion tnb de la demi-cycloïde par rapport à ta, & divisant ce moment par la grandeur $\frac{3}{2}aR - \frac{3}{2}sR$, le quotient $\frac{15aR^2 - 15sR^2 - 5hRs}{18aR - 18sR}$ sera la distance du centre de gravité de cette portion à la droite ta.

Et si nous prenons le moment $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR + \frac{1}{6}shR$ du segment BaB par rapport à TA, & le moment $\frac{5}{4}aR^2 - \frac{5}{4}sR^2 + \frac{1}{4}shR$ de la portion tBb de la figure ADta (*Fig.* 100.) la somme $\frac{7}{4}aR^2 - \frac{7}{4}sR^2 + \frac{5}{12}shR$ sera le moment de la portion tnb de la demi-cycloïde par rapport à A4; & divisant ce moment par la grandeur $\frac{3}{2}aR - \frac{3}{2}sR$, le quotient $\frac{21aR^2 - 21sR^2 + 5shR}{18aR - 18sR}$ sera la distance du centre de gravité de cette portion à la droite A4, & ainsi des autres.

Il nous reste à chercher le moment de la demi-cycloïde & de ses parties par rapport aux droites Aa, t4; & pour cela considérons que le moment de la demi-cycloïde par rapport au diametre Aa étant un onglet dont le plan incliné de 45 dégrés passe par la droite Aa, si on coupe cet onglet par une infinité de plans perpendiculaires à la base & au diametre Aa, ces plans seront des triangles rectangles isosceles qui seront par conséquent

la moitié des quarrés des Elemens de la demi-cycloïde pris perpendiculairement aux diametres ; or ces Elemens sont la somme des ordonnées au demi-cercle ADa, plus la somme des arcs correspondans à ces ordonnées ; & par conséquent chaque Element de la demi-cycloïde étant égal à un sinus droit & à son arc, est $s+a$; & il s'agit de trouver la somme des quarrés de tous les $s+a$, car la moitié de cette somme sera l'onglet que nous cherchons, c'est-à-dire tous les $\frac{1}{2}s^2+as+\frac{1}{2}aa$, seront le moment de la demi-cycloïde par rapport à ta.

Or tous les $\frac{1}{2}s^2$ sont égaux au moment du demi-cercle ADa par rapport à Aa, car ce moment est un onglet composé de la moitié des quarrés des ordonnées, par la même raison que nous avons dit ci-dessus ; donc tous les $\frac{1}{2}s^2$ sont $\frac{2}{3}R^3$.

Tous les $\frac{1}{2}a^2$ sont égaux au moment de la figure ADta (*Fig.* 100.) par rapport à Aa, car les Elemens de la figure perpendiculaires à Aa sont les mêmes que les Elemens de la demi-cycloïde compris entre la courbe & la demi-circonférence du cercle; donc tous les $\frac{1}{2}a^2$, sont $\frac{1}{8}P^2R-2R^3$.

Enfin tous les as étant les produits des ordonnées du demi-cercle par les arcs correspondans, sont égaux au solide que nous avons fait ci-dessus (*N.* 166.) en multipliant les Elemens du demi-cercle par ceux de la figure ADta ; donc tous les as sont $\frac{1}{16}P^2R$.

Rassemblant donc ces trois valeurs tous les $\frac{1}{2}s+as+\frac{1}{2}aa$; ou le moment de la demi-cycloïde par rapport à Aa sera $\frac{2}{3}R^3+\frac{1}{8}P^2R-2R^3+\frac{1}{16}P^2R=\frac{3}{16}P^2R-\frac{4}{3}R^3$; & divisant ce moment par la grandeur $\frac{3}{4}RP$, le quotient $\frac{1}{4}P-\frac{16R^2}{9P}$ sera la distance du centre de gravité de la demi-cycloïde à la droite Aa; donc sa distance à la droite $t4$ sera $\frac{1}{4}P+\frac{16R^2}{9P}$, & multipliant par la grandeur $\frac{3}{4}PR$, le produit $\frac{3}{16}P^2R+\frac{4}{3}R^3$ sera le moment la démi-cycloïde par rapport à $t4$.

Le moment de la portion nVA de la demi-cycloïde est la somme de tous les $\frac{1}{2}s^2+as+\frac{1}{2}a^2$, compris depuis A jusqu'à nV. Or tous les $\frac{1}{2}s^2$ sont le moment du demi-segment BAV du demi-cercle par rapport à Aa ; donc tous les $\frac{1}{2}s^2$ sont $\frac{1}{3}uR^2-\frac{1}{6}s^2R+\frac{1}{6}s^2u$.

Tous les $\frac{1}{2}a^2$ sont le moment de la portion BAV de la figure ADta (*Fig.* 100.) par rapport à Aa; donc tous les $\frac{1}{2}a^2$ sont $-\frac{1}{2}a^2R+asR-uR^2+\frac{1}{2}a^2u$.

Tous les as sont égaux au solide fait sur BAV (*N.* 166.) donc tous les as sont $\frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{4}s^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{2}asu$.

Ajoûtant donc ces trois valeurs ensemble, la somme ou le moment de la portion nVA de la demi-cycloïde par rapport à Aa sera $-\frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{2}asR + \frac{1}{12}s^2R - \frac{2}{3}uR^2 + \frac{1}{2}a^2u + \frac{1}{2}asu + \frac{1}{6}s^2u$, & divisant ce moment par la grandeur $-\frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}sR + \frac{1}{2}su + au$, le quotient $\frac{-3a^2R + 6asR + s^2R - 8uR^2 + 6a^2R + 6asu + 2s^2u}{-6aR + 6sR + 6su + 12au}$ sera la distance du centre de gravité de la portion nVA au diametre Aa; & par conséquent sa distance à la droite $t4$ sera $\frac{1}{2}P + \frac{3a^2R - 6asR - s^2R + 8uR^2 - 6a^2R - 6asu - 2s^2u}{-6aR + 6aR + 6su + 12au}$, & ainsi des autres portions faites par des droites paralleles à la base.

Le trapezoïde nbaV de la demi-cycloïde est composé du triangle BaV, & du parallelogramme nbaB; or la base ab du parallelogramme est égale à l'arc AB $= a$, & sa hauteur est la droite aV $= h$; donc ce parallelogramme est ah, & comme la distance de son centre de gravité est égale à la moitié de nB plus la moitié de BV, à cause que ce centre est au milieu de sa hauteur, & que $\frac{1}{2}n$B $+ \frac{1}{2}$BV $= \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}s$, le moment du parallelogramme par rapport à Aa est donc $\frac{1}{2}a^2h + \frac{1}{2}ahs$.

Le triangle aBV est $\frac{1}{2}sh$, & la distance de son centre de gravité à la droite Aa est $\frac{1}{3}s$; donc le moment du triangle aBV par rapport à Aa est $\frac{1}{6}ssh$.

Ajoûtant donc ensemble ces deux momens, la somme $\frac{1}{2}a^2h + \frac{1}{2}ahs + \frac{1}{6}ssh = a^2R - \frac{1}{2}a^2u + asR - \frac{1}{2}aus + \frac{1}{3}ssR - \frac{1}{6}s^2u$, sera le moment du trapezoïde nbaV, & ajoutant encore ce moment à celui de la portion nVA, la somme $\frac{3}{4}a^2R + \frac{3}{2}asR + \frac{5}{12}s^2R - \frac{2}{3}uR^2$ sera le moment de la portion nbaA de la demi-cycloïde par rapport à Aa. Et divisant ce moment par la grandeur $\frac{3}{2}aR + \frac{3}{2}sR$, le quotient $\frac{9a^2R + 18asR + 5s^2R - 8uR^2}{18aR + 18sR} = \frac{9a^2 + 18as + 5s^2 - 8uR}{18a + 18s}$ sera la distance du centre de gravité de la portion nbaA par rapport à Aa. Donc sa distance par rapport à $t4$ est $\frac{1}{2}P \frac{-9a^2 - 18as - 5s^2 + 8uR}{18a + 18s}$, & ainsi des autres portions faites par des paralleles aux cordes du demi-cercle.

Je laisse grand nombre d'autres choses qui pourroient peut-être devenir ennuyeuses au Lecteur à cause du calcul, mais il sera facile de les trouver, pourvû qu'on ait compris ce que nous avons dit jusqu'ici. On voit par exemple que pour avoir le mo-

ment de la partie *tnb* de la demi-cycloïde par rapport à *Aa*, il n'y a qu'à retrancher du moment de la demi-cycloïde le moment de la partie *nbaA*, & le reste sera le moment cherché. De même, si l'on cherche le moment du complement *t4A* par rapport à *Aa*, on prendra le moment du rectangle *t4Aa*, & de ce moment on en retranchera celui de la demi-cycloïde, & ainsi des autres.

COROLLAIRE.

175. La maniere dont nous avons trouvé les centres de gravité de la demi-cycloïde est indirecte, mais on peut la trouver directement en cette sorte.

Tous les trapezoïdes inscrits ou circonscrits dont nous concevons que la demi-cycloïde est la somme, sont composés d'un parallelogramme & d'un triangle égal au triangle correspondant inscrit ou circonscrit au demi-cercle, & le parallelogramme est double du triangle, ainsi qu'on a vu ci-dessus. Or la distance du centre de gravité de chaque parallelogramme à la droite *ta*, est la moitié de la hauteur du parallelogramme, & la distance du centre de gravité de chaque triangle à la même droite *ta*, est les deux tiers de sa hauteur; ainsi la différence de ces deux distances est $\frac{1}{6}$, & partageant ce $\frac{1}{6}$ en deux parties réciproques au triangle & au parallelogramme pour avoir le centre de gravité du trapeze que composent le parallelogramme & le triangle, nous trouverons que ce centre est éloigné de celui du parallelogramme de $\frac{1}{18}$, & que par conséquent il est éloigné de *ta* de $\frac{1}{2}+\frac{1}{18}=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$; donc les distances des centres de gravité des triangles inscrits ou circonscrits qui composent le demi-cercle, sont aux distances des trapezoïdes comme $\frac{2}{3}$ à $\frac{5}{9}$, ou comme $\frac{6}{9}$ à $\frac{5}{9}$, ou comme 6 à 5; mais les grandeurs de ces triangles sont aux grandeurs des trapezoïdes, comme 1 à 3. Puis donc que les momens sont en raison composée de la raison des distances & de celle des grandeurs, il s'ensuit que les momens des triangles qui composent le demi-cercle sont aux momens des trapezoïdes qui composent la demi-cycloïde, comme 6×1 à 5×3, ou comme 6 à 15, ou comme 2 à 5. Or le moment du demi-cercle par rapport à *ta* est $\frac{1}{4}R^2P$; donc faisant cette analogie $2, 5 :: \frac{1}{4}R^2P, \frac{5}{8}R^2P$, le moment de la demi-cycloïde par rapport à *ta* sera $\frac{5}{8}R^2P$, & divisant ce moment par la grandeur $\frac{3}{4}RP$ de la demi-cycloïde, le quotient $\frac{5}{6}R$ sera

la distance du centre de gravité de la demi-cycloïde à la droite *ta*, ainsi que nous l'avions trouvé ci-dessus.

Et on trouveroit à peu près de la même maniere la distance de ce centre au diametre A*a*, mais comme il faudroit varier la construction, & que d'ailleurs nous serions obligé de revenir à la plupart des choses que nous avons dites ci-dessus, je me dispenserai d'en parler pour ne pas rendre cet Ouvrage trop long.

APPLICATION

Des Principes précédens aux Cycloïdes rallongées & raccourcies.

176. Quoique dans la Cycloïde rallongée, le mouvement du point A autour de son centre aye moins de vitesse que le mouvement du cercle le long de la base *at*, & que dans la raccourcie, il en aye davantage, cependant comme ces deux mouvemens sont uniformes, il est sur que quand le cercle aura parcouru le tiers ou le quart, &c. de la base *at*, le point A aura parcouru le tiers ou le quart de sa demi-circonférence, de même que quand le cercle aura parcouru la ligne entiere *at*, le point A qui se trouvera en *t* aura parcouru sa demi-circonférence. Ainsi la construction de ces cycloïdes se fera de même que pour la cycloïde ordinaire, c'est-à-dire ayant divisé la demi-circonférence en parties égales (*Fig.* 114. 115.) l'on tirera les cordes X*a*, B*a*, D*a*, &c. & les droites indéfinies X*m*, B*n*, D*o*, &c. paralleles à la base ; ensuite on divisera la base en un même nombre de parties égales qui seront plus grandes ou moindres que celles de la demi-circonférence, selon que la base *at* sera plus grande ou moindre que cette demi-circonférence, & par les points de division, on menera les droites *xm*, *bn*, *do*, &c. aux points *m*, *n*, *o*, &c. qui seront autant de points de la courbe que l'on joindra par la ligne *tonm*A. Car quand le cercle aura parcouru la partie *ax*, il se trouvera dans la position *xrh*, & touchera la droite *at* par le point *u*, & par conséquent le point A aura parcouru un arc égal à l'arc *au* ; tirant donc la droite X*m* parallele à la base, l'arc *hm* sera égal à l'arc AX, ou à l'arc *au*, & le point A se trouvera au point *m* ; & comme l'arc *mrx* sera égal à l'arc XD*a*, la corde *mx* sera égale & parallele à la corde X*a*, & la droite *m*X égale à la droite *ax*, & il en sera de même à l'égard des autres points *n*, *o*, &c.

Puis donc que la droite X*m* est égale à la droite *ax*, & que

ax est à la base *ta*, comme l'arc XA à la demi-circonférence, il s'ensuit que les droites *m*X, B*n*, &c. menées entre la courbe de la cycloïde & la demi-circonférence parallelement à la base *at*, sont à cette base, comme les arcs XA, BA, &c. sont à la demi-circonférence; & delà on tire une maniere aisée de trouver la grandeur des cycloïdes rallongées & raccourcies.

Supposons par exemple que la base *ta* (*Fig.* 114.) soit à la demi-circonférence comme 4 à 5, elle sera aussi à la base *ta* de la cycloïde ordinaire (*Fig.* 108.) comme 4 à 5. Or dans la cycloïde ordinaire, l'espace A*ota*DA est double du demi-cercle; donc dans la cycloïde raccourcie (*Fig.* 114.) cet espace sera à celui de la cycloïde ordinaire comme 4 à 5, puisqu'il est composé d'Elemens qui sont aux Elemens de l'espace de la cycloïde ordinaire, comme 4 à 5. Ayant donc trouvé ci-dessus que l'espace A*ota*DA de la cycloïde ordinaire est $\frac{1}{2}$RP, nous dirons 5, 4 :: $\frac{1}{2}$RP. $\frac{4}{10}$RP $=$ $\frac{2}{5}$RP, & nous aurons $\frac{2}{5}$RP pour la valeur de l'espace A*ota*DA de la cycloïde raccourcie, & ajoûtant à cet espace la valeur $\frac{1}{4}$RP du demi-cercle, la somme $\frac{2}{5}$RP $+$ $\frac{1}{4}$RP $=$ $\frac{13}{20}$RP sera la valeur de la demi-cycloïde raccourcie.

Supposons de même que la base *at* de la cycloïde rallongée (*Fig.* 115.) soit à la base *at* de la cycloïde ordinaire comme 6 à 5, nous dirons 5, 6 :: $\frac{1}{2}$RP. $\frac{6}{10}$RP $=$ $\frac{3}{5}$RP, & nous aurons $\frac{3}{5}$RP pour la valeur de l'espace A*ota*DA de la cycloïde rallongée, & ajoûtant à cet espace la valeur $\frac{1}{4}$RP du demi-cercle la somme $\frac{3}{5}$RP $+$ $\frac{1}{4}$RP $=$ $\frac{17}{20}$RP sera la valeur de la demi-cycloïde rallongée.

Maintenant pour trouver le moment de la demi-cycloïde raccourcie (*Fig.* 114.) par rapport à *ta*, nous sçavons que ce moment est composé du moment du demi-cercle AD*a*, & de celui de l'espace A*ota*DA. Or les Elemens de l'espace A*ota*DA sont proportionnels aux Elemens de l'espace A*ota*DA de la cycloïde ordinaire (*Fig.* 108.), & les distances de leurs centres de gravité à la base *at*, sont les mêmes; donc les momens des figures étant en raison composée de la raison des grandeurs, & de celle des distances qui se trouve ici la même, il s'ensuit que le moment de l'espace A*ota*DA (*Fig.* 114.) est au moment de l'espace A*ota*DA (*Fig.* 108.) comme la grandeur à la grandeur, c'est-à-dire, comme $\frac{2}{5}$RP à $\frac{1}{2}$RP, ou comme $\frac{2}{5}$ à $\frac{1}{2}$, ou comme 4, 5. Or nous avons trouvé ci-dessus que le moment de la figure A*ota*DA (*Fig.* 108.) est $\frac{3}{8}R^2P$, faisant donc cette analogie $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$ :: $\frac{3}{8}R^2P$.

$\frac{6}{20}R^2P = \frac{3}{10}R^2P$, nous aurons $\frac{3}{10}R^2P$ pour le moment de l'espace $AotaDA$ par rapport à ta, & ajoûtant à ce moment celui du demi-cercle qui est $\frac{1}{4}R^2P$, la somme $\frac{3}{10}R^2P + \frac{1}{4}R^2P = \frac{11}{20}R^2P$ sera le moment de la demi-cycloïde raccourcie par rapport à ta, & delà on trouvera facilement la distance de son centre de gravité à la droite ta, & le reste comme ci-dessus.

De même, pour trouver le moment de la même cycloïde par rapport au diametre Aa, nous sçavons que ce moment est égal à la moitié de la somme des quarrés des Elemens mO, nV, &c. & que ces Elemens sont composés des sinus XO, BV, &c. & des droites mX, nB, &c. Supposant donc comme ci-dessus que ces droites soient aux arcs correspondans, comme 4 à 5, elles seront $\frac{4}{5}a$, & les Elemens mO, nV, &c. seront $\frac{4}{5}a + s$, dont les quarrés sont $\frac{16}{25}a^2 + \frac{8}{5}as + s^2$; ainsi il s'agit de trouver la somme de tous les $\frac{16}{25}a^2 + \frac{8}{5}as + s^2$, & d'en prendre ensuite les moitiés $\frac{8}{25}a^2 + \frac{4}{5}as + \frac{1}{2}s^2$.

Or nous avons trouvé ci-dessus que tous les $\frac{1}{2}a^2$ étoient $\frac{1}{8}P^2R - 2R^3$; donc tous les a^2 sont $\frac{1}{4}P^2R - 4R^3$, & tous les $\frac{8}{25}a^2$ sont $\frac{8}{100}P^2R - \frac{32}{25}R^3 = \frac{2}{25}P^2R - \frac{32}{25}R^3$.

De même nous avons trouvé que tous les as étoient $\frac{1}{16}P^2R$; donc tous les $\frac{4}{5}as$ sont $\frac{4}{80}P^2R = \frac{1}{20}P^2R$.

Enfin nous avons trouvé que tous les $\frac{1}{2}s^2$ sont $\frac{2}{3}R^3$. Ajoûtant donc ces trois valeurs ensemble, la somme $\frac{2}{25}P^2R - \frac{32}{25}R^3 + \frac{1}{20}P^2R + \frac{2}{3}R^3 = \frac{13}{100}P^2R - \frac{46}{75}R^3$ sera le moment de la demi-cycloïde raccourcie par rapport au diamétre Aa. Et delà on trouvera facilement la distance du centre de gravité au diametre Aa, & le reste comme ci-dessus, & on feroit la même chose pour la cycloïde rallongée.



CHAPITRE X.

CHAPITRE X.

Des Figures des Cordes, des Tangentes, & de quelques autres Figures qui regardent le demi-cercle.

DEFINITION.

177. SI après avoir divisé la demi-circonférence AD*a* (*Fig*. 118) en plusieurs parties égales, & mené les cordes AX, AB, AD, &c. on prend une ligne droite AT égale à la demi-circonférence du cercle, & divisée en un même nombre de parties égales, & qu'on éleve sur tous les points de division des perpendiculaires égales aux cordes correspondantes la figure AT*t* que ces perpendiculaires rempliront s'appellera *Figure des Cordes* du demi-cercle qui soutiennent des arcs arithmétiquement proportionnels.

PROPOSITION XLIX.

178. *Trouver la grandeur & les momens de la figure des Cordes & de ses parties par rapport aux differens axes de mouvement.*

On sçait que la moitié d'une corde de cercle est égale au sinus de la moitié de son arc. Or cela posé, si l'on divise le quart de circonférence en petites parties, & qu'après avoir tiré de tous les points de division des sinus droits ou des perpendiculaires au diametre, l'on divise la demi-circonférence en un même nombre de parties, & l'on mene les cordes du point A à tous les points de division; la somme des cordes du demi-cercle sera double de la somme des sinus du quart de cercle, chaque corde étant double du sinus correspondant, à cause qu'elle soutiendra un arc double de celui du sinus; ainsi si d'une part on prend une ligne droite égale au quart de circonférence, & que l'ayant divisée en parties égales, on éleve sur les points de division des perpendiculaires égales aux sinus correspondans, & que de l'autre on prenne une droite égale à la demi-circonférence, & qu'on y éleve perpendiculairement les cordes, comme il vient d'être dit dans la définition précédente, la premiere de ces figures sera la figure *adc* (*Fig*. 100.) des sinus droits du quart de cercle, & la seconde AT*t* (*Fig*. 118.) sera celle des cordes du demi-cercle, & ces deux figures seront semblables, car les cordes

ou les Elemens de la seconde seront doubles des sinus ou des Elemens de la premiere, & la distance des Elemens de la seconde entr'eux sera aussi double de la distance des Elemens de la premiere entr'eux, à cause que les parties comprises entre les divisions de la demi-circonférence sur lesquelles tombent les cordes, sont doubles des parties comprises entre les divisions du quart de circonférence sur lesquelles les sinus tombent.

Puis donc que ces deux figures sont semblables, elles sont entr'elles comme les quarrés de leur base ou de leur hauteur, c'est-à-dire la figure AT*t* des cordes (*Fig.* 118.) est à la figure *adc* des sinus droits du quart de cercle, comme 4 est à 1, à cause de la base AT double de la base *ad*. Or la figure *adc* vaut R^2, ainsi qu'il a été dit plus haut, donc la figure AT*t* des cordes vaut $4R^2$.

La portion *bra* de la figure *adc* (*Fig.* 100.) est *u*R (*N.* 127.) donc la portion correspondante AE*e* de la figure des cordes est 4*u*R, & ainsi des autres; où il faut observer qu'afin que la figure *adc* réponde parfaitement à celle des cordes, il faut supposer sa base *ad* divisée en six parties, & élever sur ces divisions des perpendiculaires, car alors on verra que le sinus *br* se trouvera le quatriéme en commençant depuis *a*, de même que la corde E*e* (*Fig.* 118.) se trouve la quatriéme à commencer depuis A.

Les momens de la figure des cordes par rapport à AT, ou à A*a* se trouveront de la même façon; car cette figure étant semblable à la figure *adc* des sinus (*Fig.* 100.) les distances de son centre de gravité à ces différens axes de mouvement seront aux distances du centre de gravité de la figure *adc* comme la base à la base, c'est-à-dire, comme 2 à 1, & comme les momens des figures sont en raison composée de la raison des grandeurs qui est ici la raison doublée des bases, & de la raison des distances qui se trouve égale à celle des bases, il s'ensuit que les momens de la figure des cordes par rapport à ces différens axes seront aux momens de la figure *adc* des sinus en raison triplée de la raison des bases, ou comme 8 est à 1.

Ayant donc trouvé (*N.* 162.) que le moment de la figure *dca* (*Fig.* 100.) par rapport à *ta* est $\frac{1}{16}PR^2$, nous aurons $\frac{8}{16}PR^2 = \frac{1}{2}PR^2$ pour le moment de la figure des cordes par rapport à AT, & de la même façon on trouvera les autres momens de la figure & de ses parties par rapport à ses différens axes, ce qui est trop facile pour m'y arrêter davantage.

DEFINITION

179. Soit le diametre A*a* (*Fig.* 119.) d'un demi-cercle divisé en parties égales, & du point A pris pour centre soient décrits des arcs de cercles qui passent par les points de division O, V, C, &c. & qui coupent la demi-circonférence aux points X, B, D, &c. ausquels soient menées du point A les cordes AX, AB, AD, &c. il est évident que ces cordes seront arithmetiquement proportionnelles puisqu'elles sont égales aux droites AO, AV, AC, &c. D'autre part sur l'extremité A de la base AT de la figure des cordes AT*t* (*Fig.* 118.) soit élevée une perpendiculaire A*a* égale au diametre A*a* du demi-cercle, & divisée en même nombre de parties égales aux points *o*, *u*, *c*, &c. desquelles soient menées des droites *om*, *un*, *cb*, &c. paralleles à la base; & des points *m*, *n*, *b*, soient abbaissées les perpendiculaires *mr*, *ns*, *b*B, &c. sur la base AT. Ces perpendiculaires étant égales aux droites A*o*, A*u*, A*c*, &c. seront égales aux cordes arithmétiquement proportionnelles du cercle, & les droites *om*, *un*, *cb*, &c. étant égales aux droites A*r*, A*s*, A*b*, &c. seront par conséquent égales aux arcs correspondans aux cordes arithmétiquement proportionnels, & comme ces droites *om*, *un*, *cb*, &c. sont les Elemens de la figure A*ta*, nous appellerons cette figure, *Figure des arcs correspondans aux cordes arithmétiquement proportionnelles.*

PROPOSITION L.

180. *Trouver la grandeur & les momens de la figure* A*ta* (Fig. 118.) *des arcs correspondans aux cordes arithmétiquement proportionnelles du demi-cercle.*

Il est visible que la figure AT*t* des cordes étant semblable à la figure *adc* des sinus (*Fig.* 100.) la figure A*ta* des arcs (*Fig.* 118.) doit être aussi semblable à la figure *acm* (*Fig.* 100.) l'une & l'autre étant le complement au rectangle circonscrit. Ainsi la figure A*ta* (*Fig.* 118.) est quadruple de la figure *acm* (*Fig.* 100.) Cela posé.

Le rectangle *adcm* (*Fig.* 100.) est $\frac{1}{4}$PR; ôtant donc de ce rectangle la figure $dca = R^2$, le reste $\frac{1}{4}PR - R^2$ sera la valeur de la figure *acm*, dont la figure A*ta* (*Fig.* 118.) sera $PR - 4R^2$.

De même le rectangle *zr4a* (*Fig.* 100.) est *as*, & ôtant de ce rectangle la valeur *u*R de la portion *zra*, le reste *as*—*u*R est

la valeur de la portion *ar*4. Donc la portion correspondante A*nu* (*Fig.* 118.) est $4as - 4uR$, & ainsi des autres parties.

Le moment par rapport à *ad* (*Fig.* 100.) du rectangle *adcm* est $\frac{1}{4}PR \times \frac{1}{2}R = \frac{1}{8}PR^2$, & ôtant de ce moment le moment correspondant de la figure *adc* qui est $\frac{1}{16}R^2P$, le reste $\frac{1}{8}PR^2 - \frac{1}{16}R^2P$ sera le moment de la figure *acm* par rapport à *at*. Mais la figure A*ta* (*Fig.* 118.) étant quadruple de la figure *acm*, son moment est octuple, à cause que la distance de son centre de gravité doit être double, donc le moment de la figure A*ta* par rapport à AT, est $PR^2 - \frac{1}{2}R^2P$, & ainsi des autres parties.

DEFINITION.

181. Si sur les divisions *o*, *u*, *c*, &c. de la droite A*a* (*Fig.* 118.) on éleve des perpendiculaires *oh*, *up*, *cq*, &c. égales aux sinus droits des arcs correspondans aux cordes arithmétiquement proportionnelles, la figure A*qa* que ces droites formeront s'appellera *Figure des sinus correspondans aux arcs des cordes arithmétiquement proportionnelles.*

PROPOSITION LI.

182. *Trouver la grandeur de la figure des sinus correspondans aux cordes arithmétiquement proportionnelles, & la grandeur de ses parties.*

Ayant mené les cordes arithmétiquement proportionnelles AX, AB, AD, &c. (*Fig.* 119.) dans le demi-cercle ADC, tirons les sinus droits XN, BM, &c. & les cordes X*a*, B*a*, &c. à l'autre extremité du diametre.

Les triangles semblables *a*BA, *a*BM, donnent A*a*, AB :: *a*B, BM, ou 2R. Or $aA = 2R$, $AB = c$, & $aB = \sqrt{4R^2 - c^2}$, à cause du triangle rectangle *a*BA, donc 2R, *c* :: $\sqrt{4R^2 - c^2}$. $\frac{c\sqrt{4R^2 - c^2}}{2R}$ = BM; & par conséquent la somme des sinus droits correspondans aux cordes arithmétiquement proportionnelles, est égale à la somme de tous les $\frac{c\sqrt{4R^2 - c^2}}{2R}$.

Pour trouver donc la somme de tous ces sinus, du point A (*Fig.* 118.) & de l'intervalle A*a* décrivons le quart de cercle A*a*E, & prolongeons les sinus *oh*, *up*, *cq*, &c. jusqu'à ce qu'ils rencontrent la circonférence du quart de cercle; je n'en ai prolongé qu'un en Q pour ne pas broüiller la figure. Le triangle rectangle

AQc, donne $\overline{AQ}^2 = \overline{Qc}^2 + \overline{cA}^2$. Or AQ étant égal au diametre Aa du demi-cercle ADa, vaut 2R & $\overline{AQ}^2 = 4R^2$, de même Ac étant une des cordes arithmétiquement proportionnelles de ce demi-cercle vaut c, & $\overline{Ac}^2 = c^2$; donc $\overline{Qc}^2 = 4R^2 - c^2$, & $Qc = \sqrt{4R^2 - c^2}$. Ainſi tous les prolongemens des ſinus oh, up, cq, &c. ou toutes les ordonnées au quart de cercle AaE, compoſent la ſomme de tous les $\sqrt{4R^2 - c^2}$; & multipliant ces ordonnées par leurs diſtances Ao, Au, Ac, &c. à la droite AE, les produits ou la ſomme de tous les $c\sqrt{4R^2 - c^2}$ ſera le moment du quart de cercle AaE par rapport à AE. Or ſi le rayon de ce quart de cercle étoit égal au rayon du demi-cercle ADa, ſon moment ſeroit $\frac{2}{3}R^3$; donc puiſque le rayon eſt double, & que ce moment eſt par conſéquent quadruple, ce moment ſera $\frac{8}{3}R^3$ égal à tous les $c\sqrt{4R^2 - c^2}$, & diviſant ce moment par 2R, nous aurons $\frac{4R^2}{3} =$ à tous les $\frac{c\sqrt{4R^2 - c^2}}{2R}$ ou à la ſomme des ordonnées à la figure Aaq. Donc la grandeur de cette figure eſt $\frac{4}{3}R^2$.

Le moment du ſecteur QAE par rapport à AE ſeroit $\frac{1}{3}uR^2$, ſi ſon rayon étoit R, c'eſt-à-dire le tiers du produit du ſinus verſe multiplié par le quarré du rayon. Or le rayon eſt 2R, & le ſinus verſe $EZ = AE - AZ = AE - Qc = 2R - \sqrt{4R^2 - c^2}$. Faiſant donc le produit de $4R^2$ par $2R - \sqrt{4R^2 - c^2}$, & le diviſant par 3, nous aurons $\frac{8}{3}R^3 - \frac{4}{3}R^2\sqrt{4R^2 - c^2}$ qui ſera le moment du ſecteur QAE par rapport à AE.

Le triangle QcA eſt $\frac{1}{2}c\sqrt{4R^2 - c^2}$, à cauſe de ſa hauteur $Ac = c$ & de ſa baſe $Qc = \sqrt{4R^2 - c^2}$; or la diſtance de ſon centre de gravité à la droite AE eſt $\frac{2}{3}c$, donc ſon moment par rapport à cette droite eſt $\frac{1}{3}c^2\sqrt{4R^2 - c^2}$. Ajoutant donc ce moment à celui du ſecteur QAE par rapport à la même droite AE, la ſomme $\frac{8}{3}R^3 - \frac{4}{3}R^2\sqrt{4R^2 - c^2} + \frac{1}{3}c^2\sqrt{4R^2 - c^2}$ ſera le moment de la portion EQcA par rapport à AE. Pour abreger faiſant $z = \sqrt{4R^2 - c^2}$, nous aurons $\frac{8}{3}R^3 - \frac{4}{3}R^2 z + \frac{1}{3}c^2 z$, & comme $4R^2 - c^2 = z^2$, nous aurons $\frac{8}{3}R^3 - \frac{1}{3}z^3$ pour le moment de la portion EQcA. Diviſant donc ce moment par 2R, le quotient $\frac{4}{3}R^2 - \frac{1z^3}{6R}$ ſera la ſomme de tous les $\frac{c\sqrt{4R^2 - c^2}}{2R}$,

ou de tous les sinus *oh*, *up*, &c. jusqu'au plus grand *cq*. Ainsi la portion A*cq* sera $\frac{4R^2}{3} - \frac{z^3}{6R}$, & ainsi des autres.

Comme nous n'aurons pas besoin dans le reste de cet Ouvrage du centre de gravité, ni des momens de la figure dont nous venons de parler, je n'en dirai rien ici de peur de m'écarter trop de mon sujet.

DEFINITION.

183. Soit un quart de cercle ABC (*Fig.* 120.) dont nous supposons que le rayon AB ait été divisé en parties égales; soient menées des points de division, D, E, F, &c. les sinus droits DH, EI, &c. du point B, les secantes BM, BN, &c. & du point A les tangentes AM, AN, &c. les droites AD, AE, AF, &c. arithmétiquement proportionnelles seront les sinus verses des arcs AH, AI, &c. dont les droites DH, EI, &c. sont les sinus droits, & les droites BD, BE, BF, qui sont aussi arithmétiquement proportionnelles seront les sinus des complemens des arcs AH, AI, &c. De plus, à cause des triangles semblables BDH, BAM, nous aurons BD, DH :: BA, AM, c'est-à-dire le sinus du complement BD d'un arc AH, est au sinus droit de cet arc, comme le rayon à la tangente. Cela posé,

Prenons une droite *ab* (*Fig.* 121.) égale au rayon AB, divisons-la en un même nombre de parties aux points *o*, *g*, *f*, *d*, &c. les droites *bo*, *bg*, *bf*, &c. representeront les sinus des complemens répondans aux sinus verses arithmétiquement proportionnels. Faisons le triangle rectangle isoscele *axb*, dont les Elemens *ox*, *gx*, *fx*, &c. seront égaux chacun à chacun aux sinus des complemens *bo*, *bg*, *bf*, &c. concevons un demi-cercle *a*R*b* élevé perpendiculairement sur la droite *ab*, & prenons des quatriémes proportionnelles *dm*, *en*, *fs*, &c. à chaque sinus de complement, à chaque sinus droit correspondant, & au rayon *ab*, ces quatriémes proportionnelles formeront une figure *ab*ZK que nous appellerons *Figure des tangentes*, parce que ses Elemens sont les tangentes des arcs AH, AI, AL, &c. (*Fig.* 120.) correspondans aux sinus verses arithmétiquement proportionnels *ad*, *ae*, *af*, &c.

PROPOSITION LII.

184. *Trouver la grandeur & les momens de la figure des tangentes.*

Chaque Element de cette figure étant une quatriéme proportionnelle à un ſinus de complement que nous appellerons x, à un ſinus droit s & au rayon R, la ſomme de ces Elemens ſera donc la ſomme de tous les $\frac{sR}{x}$. Or pour trouver cette ſomme ſuppoſons qu'au lieu du troiſiéme terme R de cette Proportion nous ayions s, c'eſt-à-dire que la proportion ſoit $x, s :: s, \frac{s^2}{x}$ la ſomme des Elemens ſeroit donc la ſomme de tous les $\frac{s^2}{x}$, ou la ſomme de tous les $\frac{R^2-x^2}{x}$, à cauſe que s^2 ou $\overline{DH}^2$ eſt égal à R^2-x^2, ou $\overline{AB}^2-\overline{DB}^2$ (*Fig.* 120.) par la proprieté du cercle.

Or les x étant arithmétiquement proportionnels, & les R^2 étant une grandeur conſtante, la ſuite des $\frac{R^2}{x}$ eſt la ſuite réciproque des premieres puiſſances, car les premieres puiſſances étant ſuppoſées 0. 1. 2. 3. 4, &c. on ſçait que la ſuite qui leur eſt réciproque eſt $\frac{1}{0}$. $\frac{1}{1}$. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$, &c. c'eſt-à-dire la ſuite des égaux diviſés par la ſuite des premieres puiſſances, ainſi que nous l'avons dit dans l'*Arithmétique des Infinis*, mais l'expoſant de cette ſuite eſt -1, & par conſéquent la ſomme de ces termes eſt au dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme 1 eſt à $-1+1$, ou comme 1 à 0, c'eſt-à-dire que la ſuite des $\frac{R^2}{x}$ eſt infiniment grande. Que ſi de cette ſuite $\frac{R^2}{x}$ nous ôtons la ſuite des $\frac{x^2}{x}$, c'eſt-à-dire la ſuite des x dont la ſomme eſt une grandeur finie, puiſqu'elle eſt à ſon dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme 1 à 2, le reſte $\frac{R^2-x^2}{x}$ ſera encore une grandeur infinie, car de l'infini ôtez le fini, le reſte eſt encore infini.

Maintenant la ſomme des Elemens de la figure des tangentes n'eſt pas la ſomme des $\frac{s^2}{x}=\frac{R^2-x^2}{x}$, comme nous venons de le ſuppoſer, mais elle eſt la ſomme de tous les $\frac{sR}{x}$, & comme chaque sR eſt plus grand que chaque s^2, & qu'en fait de diviſion le quotient eſt d'autant plus grand que le dividende l'eſt davantage, il s'enſuit que la ſomme de tous les $\frac{sR}{x}$ eſt encore plus grande que la ſomme de tous les $\frac{s^2}{x}$. Or celle-cy eſt infinie

comme nous venons de dire, donc la somme de tous les $\frac{sR}{x}$ ou la figure des tangentes est à plus forte raison infinie.

Mais si la figure des tangentes est infinie, il n'en est pas de même de son moment par rapport à sa base bZ (*Fig.* 121.), ni du solide qu'elle produit en tournant autour de cette base; car son moment est la somme des $\frac{sR}{x}$, multipliez chacun par sa distance bo, bg, bf, &c. (*Fig.* 121.), c'est-à-dire par son x correspondant; ainsi ce moment est la somme de tous les $\frac{sRx}{x}$ égaux à tous les sR. Or tous les s sont le quart de cercle abR, donc tous les sR sont égaux au quart de cercle multiplié par le rayon, ou à une figure cylindrique, qui auroit pour base le quart de cercle & pour hauteur son rayon; & mettant au lieu de R sa circonference, le solide formé par la circonvolution de la figure des tangentes autour de bZ, sera égal à une figure cylindrique qui auroit pour base le quart de cercle, & pour hauteur la circonference P du rayon R.

Quant au centre de gravité, il est visible que cette figure n'en a point, car le moment étant fini, & la grandeur infinie, si l'un divise le moment par la grandeur, le quotient sera infiniment petit, & par conséquent la distance du centre de gravité à la droite bZ sera égale à zero, & on ne peut pas dire que ce centre soit sur la ligne bZ, puisque la figure est toute entiere de l'autre côté de cette ligne. Donc, &c.

REMARQUES

Nécessaires pour l'intelligence du Chapitre suivant.

185. Nous avons dit en parlant de l'Arithmetique des Infinis, que si l'on prend des troisiémes proportionnelles aux Elemens d'une demi-Parabole ABC (*Fig.* 122.), & aux Elemens d'un rectangle de même hauteur, ces troisiémes proportionnelles formeront une figure ABDVT, dont les Elemens seront la suite reciproque des racines quarrées des nombres 0. 1. 2. 3. 4, &c. que cette figure sera au rectangle ABDE fait sur sa base comme 2 à 1, & qu'en quelque part que l'on coupe cette figure par une droite MG parallele à sa base, la portion restante AMGVT sera au rectangle AMGF fait sur sa base MG encore comme 2 à 1. Nous ajoûterons

ajoûterons maintenant que si l'on veut couper cette figure en raison donnée, il faut couper sa hauteur AB, ensorte que AP soit à AB, en raison doublée de la raison donnée, & pour démontrer ceci.

Supposons que la base CB de la demi-Parabole soit égale à sa hauteur AB, que nous appellerons 2R, son parametre sera aussi 2R; car lorsque l'ordonnée d'une Parabole est égale à l'abscisse, le parametre est aussi égal à l'abscisse, comme il est démontré dans les sections coniques. Supposons encore que le rectangle dont les Elemens sont moyens proportionnels à ceux de la demi-Parabole & de la figure ABDVT, ait même base que la demi-Parabole, & enfin qu'on veuille couper la figure ABDVT dans la raison de 1 à 2, ou de R à 2R, prenons une troisiéme proportionnelle $\frac{1}{2}$R aux deux lignes 2R & R nous aurons la raison $\frac{1}{2}$R, 2R qui sera doublée de la raison R, 2R; ainsi prenant AP $=\frac{1}{2}$R, & multipliant cette abscisse par le parametre 2R, la racine quarrée $\sqrt{R^2}=$R du produit sera l'ordonnée correspondante PX; & prenant une troisiéme proportionnelle à l'abscisse PX$=$R & à l'Element 2R du rectangle générateur de la figure, cette troisiéme proportionnelle $\frac{4RR}{R}=4R$ sera l'Element correspondant de la figure ABDVT, & multipliant cet Element par l'abscisse AP$=\frac{1}{2}$R, le produit $2R^2$ sera le rectangle APSR; donc la portion APSVT de la figure sera $4R^2$. Or la figure entiere étant double du rectangle ABDE$=4R^2$ est $8R^2$, donc la portion APSVT est à la figure entiere comme $4R^2$ à $8R^2$ ou comme 1 à 2, ainsi qu'il étoit proposé, & on trouvera toujours la même chose en quelque raison qu'on veuille couper la figure.

On peut démontrer ceci plus généralement en cette sorte: Supposons qu'on veuille couper la figure ABDVT ensorte qu'elle soit à la partie APSVT comme 3 à 1, le rectangle ABDE sera donc au rectangle APSR comme 3 à 1, & comme ces rectangles sont en raison composée de leurs hauteurs & de leurs bases, il s'ensuit que la raison composée des hauteurs & des bases est 3, 1, je nomme la hauteur AB$=x$ & la hauteur AP$=y$, les bases BD, PS étant reciproques aux ordonnées CB, XP de la Parabole, & ces ordonnées étant entr'elles comme les racines des abscisses AB, AP, ou comme $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, il s'ensuit que les bases BD, PS sont comme $\sqrt{y}$, $\sqrt{x}$, ainsi les rectangles

ABDF, APSR, font entr'eux comme $x\sqrt{y}$, $y\sqrt{x}$, donc on doit avoir $x\sqrt{y}$, $y\sqrt{x}$ :: 3, 1, & élevant tout au quarré, on aura xxy, yyx :: 9, 1; & divisant la premiere raison par yx, on aura y, x :: 9, 1, c'est-à-dire, la hauteur AB doit être à la hauteur AP, comme le quarré de 3 au quarré de 1, ou en raison doublée de 3 à 1, c'est-à-dire, en raison doublée de la raison donnée.

Si l'on décrit un demi-cercle autour du diametre AB, & qu'ayant mené une corde AZ, on tire de son extrémité une droite ZS parallele à la base BD & qui coupe la figure ABDVT, la portion coupée APSVT sera à la figure entiere comme la corde AZ au diametre AB; car pour couper cette figure dans la raison de AZ à AB, il faut couper AB, ensorte que AP & AB soient en raison doublée de AZ à AB, or les trois lignes AP, AZ, AB, sont en proportion continue à cause des triangles rectangles semblables PAZ, ZAB, donc AP est à AB en raison doublée de AP à AZ, & par conséquent AB étant coupée en P, ensorte que AP, AB sont en raison doublée de AZ à AB, la portion APSVT est à la figure entiere comme AZ à AB.

186. Si de tous les points du diametre AC d'un demi-cercle ADC (*Fig.* 123.), on éleve des perpendiculaires HB, OD, &c. & qu'ayant mené du point A les cordes correspondantes AB, AD, on éleve sur les mêmes points du diametre des perpendiculaires HL, OM, &c. égales aux cordes, la figure APC que ces perpendiculaires formeront sera une demi-Parabole quarrée dont le parametre sera égal au diametre AC; car par la proprieté du cercle nous avons :: AH, AB, AC, donc $\overline{AB}^2 = AH \times AC$, c'est-à-dire, le quarré de la corde AC ou de l'ordonnée HL, est égal à l'abscisse AH multipliée par le diametre AC; or la même chose arrivera à l'égard des autres cordes AD, AE, &c. ou des ordonnées, OM, IN, &c. donc les quarrés des ordonnées HL, OM, IN, &c. sont entr'eux comme les rectangles de leurs abscisses AH, AO, &c. par la grandeur constante AC, mais les quarrés des ordonnées à la Parabole quarrée sont dans la même raison, donc la figure APC est une Parabole quarrée dont le parametre est AC.

187. Si du sommet A du diametre AC d'un demi-cercle ADC (*Fig.* 124.) on mene une corde AD prolongée en I, & que de deux points R, S du diametre on éleve deux perpendiculaires RB, SI, dont la premiere coupe la corde en dedans du cer-

cle en M, & la seconde la coupe hors du cercle en I. Je dis 1°. que la partie BM de la premiere perpendiculaire comprise entre la circonference & la corde est plus petite que l'arc correspondant BD. Tirez la corde BD; dans le triangle BMD l'angle BMD étant entre la circonference & le centre vaut la moitié de l'arc AP ou AB son égal plus la moitié de l'arc BD, & l'angle BDA ayant son sommet à la circonference ne vaut que la moitié de l'arc AB, donc l'angle BDA est moindre que l'angle BMD, & par conséquent BD opposé au plus grand angle est plus grand que le côté BM opposé au moindre; or BD étant la corde de l'arc BD est moindre que cet arc, donc à plus forte raison BM est moindre que l'arc BD.

Je dis, 2°. que la partie IH de la seconde perpendiculaire IS comprise entre la circonference & le prolongement de la corde est plus grande que l'arc correspondant HD. Du point D tirez la tangente DL, & la corde DC; l'angle LDC du segment DC vaut la moitié de l'arc DC, & est égal par conséquent à l'angle IAC qui a son sommet en A, & qui s'appuye sur le même arc; donc le complement LDI de l'angle LDC à 90 degrés est égal au complement de l'angle IAC à 90 degrés. Or à cause du triangle rectangle IAC l'angle I est le complement de l'angle IAC, donc l'angle I est égal à l'angle IDL, & le triangle IDL étant isoscele les côtés IL, LD sont égaux; ajoûtant donc à l'un & à l'autre la partie LH, nous aurons IL + LH, ou IH égal à DL + LH; mais DL + LH est plus grand que l'arc DH renfermé entre ces lignes, donc IH est aussi plus grand que cet arc.

188. *Une demi-cycloïde* ABC *étant décrite* (Fig. 125.), *si d'un point* D *pris sur la courbe on mene une droite* DH *parallele à la base; & que du point* M *où cette droite coupe la circonference du demi-cercle, on mene la corde* MA *au sommet, & du point* D *la droite* FDE *parallele à la corde* MA, *je dis que la droite* FDE *touche la cycloïde au point* D *sans la couper.*

Prenons sur le diametre AB deux points G, I, l'un en dessous du point H & l'autre au-dessous, & tirons les droites GE, IF paralleles à la base; à cause des paralleles EF, AP, les droites QE, MD, PE sont égales; or par la proprieté de la cycloïde la droite DM est égale à l'arc MA ou à l'arc MN, plus l'arc NA; donc la droite QE est aussi égale à l'arc MN, plus l'arc NA; mais la partie NQ de la droite QE est moindre que l'arc MN, comme il vient d'être prouvé, donc le reste EN est plus grand

que l'arc NA, & par conséquent le point E est hors de la courbe, car s'il la touchoit, la droite EN seroit égale à l'arc NA, & si le point E étoit entre la courbe & le demi-cercle, la droite EN seroit moindre que cet arc.

De même la droite PF étant égale à la droite MD, est aussi égale à l'arc AM ou à l'arc LA moins l'arc LM, mais la droite PL est plus grande que l'arc LM, donc la droite PF + PL ou LF est plus grande que l'arc AM + LM ou que l'arc LM, donc le point F est encore hors de la cycloïde, car s'il étoit sur la courbe, la droite LF seroit égale à l'arc LM, & s'il étoit dans l'aire de la figure la droite LF seroit moindre que cet arc. Or comme la même chose arrivera à l'égard de toutes les paralleles à la base ou au-dessus ou au-dessous de DM, il s'ensuit que la droite FDE ne touche la courbe qu'au point D.

CHAPITRE XI.

Des momens de la courbe de la demi-cycloïde, c'est-à-dire, des surfaces des onglets qui sont les momens de la demi-cycloïde à l'égard de différens axes de mouvement.

PROPOSITION LIII.

189. *Trouver la grandeur de la courbe de la cycloïde.*

Nous avons déja donné cette grandeur de deux façons dans la *Theorie & Pratique des Geometres*; mais pour faire voir quelle est la fecondité des Mathematiques, nous allons en donner ici une troisiéme.

Soit la demi-cycloïde ABD (*Fig.* 126.) avec son demi-cercle générateur ACB; coupons le diametre AB en petites parties égales aux points E, F, G, &c. & menant par ces points les droites EH, FL, &c. paralleles à la base BD, tirons les cordes RA, MA, &c. & les tangentes HS, LN, &c. à la courbe; ces tangentes étant infiniment petites & infiniment proches de la cycloïde, leur somme ne differera point de la courbe ALD. Or à cause des triangles semblables AMF, AQE, nous avons AF, AM :: EF, QM, & à cause des triangles semblables AMF, ABM, nous avons AF, AM :: AM, AB, donc AM, AB ::

EF, QM, & $\frac{AB \times EF}{AM} = QM$; mais AB, EF ſont des grandeurs conſtantes qui ne varient point, & les AM ſont entr'eux comme les Elemens d'une Parabole quarrée, ainſi les QM ſont les reciproques aux AM; car quoique ſelon ce que nous avons dit, il paroiſſe que pour avoir les reciproques des AM, il faille dire AM, AB : : AB, $\frac{\overline{AB}^2}{AM}$; cependant ſi au lieu du troiſiéme terme AB de cette proportion nous ſubſtituons une partie conſtante de AB telle que EF, nous aurons une autre proportion AM, AB : : EF, QM, dans laquelle les deux derniers termes EF, QM ſeront dans la même raiſon que les deux AB, $\frac{\overline{AB}^2}{AM}$, & par conſéquent tous les QM ſeront entr'eux comme tous les $\frac{\overline{AB}^2}{AM}$, c'eſt-à-dire, comme la ſuite des reciproques aux Elemens de la parabole quarrée.

Or à cauſe des paralleles EH, FL, nous avons LN = NQ, donc tous les LN ou toutes les petites tangentes de la cycloïde ſont entr'elles comme tous les MQ, ou comme les reciproques aux Elemens de la parabole quarrée. Faiſant donc une demi-parabole quarrée ABC (*Fig.* 127.), dont le diametre AC ſoit égal au diametre AB de la demi-cycloïde, & dont la baſe BC ſoit égale au même diametre, & coupant AC de la même façon que AB, les ordonnées OS, PQ, (*Fig.* 127.) ſeront égales chacune à chacune aux cordes AR, AM, &c. du demi-cercle (*Fig.* 126.) (*N.* 186.), & concevant que ſur toutes les diviſions du diametre ſoient élevées des petites perpendiculaires OX, PX, &c. égales chacune aux petites parties OP de ce diametre, ce qui nous donnera un petit rectangle ACZY, les troiſiémes proportionnelles aux ordonnées QP, à la baſe BC, & aux Elemens OX ou PX du rectangle ACZY, nous donneront la ſuite des reciproques aux Elemens de la parabole, c'eſt-à-dire, la figure ACZNV, dont les Elemens ſeront égaux chacun à chacun aux petites tangentes LN de la demi-cycloïde (*Fig.* 126.).

Ainſi nous aurons la ſomme des petites tangentes LN, c'eſt-à-dire la courbe ALD eſt à la ſomme des petites parties égales EF, FG, &c. ou au diametre comme les Elemens de la figure ACZNV, (*Fig.* 127.) aux Elemens du rectangle ACZY. Or l'expoſant des Elemens de la figure étant $-\frac{1}{2}$, leur ſomme eſt à la baſe CZ,

multipliée par le nombre des termes AC, comme 1 est à $-\frac{1}{2}+1$, ou comme 1 à $\frac{1}{2}$, ou comme 2 à 1 ; donc la somme des tangentes ou la courbe ALT (*Fig.* 126) est à la somme des parties égales du diametre AC, ou au diametre AC, comme 2 à 1, & par conséquent la courbe de la demi-cycloïde est double du diametre.

Si l'on coupe la demi-cycloïde par une droite LF parallele à la base, on prouvera de même que la somme des petites tangentes de la portion AL de la courbe, est à la somme des petites parties égales comprise dans la portion AF du diametre, comme la portion APTNV (*Fig.* 127.) de la figure ACZNV, est au rectangle APXY ; or la portion APTNV est à la figure entiere dans une raison, dont la raison AP, AC est doublée (*N.* 185), c'est-à-dire, dans la raison de QP à CP, ou de AM, AB, (*Fig.* 126.) donc la portion AL de la courbe est à la courbe entiere ALD dans la raison de la corde AM au diametre AB ; mais la courbe entiere est double du diametre, donc la portion AL est aussi double de la corde correspondante AM ; & ainsi des autres.

PROPOSITION LIV.

190. *Trouver les momens de la courbe d'une demi-cycloïde par rapport à differens axes de mouvement.*

Concevons que la courbe AFC (*Fig.* 128.) soit divisée en petites parties égales aux points D, E, F, &c. & que de ces points soient menées des paralleles à la base ; les parties AD, AE, AF, &c. seront en proportion arithmetique, & comme chacune d'elles est double de la corde correspondante AH, AI, &c. il s'ensuit que ces parties AD, AE, AF, &c. sont entr'elles comme les ordonnées d'une parabole quarrée, dont les abscisses sont les sinus verses AR, AS, &c. des cordes arithmetiquement proportionnelles (*N.* 186.), donc les droites AR, AS, &c. sont entr'elles comme les quarrés des ordonnées, ou comme les quarrés des parties AD, AE, AF, &c. de la courbe. Or les distances DM, FN, FQ, &c. des points D, E, F, &c. de la courbe à l'axe de mouvement AX, sont égales chacune à chacune aux droites AR, AS, &c. à cause des paralleles. Prenant donc une droite *ac* (*Fig.* 129.) égale à la courbe AEC, ou double du diametre AB, & la divisant en un même nombre de parties égales sur lesquelles on élevera les perpendiculaires *dm*, *en*, *fg*, &c. égales aux droites AR, AS, &c. ces droites marqueront les distances de la courbe AFC (*Fig.* 128.)

à l'axe de mouvement AX, & comme ces lignes feront les Elemens de la figure mixtiligne *acx* & que leurs quarrés feront entr'eux, comme les abfciffes *ad*, *ae*, *af*, &c. il s'eufuit qu'elles formeront un complement *acx* d'une parabole quarrée, dont le diametre eft *ab* ou AB, & dont la bafe *bx* ou *ca* = 2AB. Or par la proprieté de la parabole ce complement eft égal au tiers du parallelogramme *acxb* ; donc la fomme des diftances des points de la courbe AEC à l'axe de mouvement AX, c'eft-à-dire, le moment de cette courbe par rapport à AX, eft égal au complement parabolique *acx*.

Appellons donc c les cordes HA, IA, &c. les parties DA, EA, &c. feront $2c$, & appellant 2R le diametre *ab* ou AB, la droite *ac* égale à la courbe AEC fera 4R, ainfi le rectangle *acxb* fera $8R^2$, & le complement *acx* en étant le tiers, fera $\frac{8}{3}R^2$; donc le moment de la courbe AEC par rapport à AX, c'eft-à-dire la furface de l'onglet ou du moment de la demi-cycloïde par rapport à AX, fera $\frac{8}{3}R^2$, & divifant ce moment par la grandeur 4R, le quotient $\frac{8}{12}R = \frac{2}{3}R$, fera la diftance du centre de gravité de la courbe à la droite AX, donc fa diftance à la droite CB fera $\frac{4}{3}R$, & multipliant la grandeur 4R par cette diftance, le produit $\frac{16}{3}R^2$ fera le moment de la courbe par rapport à CB, ou la furface de l'onglet ou du moment de la demi-cycloïde par rapport à CB.

Les cordes HA, IA, étant appellées c, comme nous venons de dire, les droites AR, AS, &c. ou *dm*, *en*, &c. feront $\frac{c^2}{2R}$ à caufe des droites AR, AH, AB, qui font en proportion continue. Pour avoir donc le moment, par exemple, de la portion AE de la courbe par rapport à AX, on fera attention que la diftance de tous fes points à la droite AX, forment le complement *aen*, qui eft le tiers du rectangle *aens* (*Fig.* 129.); ainfi la droite *ae* étant $2c$, & la droite $en = \frac{c^2}{2R}$ le rectangle *aens* fera $\frac{2c^3}{2R} = \frac{c^3}{R}$, & par conféquent le complement *aen*, ou le moment de la portion AE par rapport à AX fera $\frac{c^3}{3R}$, & divifant ce moment par la grandeur $2c$ de la portion AE, le quotient $\frac{c^2}{6R}$ fera la diftance du centre de gravité de la portion AE à la droite AX, donc fa diftance à la droite BC fera $2R - \frac{c^2}{6R}$, & multipliant cette

distance par la grandeur $2c$, le produit $4cR - \frac{2c^3}{6R} = 4cR - \frac{c^3}{3R}$ sera le moment de la portion AE par rapport à BC, & de même des autres portions.

Maintenant pour avoir les momens de la courbe AEC, par rapport aux droites AB, XC, concevons de même que la courbe ABC soit divisée en parties égales aux points D, E, F, &c. d'où soient menées les droites DR, ES, &c. paralleles à la base, qui seront les distances des points de la courbe au diametre AB. Or ces distances sont composées des droites DH, EI, &c. qui sont égales aux arcs correspondans aux cordes arithmetiquement proportionnelles, & des droites HR, IS, &c. qui sont les sinus droits correspondans à ces arcs. Prenant donc une droite *ac* (*Fig.* 130.) égale à la courbe AEC, ou double du diametre AB, & élevant sur cette courbe d'un côté les perpendiculaires *dh*, *ie*, &c. égales chacune aux droites DH, EI, &c. & de l'autre les perpendiculaires *hr*, *is*, &c. égales chacune aux droites HR, IS, &c. la figure *abcs* sera la somme des distances des points de la courbe AEC à la droite AB, ou le moment de la courbe par rapport au diametre.

Or la portion *abc* de cette figure ayant pour Elemens les arcs correspondans aux cordes arithmetiquement proportionnelles, est double de la figure A*ta* (*Fig.* 118.) à cause de sa hauteur *ac* double de la hauteur A*a* de cette figure; de même la portion *acs* ayant pour Elemens les sinus droits correspondans aux cordes arithmetiquement proportionnelles, est double de la figure A*aq* (*Fig.* 118.), à cause de sa hauteur *ac* double de la hauteur A*a*. Puis donc que nous avons trouvé (*N.* 180.) que la figure A*ta* (*Fig.* 118.) est $RP - 4R^2$, & (*N.* 182.) que la figure A*aq* étoit $\frac{4}{3}R^2$; il s'ensuit que la figure *abc* (*Fig.* 130.) est $2RP - 8R^2$ & la figure *acs*, $\frac{8}{3}R^2$, donc la figure entiere *abcs* ou le moment de la courbe de la demi-cycloïde par rapport au diametre est $2RP - 8R^2 + \frac{8}{3}R^2 = 2RP - \frac{16}{3}R^2$, & divisant ce moment par grandeur $4R$ de la courbe, le quotient $\frac{1}{2}P - \frac{4}{3}R$ sera la distance de la courbe AEC (*Fig.* 128.) par rapport au diametre AB, donc la distance à la droite XC sera $\frac{1}{2}P - \frac{1}{2}P + \frac{4}{3}R = \frac{4}{3}R$, & multipliant la grandeur $4R$ par cette distance, le produit $\frac{16}{3}R^2$ sera le moment de la courbe par rapport à XC.

De même puisque nous avons trouvé (*N.* 180.) que la portion

A*nu*

Anu de la figure *Ata* (*Fig.* 118), étoit $4as - 4uR$, & (*N.* 183.) que la portion *Aup* de la figure *Aaq* (*Fig.* 118.) étoit $\frac{4R^2}{3} - \frac{z^3}{3R}$, il s'ensuit en supposant que la portion *adr*, de la figure *abcs* (*Fig.* 130.) corresponde aux deux portions *Anu*, *Auq* (*Fig.* 118.) que cette portion *adr*, ou le moment de la courbe AD (*Fig.* 128.) par rapport au diametre AB, est $8as - 8uR + \frac{8R^2}{3} - \frac{2z^3}{3R}$ & divisant ce moment par la grandeur $2c$ de la courbe AD, le quotient $\frac{8as - 8uR}{2c} + \frac{8R^2}{6c} - \frac{2z^3}{6Rc}$ sera la distance du centre de gravité de la courbe au diametre AB, d'où on connoîtra facilement la distance de ce centre à la droite XC, & le moment de la courbe par rapport à cette droite.

Où il faut observer comme nous l'avons déja dit (*N.* 179.) que la lettre *a* signifie ici la moitié de l'arc correspondant HA (*Fig.* 128.), & la lettre *s* le sinus droit de cette moitié, & la lettre *u* son sinus verse.

CHAPITRE XII.

De la Cissoïde.

DEFINITION.

191. SOIENT menés dans un cercle ABCD (*Fig.* 131.), deux diametres AC, BD, qui se coupent à angles droits, & du point C une tangente indefinie CE, qui sera par conséquent parallele au diametre BD. Du point A soient menées à tous les points de la demi-circonference ABC, des cordes AH prolongées jusqu'à la rencontre de la tangente CE. Celles de ces cordes qui passeront par les points du quart de circonference superieur AB, seront coupées hors du cercle par le prolongement du diametre BD, en deux parties égales au point O; car à cause des triangles semblables NAC, OAQ, on aura NA, OA :: AC, AQ; mais AC est double de AQ, donc NA est double de OA, & par conséquent NO = OA: de même les cordes qui passeront par le quart de circonference inferieur étant prolongées, comme il a été dit, seront coupées au-dedans du cercle par le diametre BD en deux parties égales au point O. Or si à l'égard des

cordes qui passent par le quart de circonference superieur ; on prend sur la partie extérieure HN, une droite OP égale à la droite OH, & qu'à l'égard des cordes qui passent par le quart de circonference inférieur on prenne sur la partie intérieure HA la droite OP égale à la droite HO, & que par tous les points P, P, &c. on fasse passer une ligne APP, cette ligne sera une courbe appellée *Cissoïde*.

192. Par la construction de la cissoïde, il y a dans chaque corde prolongée deux points H, P, dont le premier H coupe la circonference, & le second P est sur la courbe de la cissoïde ; & si de ces deux point on mene des droites HS, PR paralleles à la tangente CE, & qui coupent le diametre AC, il arrivera toujours que la partie CS du diametre, comprise entre l'une des paralleles & l'extrémité C du diametre, sera égale à la partie AR, comprise entre l'autre parallele & l'autre extrémité A du même diametre ; car la corde AN étant coupée en deux également au point O, & la partie PO prise d'un côté du point O, étant égale à la partie HO prise de l'autre côté, il s'ensuit que le reste HA ou PA, selon que la corde passe par le quart de circonference superieur ou inferieur, est égal au reste PN ou HN ; mais à cause des paralleles PR, OQ, HS, &c. le diametre AR est coupé en même raison que la ligne AN, donc AR = SC de même que AP = HN.

193. Dans les cordes prolongées qui passent par le quart de cercle supérieur, la partie OH est toujours moindre que la partie OA, donc OP est aussi toujours moindre que la partie ON ; donc la courbe APP ne touchera jamais la tangente CE, cependant elle en approchera toujours d'avantage, car à mesure que les cordes s'éloigneront du point B vers A, les HO deviendront plus grands, & par conséquent les OP seront aussi plus grands, & leurs extrémités P seront plus proches de la tangente, donc CE est l'asymptote de la courbe APP.

194. Si du point P de l'une des cordes prolongées on mene une droite PT parallele à la tangente CE, & qui coupe la circonference du cercle en un point T au-delà du diametre, & que de l'autre point H de la même corde on mene un diametre HQT, ce diametre passera par le point T ; car à cause des triangles semblables OHQ, PHT, on a OH, HP :: HQ, HT, mais OH est la moitié de HP à cause des OH = OP par la construction, donc HQ est aussi la moitié de HT, & par consé-

quent HQ = QT, & la partie QT eſt un rayon, donc le point T ou le diametre HT rencontre la ligne PT, eſt à la circonference.

195. Si l'on mene les droites AT, CT, l'angle AQT étant égal à l'angle HQC qui lui eſt oppoſé au ſommet, l'arc AT ſera égal à l'arc HC, donc les cordes HA, CT, entre leſquelles ſont compris ces deux arcs égaux, ſeront paralleles ; & par conſéquent les triangles rectangles ARP, CRT, ſeront ſemblables entr'eux ; or à cauſe du triangle rectangle ACT, les triangles ART, TRC, ſont ſemblables, donc les trois triangles CRT, TRA, ARP étant ſemblables, nous aurons :: CR, RT, RA, RP, c'eſt-à-dire, les quatre lignes CR, RT, RA, RP, ſont en proportion continue ; ce qui arrivera toutes les fois que d'un point P d'une corde on menera une parallele PT, à la tangente CE, & que de l'autre point H on tirera un diametre HT, comme nous avons fait ci-deſſus.

196. Les anciens ſe ſervoient de la ciſſoïde pour trouver deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données en cette ſorte ; ſoit la droite BR (*Fig.* 132.) la plus grande des deux lignes entre leſquelles on demande deux moyennes proportionnelles. Sur cette ligne priſe pour rayon, décrivez un cercle ABCD, & menez les deux diametres BD, AC perpendiculaires l'un ſur l'autre, prenez ſur le rayon BR la partie RE égale à la ſeconde des deux lignes données. De l'extrémité C de l'autre diametre tirez par le point E la corde CEH ; ſur l'autre extrémité A faites tourner une regle juſqu'à ce que vous puiſſiez tirer une droite ZSR, dont la partie ZS compriſe entre la droite HC & la circonference, ſoit coupée en deux également au point X par le rayon BR ; il eſt évident que ſi l'on décrit une ciſſoïde dont le ſommet ſoit en A, le point S ſera un point de la courbe. Menant donc de ce point une droite SQ parallele à BD, & du point Z un diametre ZQ, les quatre lignes CN, NQ, NA, NS ſeront en proportion continue.. Or les triangles ſemblables CNS, CRE donnent CN, NS :: CR ou BR, ER, & les triangles ſemblables ANS, ARX, donnent AN, NS :: AR ou BR, XR, & mettant au lieu de la raiſon AN, NS la raiſon CN, NQ qui lui eſt égale, nous aurons CN, NQ :: BR, XR, donc $\overline{CN}^3$, $\overline{NQ}^3$ :: $\overline{BR}^3$, $\overline{XR}^3$. Or à cauſe des lignes CN, NQ, NA, NS, qui ſont en proportion continue ; nous avons $\overline{CN}^3$, $\overline{NQ}^3$ :: CN,

NS, donc $\overline{BR}^3$, $\overline{XR}^3$ :: CN, NS. Mais nous avons trouvé CN, NS :: BR, ER, donc $\overline{BR}^3$, $\overline{XR}^3$ :: BR, ER. Donc les deux lignes BR, XR sont les deux premiers termes d'une proportion continue dont la ligne ER est le quatriéme terme, & par conséquent prenant une moyenne proportionnelle RO entre XR & ER, les quatre lignes BR, XR, OR, ER seront en proportion continue, & les deux XR, OR seront moyennes entre les données BR, ER.

Cette maniere est defectueuse, non-seulement à cause qu'il faut tâtonner pour trouver le point X, mais encore parce que ce Problême peut se resoudre par des courbes plus simples, c'est-à-dire par les sections coniques, ainsi qu'on peut voir dans le Commentaire de la Geometrie de M. Descartes par le Pere Rabuel, dans les Sections Coniques de M. le Marquis de l'Hôpital, & dans grand nombre d'autres ouvrages des Modernes.

197. Par la construction de la cissoïde, il est évident que cette courbe passe toujours par le point B, qui coupe la demi-circonference ABC en deux également; car quand la corde prolongée AN passe par le point B, alors la distance OH est nulle, & par conséquent la distance OP doit l'être aussi, & les trois points H, O, P doivent se réunir au seul point B.

PROPOSITION LV.

198. *Trouver la grandeur de l'espace renfermé entre la courbe de la cissoïde, le diametre & la tangente, c'est-à-dire l'espace* AXZMVOCA (Fig. 133.).

Concevons que la demi-circonference AHC soit divisée en une infinité de petites parties égales, que de tous les points de division soient menées au point A des cordes OA, prolongées jusqu'à la rencontre de la tangente CO, & que des points H, M soient menées des droites HR, MN paralleles à la tangente. Ces droites formeront avec les cordes voisines, des triangles HAR inscrits dans le demi-cercle, & des trapezoïdes OMNQ inscrits à la cissoïde. Concevons encore que de l'angle N de chaque trapezoïde soit menée NP parallele à OM, ce qui donnera le triangle PNQ égal & semblable au triangle HRA à cause de la hauteur TC égale à la hauteur AS par la nature de la cissoïde; ainsi les trapezoïdes OMNQ se trouveront composés d'un triangle PNQ égal au triangle correspondant du demi-cer-

cle & d'un parallelogramme OMNP. Or les triangles semblables HRA, MNA, donnent HA, AM :: HR, MN, & mettant les hauteurs AS, AT au lieu des côtés AH, AM, nous aurons AS, AT :: HR, HM; appellant donc AS $= u$, HR $= y$, AT sera $2R - u$, & par conséquent nous aurons u, $2R - u :: y$ $\frac{2Ry - yu}{u} =$ MN. Le triangle HRA sera donc HR $\times \frac{1}{2}$ AS $= \frac{1}{2} yu$; par la même raison le triangle PQN sera $\frac{1}{2} yu$, & le parallelogramme OMNP sera MN $\times$ TC $= \frac{2Ryu - yuu}{u} = 2Ry - yu$, & le trapezoïde OMNQ égal à la somme du triangle PNQ & du parallelogramme OMNP, sera $\frac{1}{2} yu + 2Ry - yu = 2Ry - \frac{1}{2} yu$. Donc le triangle inscrit au cercle sera au trapezoïde inscrit à la cissoïde comme $\frac{1}{2} yu$ à $2Ry - \frac{1}{2} yu$, ou comme $\frac{1}{2} u$ à $2R - \frac{1}{2} u$, ou enfin comme u à $4R - u$; or la même chose arrivera à l'égard de tous les triangles inscrits au demi-cercle, & de tous les trapezoïdes inscrits à la cissoïde, donc la somme des triangles inscrits au demi-cercle, ou le demi-cercle est à la somme des trapezoïdes ou à l'espace de la cissoïde comme tous les u à tous les $4R - u$. Or tous les u étant les sinus verses des arcs arithmetiquement proportionnels, sont égaux à la figure AD*ta* (*Fig.* 100.), & valent $\frac{1}{2}$ RP comme il a été dit en son lieu, tous les R sont égaux au rayon multiplié par la demi-circonference AHC, & par conséquent leur valeur est $\frac{1}{2}$ PR, laquelle multipliée par 4 donne $\frac{4}{2}$ PR $=$ 2PR, pour la valeur de tous les 4R, ainsi tous les $4R - u$ valent 2PR $- \frac{1}{2}$ PR $= \frac{3}{2}$ PR, & le demi-cercle ou la somme des triangles circonscrits est à l'espace de la cissoïde ou aux trapezoïdes circonscrits comme $\frac{1}{2}$ RP à $\frac{3}{2}$ RP, ou comme 1 à 3. Donc l'espace AXMVOCA est triple du demi-cercle AHC.

Si des deux points H, M d'une même corde prolongée AO, nous menons les droites HC, MC à l'autre extrémité C du diametre, les triangles HAC, MOC seront égaux, à cause du sommet commun C, & de la base HA égale la base MO; mais le triangle HAS $=$ AC $\times \frac{1}{2}$ HS $= 2R \times \frac{1}{2} s = s$R, donc le triangle MOC $= s$R. Cela posé.

Tous les triangles qui composent le segment HA du demi-cercle, sont à tous les trapezoïdes qui composent le segment MVYO de l'espace cissoïdal, comme tous les u correspondans aux arcs arithmetiquement proportionnels jusqu'au plus grand AH, sont à tous les $4R - u$ correspondans à ces mêmes arcs. Or supposant que l'arc AH soit égal à la droite *ab* (*Fig.* 100.), la

portion BKA de cette même figure sera la somme de tous les u correspondans ; or cette portion est aR — sR (*N.* 160.), donc la somme des u correspondans est aR — sR ; mais tous les 4R correspondans sont le quadruple du rectangle $bmCa$ (*Fig.* 100.) ou du rayon multiplié par la droite ab, & par conséquent ils valent 4aR, donc tous les 4R — u valent 4aR — aR + sR = 3aR + sR, & tous les triangles qui composent le segment HA (*Fig.* 133.), sont à tous les trapezoïdes qui composent le segment MVYO, comme aR — sR est à 3aR + sR, ou comme $a - s$ est à $3a + s$; or le segment HA vaut $\frac{1}{2}a$R — $\frac{1}{2}s$R (*N.* 139) ; faisant donc cette analogie $a - s$, $3a + s$ :: $\frac{1}{2}a$R — $\frac{1}{2}s$R, $\frac{3}{2}a$R + $\frac{1}{2}s$R, nous aurons $\frac{3}{2}a$R + $\frac{1}{2}s$R pour la valeur du segment MVYO de la cissoïde ; & ajoûtant au segment HA le triangle HAC, & au segment MVYO le triangle MOC égal au triangle HAC, nous aurons $\frac{1}{2}a$R — $\frac{1}{2}s$R + sR = $\frac{1}{2}a$R + $\frac{1}{2}s$R pour la valeur du secteur HAC, & $\frac{3}{2}a$R + $\frac{1}{2}s$R + sR = $\frac{3}{2}a$R + $\frac{3}{2}$Rs pour la portion VMCY de la cissoïde ; donc le secteur sera à la portion comme $\frac{1}{2}a$R + $\frac{1}{2}s$R est à $\frac{3}{2}a$R + $\frac{3}{2}s$R, ou comme 1 à 3, & la même chose se trouvera toutes les fois qu'on menera les droites HC, MC des points H, M de quelque corde prolongée que ce soit.

De même tous les triangles qui forment le secteur AHGCA ; dont l'arc est HGC sont à tous les trapezoïdes qui forment la portion cissoïdale AXMOC, comme tous les u correspondans depuis le premier AS jusqu'au plus grand AC, sont à tous les 4R — u correspondans. Or supposant toujours que l'arc AH est égal à la droite ab (*Fig.* 100.), tous les u correspondans au complement de cet arc ou à la droite tb formeront la figure BKTt (*Fig.* 100.), dont la valeur est aR + sR, car cette portion jointe à la restante BKA = aR — sR, fait aR + sR + aR — sR = aR + aR = $\frac{1}{2}$PR, qui est la valeur de la figure ATt ; & tous les 4R correspondans vaudront 4aR, donc la somme des triangles qui composent le secteur AHGC (*Fig.* 138.), sera à la somme des trapezoïdes qui composent la portion cissoïdale AXMOC comme aR + sR est à 4aR — aR — sR, ou comme aR + sR est à 3aR — sR, ou comme a + s est à 3a — s, mais le secteur AHGC vaut $\frac{1}{2}$aR + $\frac{1}{2}s$R ; faisant donc cette analogie a + s, 3a — s :: $\frac{1}{2}$aR + $\frac{1}{2}s$R, $\frac{3}{2}$aR — $\frac{1}{2}s$R, nous aurons $\frac{3}{2}$aR — $\frac{1}{2}s$R pour la valeur du segmeut cissoïdal AXMOC. Et retranchant du secteur AHGC le triangle AHC = sR, & du segment cissoïdal le

triangle MOC égal au triangle AHC, nous aurons $\frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}sR - sR = \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR$, pour la valeur du segment HC, & $\frac{3}{2}aR - \frac{1}{2}sR - sR = \frac{3}{2}aR - \frac{3}{2}sR$ pour le segment cissoïdal AXMC, donc le segment HC du demi-cercle sera au segment cissoïdal AXMC comme $\frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR$ est à $\frac{3}{2}aR - \frac{3}{2}sR$ ou comme 1 à 3, & ainsi des autres.

PROPOSITION LVI.

199. *Trouver les momens de l'espace de la cissoïde par rapport à différens axes de mouvement.*

Chaque triangle inscrit au demi-cercle est $\frac{1}{2}yu$, comme on a vû dans la Proposition précédente; or la distance de son centre de gravité à la tangente CY est $2R - \frac{2}{3}u$, car ce centre est au tiers de sa hauteur SA. Multipliant donc la grandeur $\frac{1}{2}yu$ par la distance $2R - \frac{2}{3}u$, le produit $yuR - \frac{1}{3}yu^2$ sera le moment du triangle HRA par rapport à CY. Or chaque triangle PQN qui fait partie du trapezoïde inscrit OMNQ est aussi $\frac{1}{2}yu$, & la distance de son centre de gravité à la tangente CY est $\frac{1}{3}u$, donc son moment est $\frac{1}{6}yu^2$. Donc la somme des momens des triangles inscrits au demi-cercle, c'est-à-dire le moment du demi-cercle est à la somme des triangles PQN, comme tous les $yuR - \frac{1}{3}yu^2$ à tous les $\frac{1}{6}yu^2$, ou comme tous les $R - \frac{1}{3}u$ à tous les $\frac{1}{6}u$. Or tous les R étant égaux au produit du rayon par la demi-circonference valent $\frac{1}{2}PR$, & tous les u étant égaux à la figure ADta (*Fig.* 100.) des sinus verses des arcs arithmetiquement proportionnels valent $\frac{1}{2}PR$, donc tous les $\frac{1}{3}u$ valent $\frac{1}{6}PR$; donc tous les $R - \frac{1}{3}u$ valent $\frac{1}{2}PR - \frac{1}{6}PR = \frac{1}{3}PR$, & tous les $\frac{1}{6}u$ valent $\frac{1}{12}PR$; donc la somme des momens des triangles inscrits au demi-cercle, est à la somme des momens de tous les PQN comme $\frac{1}{3}PR$ est à $\frac{1}{12}PR$ ou comme 4 à 1.

D'autre part chaque parallelogramme OMNP qui fait partie de chaque trapezoïde inscrit, est $2Ry - yu$, & la distance de son centre de gravité à la tangente CY est $\frac{1}{2}u$. Donc son moment est $yuR - \frac{1}{2}yu^2$, & par conséquent les momens de tous les triangles inscrits au demi-cercle sont à ceux de tous les parallelogrammes comme tous les $yuR - \frac{1}{3}u^2y$ à tous les $yuR - \frac{1}{2}u^2y$, ou comme tous les $R - \frac{1}{3}u$, à tous les $R - \frac{1}{2}u$, c'est-à-dire comme $\frac{1}{3}PR$ à $\frac{1}{2}PR - \frac{1}{4}PR = \frac{1}{4}PR$, ou comme 4 à 3. Or nous venons de voir que les momens de tous les triangles inscrits au demi-cercle, sont aux momens de tous les PQN comme 4 à 1,

donc les momens de tous les triangles inſcrits ſont aux momens de tous les PQN, plus tous les OMNP, c'eſt-à-dire de tous les trapezoïdes inſcrits, comme 4 eſt à 3 + 1, ou comme 4 à 4. Et par conſéquent le moment du demi-cercle par rapport à CY, eſt égal au moment de l'eſpace de la ciſſoïde par rapport à la même CY.

Mais le moment du demi-cercle par rapport à CY eſt $\frac{1}{4}PR^2$; donc le moment de l'eſpace de la ciſſoïde eſt auſſi $\frac{1}{4}PR^2$, & comme la grandeur du demi-cercle étant $\frac{1}{4}PR$, celle de l'eſpace ciſſoïdal eſt $\frac{3}{4}PR$, ſi nous diviſons le moment $\frac{1}{4}PR^2$ par la grandeur $\frac{3}{4}PR$, le quotient $\frac{1}{3}R$ ſera la diſtance du centre de gravité de l'eſpace ciſſoïdal à la droite CY; donc ſa diſtance à la droite A4 eſt $\frac{5}{3}R$, & multipliant la grandeur $\frac{3}{4}PR$ par cette diſtance, le produit $\frac{15}{12}PR^2$ ſera le moment de l'eſpace ciſſoïdal par rapport à A4, ce qui fait voir que le moment de cet eſpace par rapport à CY, eſt au moment par rapport à A4, comme $\frac{1}{4}PR^2$, ou $\frac{3}{12}PR^2$ à $\frac{15}{12}PR^2$, ou comme 3 à 15, ou comme 1 à 5.

Et il ſera facile de trouver de la même façon les momens des différentes parties de l'eſpace ciſſoïdal.

La figure 134. repreſente le ſolide formé par la circonvolution de la ciſſoïde autour de la tangente CY, & il eſt facile de ſe figurer celui qu'elle formeroit en tournant autour de A4.

CHAPITRE XIII.

De la Conchoïde.

DEFINITION.

200. SOIT une ligne droite indéfinie AS, & une autre droite CP, perpendiculaire à AS, & dont la partie AC eſt égale au rayon d'un cercle dont nous ſuppoſons que le centre A ſe meut d'un mouvement uniforme le long de la ligne AS de A en S.
fig. 135. Soit un point P pris ſur CP en deçà du point A, & ſuppoſons qu'une ligne droite qui n'abandonne jamais ce point P, ſuive le mouvement du centre A, en ſorte que lorſqu'il paſſe par les points B, D, E, X, &c. de la droite AS, la partie BH, ou DI, ou EL, &c. de la droite qui tourne autour de P ſoit toujours égale au rayon AC, la courbe CHILVY qui paſſera par les

les extremités H, I, L, V, &c. s'appellera *Conchoïde ordinaire*, ou simplement *Conchoïde*, si AP est égal à AC; *Conchoïde élargie*, si AP est plus grand que AC, parce qu'alors la courbe est plus éloignée de la ligne AS; & enfin *Conchoïde rétrecie*, si AP est moindre que AC, parce qu'alors la courbe est plus proche de la ligne AS. Nous ne parlerons ici que de la *Conchoïde ordinaire*, mais ce que nous en dirons fera juger aisément des proprietés des deux autres.

201. La ligne qui suit le mouvement du centre A du cercle generateur ayant toujours un de ses points en P, il est évident qu'elle ne sera jamais en ligne droite avec la ligne AS; & comme sa partie BH ou DI est toujours égale au rayon AC, il s'ensuit que CHIY ne touchera jamais la droite AS, mais qu'elle en approchera toujours de plus en plus, à cause que la partie BH ou DI, &c. devient toujours plus inclinée sur AS, donc la droite AS est l'asymptote de la courbe CHY.

202. Si l'on mene une ligne *ab* inclinée comme on voudra sur la ligne AS, cette ligne *ab* coupera la courbe en un point *b*. Car la ligne PH ou PI, &c. qui suit le mouvement du centre A, étant d'autant plus inclinée sur AS, qu'elle s'éloigne davantage de son extremité A, & la ligne AS étant indéfinie, il est constant que quelque inclinée que soit la ligne *ab* sur AS, la ligne PH le deviendra encore davantage, & par conséquent la courbe coupera la droite *ab*, puisqu'elle coupera la ligne PH qui sera plus inclinée, & plus proche de AS.

203. Un angle *ba*S étant donné, & un point P hors de cet angle, on pourra toujours tirer du point P une ligne droite P*b* dont la partie *bm* comprise entre les jambes de l'angle soit égale à une grandeur donnée, ce qu'on fera ainsi: du point P menez la ligne PAC perpendiculaire à l'une des jambes S*m*, prolongée s'il le faut en A; faites AC égal à la grandeur donnée. Du point P qu'on appelle *Pole* de la courbe, décrivez une cissoïde en prenant AC pour le rayon du cercle generateur; la courbe CHIY coupera la jambe *ab* en un point *b*, d'où vous tirerez la droite *b*P au pole P, & la partie *mb* de cette droite sera égale à la grandeur donnée AC.

Si l'une des jambes de l'angle donné n'étoit pas assez inclinée sur l'autre, comme par exemple la jambe *an*, alors la droite *bm* tomberoit hors de l'angle entre la jambe *an*, & le prolongement *a*A de l'autre.

204. Les Anciens employoient auſſi la Conchoïde pour trouver deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données en cette ſorte : Soient les deux lignes AB, BC (*Fig.* 136.) entre leſquelles on demande deux moyennes proportionnelles, mettez-les perpendiculairement l'une ſur l'autre à leurs extremités, & achevez le rectangle ABCD ; diviſez les deux côtés AD, AB, chacun en deux parties égales aux points S, R ; du point C par le point S, tirez la ligne CSH qui rencontre au point H la ligne AB prolongée ; ſur le point R élevez la perpendiculaire indéfinie RZ, & du point B tirez BZ que vous ferez égale à DS ; tirez HZ, & l'indéfinie BX parallele à HZ ; du point Z tirez une ligne ZN dont la partie NX compriſe entre les jambes de l'angle NBX ſoit égale à DS, ce qui ſe fait par le moyen de la Conchoïde comme on vient de voir ; enfin du point N par le point C tirez la droite NCE qui coupe le côté AD prolongé en E, & vous aurez les quatre lignes CB, BN, DE, DC en proportion continue, & par conſéquent les deux BN, DE ſeront moyennes proportionnelles entre les données.

Pour le prouver, faites attention que la droite AB étant coupée en deux parties égales au point R, on a $AN\times NB+\overline{RB}^2=\overline{RN}^2$, & ajoûtant de part & d'autre $\overline{RZ}^2$, on a $AN\times NB+\overline{RB}^2+\overline{RZ}^2=\overline{RN}^2+\overline{RZ}^2$; mais à cauſe du triangle rectangle ZBR, on a $\overline{ZB}^2=\overline{RB}^2+\overline{RZ}^2$; donc $AN\times NB+\overline{RB}^2+\overline{RZ}^2=AN\times NB+\overline{ZB}^2$, & le triangle rectangle ZRN donne $\overline{ZN}^2=\overline{ZR}^2+\overline{RN}^2$, donc $AN\times NB+\overline{ZB}^2=\overline{ZN}^2$.

D'autre part, les triangles ſemblables EDC, CBN donnent ED, CB, ou DA :: DC ou AB, BN ; donc ſi dans cette proportion, nous mettons au lieu du premier conſéquent DA ſa moitié DS, & au lieu du ſecond antecedent AB ſon double HB, nous aurons ED, DS :: HB, BN. Or à cauſe des triangles ſemblables HNZ, BNX, nous avons HB, BN :: ZX, XN ; donc ED, DS :: ZX, XN, & compoſant ES, DS :: ZN, XN. Mais XN $=$ DS par la conſtruction, donc ZN $=$ ES, & $\overline{ZN}^2=\overline{ES}^2$, ou $AN\times NB\times\overline{ZB}^2=\overline{ES}^2$. Or à cauſe de AD coupée en deux parties égales en S, nous avons $\overline{ES}^2=AE\times ED+\overline{DS}^2$, ou $\overline{XN}^2$, ou $\overline{ZB}^2$, donc $AN\times NB\times\overline{ZB}^2=AE\times ED+\overline{ZB}^2$; donc $AE\times ED$

= AN×NB, & par conséquent AE, AN :: NB, ED; mais les triangles semblables EAN, CBN, donnent AE, AN :: CB, BN, donc CB, BN :: BN, ED, & comme les triangles semblables EDC, CBN, donnent CB, BN :: ED, DC, donc CB, BN :: BN, DE :: DE, DC, & par conséquent les quatre lignes CB, BN, DE, DC, sont en proportion continuë.

Cette maniere de trouver deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données, a les mêmes défauts que celle qui employe la cissoïde.

PROPOSITION LVII.

205. *Trouver la grandeur & les momens de la Conchoïde par rapport à differens axes de mouvement.*

Concevons que de tous les points de la droite AC soient menées des droites OI, RV, &c. paralelles à l'asymptote AS, & que du point A pris pour centre, ayant décrit le quart de cercle CX, on mene du point A les rayons AM, &c. aux points M, T, &c. où les paralleles coupent le quart de circonférence, & du point P les droites PI, PV, &c. aux points où les mêmes paralleles coupent la courbe de la Conchoïde. La droite DI étant égale à la droite AC par la construction, est par conséquent égale aussi à la droite AM, donc DI, AM, étant égales entre les paralleles OM, AS, sont paralleles entr'elles, & par conséquent MI = AD. Or OM est le sinus de l'angle CAM par rapport au rayon CA, & AD est la tangente du même angle ou de son égal CPI par rapport au rayon AP, donc MI = AD est la tangente du même angle ; & comme la même chose arrivera à l'égard de toutes les paralleles à l'asymptote AS, il s'ensuit que les parties MI, TV, &c. des paralleles qui se trouvent entre le quart de circonference, & la courbe de la Conchoïde sont les tangentes correspondantes aux sinus verses CO, CR, &c. arithmétiquement proportionnels, & par conséquent les paralleles entieres sont la somme des tangentes MI, TV, &c. & des sinus droits OM, RT, &c. correspondans aux mêmes sinus verses arithmétiquement proportionnels.

Puis donc que les Elemens de la portion CMXSY de la Conchoïde sont la somme des tangentes des arcs correspondans aux sinus verses arithmétiquement proportionnels, il s'ensuit que cette portion est égale à la figure des tangentes *ab*ZK (*Fig.* 121.) Or nous avons vû (*N.* 184.) que la grandeur de la figure des

tangentes étoit infinie, à cause qu'elle est la somme de tous les $\frac{rR}{x}$; donc la portion CMXSY est aussi infinie, & si on ajoute à cette portion le quart de cercle ACX, la Conchoïde sera à plus forte raison infinie.

Mais nous avons vû que le moment de la figure des tangentes par rapport à sa base, étoit égal au quart de cercle multiplié par le rayon, donc le moment de la portion CMXSY qui a ses Elemens aussi éloignés de l'asymptote AS, que ceux de la figure des tangentes le sont de leur base, est aussi égal au quart de cercle multiplié par le rayon, c'est-à-dire égal à $\frac{1}{8}PR^2$, & ajoutant à ce moment celui du quart de cercle qui est $\frac{1}{3}R^3$ (*N.* 139.) la somme $\frac{1}{8}PR^2 + \frac{1}{3}R^3$ sera le moment de la Conchoïde entiere par rapport à AS; & ce moment est le seul qu'on puisse connoître, car la grandeur de la Conchoïde étant infinie, si on divise son moment qui est fini par sa grandeur, le quotient sera zero ou un infinitiéme, & par conséquent le centre de gravité ne se trouvera nulle part.

Si la droite PA est plus courte ou plus longue que le rayon AC, c'est-à-dire si la Conchoïde est rétrecie ou élargie, les Elemens HI, TV, &c. de la portion CXSY de la Conchoïde seront les tangentes par rapport au rayon PA; ainsi décrivant un quart de cercle sur ce rayon, le moment de cette portion par rapport à l'asymptote AS sera egal à ce quart de cercle multiplié par le rayon, c'est-à-dire $\frac{1}{8}pr^2$ en appellant p la circonférence entiere, & r le rayon AP; & par conséquent le moment de la Conchoïde entiere sera $\frac{1}{8}pr^2 + \frac{1}{3}R^3$.

La figure 137. represente le solide formé par la circonvolution de la Conchoïde autour de AS.

COROLLAIRE.

206. Si après avoir décrit la Conchoïde, comme il a été dit ci-dessus, on prend sur les droites PH, PI, &c. entre l'asymptote & le point P des parties égales au rayon AC telles que *mu*, la courbe qui passera par les extremités de ces parties sera un autre *Conchoïde* que nous appellerons *Conchoïde inférieure* dont nous trouverons la grandeur & le moment en cette sorte.

Soit la Conchoïde supérieure ABSY (*Fig.* 138.), l'inférieure BPMs, & supposant que le centre du cercle generateur se trouve en H, menons du point P par le centre H la droite PL, le

point L sera sur la courbe superieure, & le point M sur la courbe inférieure; des points L, M, menons LN, MQ paralleles à l'asymptote AS, la droite LN sera ordonnée à la Conchoïde superieure, & la droite MQ sera ordonnée à l'inférieure. Du centre H élevons sur l'asymptote la perpendiculaire OR qui coupe NL en O, & QM prolongée en R, les triangles HOL, HMR, étant semblables & égaux, à cause de HL = HM, on aura OL = MR, & OH = HR; donc les deux cordes XL, MZ, étant également éloignées du centre seront égales, ainsi l'ordonnée QM = QZ — MZ = NL — XL, c'est-à-dire l'ordonnée QM à la Conchoïde inférieure, est moindre que l'ordonnée correspondante NL à l'inférieure, de toute la corde XL, ou de deux fois le sinus NF. Or la même chose arrivera en quelque point de l'asymptote BS que se trouve le centre du cercle generateur; donc les ordonnées à la Conchoïde inférieure seront moindres chacune que les ordonnées correspondantes à la supérieure de deux fois les ordonnées du quart de cercle, ou de toute la grandeur du demi-cercle; donc la Conchoïde inférieure est égale à la supérieure, c'est-à-dire à la somme des tangentes, plus le quart de cercle, moins le demi-cercle, ou à la somme des tangentes moins le quart de cercle, & comme le quart de cercle est fini & la somme des tangentes infinie, il s'ensuit qu'ôtant l'un de l'autre, l'espace de la Conchoïde inférieure sera encore infini.

Quant au moment de cet espace par rapport à l'asymptote AS, il sera égal au moment $\frac{1}{8}PR^2$ de la figure des tangentes, moins le moment $\frac{1}{3}R^3$ du quart de cercle; ainsi ce moment sera $\frac{1}{8}PR^2 - \frac{1}{3}R^3$, & il sera le seul qu'on puisse trouver, ce qui n'a pas besoin de Demonstration.

CHAPITRE XIV.

De l'Hyperbole.

DEFINITION.

207. SOIT une courbe BAC dont l'axe est SA (*Fig.* 139.), si les quarrés des ordonnées MD, NX, &c. sont entr'eux comme les rectangles SD × DA, SX × XA, SZ × ZA, &c. faits sous chaque abscisse correspondante AD, &c. & la somme SA

$+$ AD, &c. de la partie extérieure SA de l'axe & de l'abscisse correspondante AD, la courbe BAC s'appellera *Hyperbole*; & si l'on fait comme le rectangle SD × DA est au quarré $\overline{MD}^2$ de l'abscisse correspondante MD, ainsi le quarré $\overline{SA}^2$ de l'axe SA est à un quatriéme terme, ce quatriéme terme sera le quarré du second axe, & sa racine sera le *second axe* HI. De même, si l'on fait comme le premier axe SA est au second axe HI, ainsi le second axe HI est à un troisiéme terme, ce troisiéme terme sera le *Parametre* du premier axe; & le parametre du second se trouvera en prenant une troisiéme proportionnelle au second axe & au premier. Enfin, si des extremités H, I, du second axe, on mene des droites HA, IA, au sommet A de l'hyperbole, & qu'ayant partagé ces droites en deux parties égales aux points T, L, on mene du milieu O du premier axe les droites OTV, OLY, ces droites s'appelleront les *Asymptotes de l'Hyperbole*. Tout ceci a été expliqué & démontré dans la troisiéme partie de notre *Theorie & Pratique des Géometres*, où nous avons dit aussi que le quarré d'une ordonnée MD étoit au rectangle correspondant SD × DA comme le quarré du second axe HI au quarré du premier SA, ou comme le parametre du grand axe est au grand axe, à cause que les trois lignes SA, HI, P, c'est-à-dire le parametre étant en proportion continuë, on a $\overline{HI}^2, \overline{SA}^2 :: P, SA$.

208. Si nous appellons a le premier axe SA, b le second axe HI, p le parametre du premier axe, y une ordonnée quelconque MD, NX, &c. & x l'abscisse correspondante AD, AX, &c. nous aurons SD ou SX, &c. égal à $a+x$, & par la proprieté de l'hyperbole $yy, ax+xx :: b^2, a^2 :: p, a$; & faisant le produit des moyens & celui des extrêmes, nous aurons $yya = axp + xxp$, & divisant par a, nous aurons $yy = xp + \frac{p}{a}xx = \frac{ax+xx}{a}p$; donc $y = \sqrt{xp + \frac{p}{a}xx} = \sqrt{\frac{ax+xx}{a}p}$.

Et nous servant de l'Equation $yy = \frac{ax+xx}{a}p$, nous aurons $p = \frac{yy}{ax+xx}a$, & $a = \frac{xxp}{yy-px}$.

Quant à la valeur de x nous la trouverons ainsi: le rectangle SD × DA est $ax+xx$; or à cause de SD coupée en deux parties égales en O qui est le centre de l'hyperbole & de l'ajoutée XD, nous avons SD × DA $= \overline{OD}^2 - \overline{OA}^2$, & à cause de p, a

:: yy, $\frac{yya}{p}$ nous avons $\frac{yya}{p} = SD \times DA$; donc $\overline{OD}^2 = SD \times DA + \overline{OA}^2 = \frac{yya}{p} + \frac{1}{4}a^2$, & $OD = \sqrt{\frac{a}{p}yy + \frac{1}{4}a^2}$. Or AD ou $x = OD - OA$; donc $x = \sqrt{\frac{a}{p}yy + \frac{1}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$.

Donc $SA + AD = a + x = \sqrt{\frac{a}{p}yy + \frac{1}{4}a^2} + \frac{1}{2}a$; & $OD = \sqrt{\frac{a}{p}yy + \frac{1}{4}a^2}$.

209. Puisque $SD \times DA = ax + xx$, il s'ensuit que les rectangles correspondans aux quarrés des ordonnées, sont composés chacun de deux rectangles ax, xx, lesquels ayant la même base x, sont entr'eux comme leurs hauteurs a, x ; & que les rectangles ax sont entr'eux comme les abscisses x, & les rectangles xx comme les quarrés de ces abscisses, c'est-à-dire en prenant les abscisses arithmétiquement proportionnelles, les rectangles ax sont entr'eux comme la suite 0. 1. 2. 3. 4, &c. & les rectangles xx, comme les quarrés 0. 1. 4. 9, &c. de cette même suite ; & par conséquent les quarrés des ordonnées, ou les rectangles correspondans sont entr'eux comme les termes 0. 1. 2. 3. 4, &c. augmentés chacun de leurs quarrés.

210. Si l'on conçoit que sur tous les points du petit axe soient élevées des perpendiculaires RM, KN, &c. jusqu'à la rencontre de la courbe, ces perpendiculaires seront *ordonnées* au petit axe, & si des points M, N, &c. où elles rencontrent la courbe, on mene les ordonnées MD, NX, &c. au grand axe, les droites RM, KN, &c. seront égales chacune à chacune aux droites OD, OX, &c. & par conséquent elles seront entr'elles comme les $\sqrt{\frac{a}{p}yy + \frac{1}{4}aa}$, c'est-à-dire comme la suite des racines quarrées des $\frac{a}{p}yy$ augmentés de $\frac{1}{4}aa$. Mais les $\frac{a}{p}yy$ sont entr'eux comme les yy à cause que $\frac{a}{p}$ est une grandeur constante, & par la même raison les $\frac{1}{4}aa$ sont entr'eux comme les aa ; donc les ordonnées MR, &c. sont entr'elles comme les $\sqrt{yy + aa}$, mais les y, c'est-à-dire les droites MD, NX, &c. sont en ce cas comme les abscisses OH, &c. qui sont entr'elles comme les nombres 0. 1. 2. 3, &c. donc les ordonnées au petit axe sont entr'elles comme les racines des nombres 0. 1. 2. 3, &c. augmentés chacun d'un même quarré.

Donc si l'on divise une ligne quelconque AB (*Fig.* 140.) en parties égales aux points C, D, E, &c. & qu'ayant élevé au point A une perpendiculaire indéfinie AO, & mené à un de ses points O les droites CO, &c. on éleve sur les mêmes points C, D, E, &c. des perpendiculaires égales chacune à chacune aux droites CO, DO, &c. la courbe qui passera par les extremités R, S, T, &c. de ces perpendiculaires sera une hyperbole; car à cause des triangles rectangles CAO, DAO, &c. les hypotenuses CO, &c. ou CR, DS, &c. seront comme les racines quarrées des quarrés des droites AC, AD, AE, &c. arithmétiquement proportionnelles augmentés chacun du quarré $\overline{AO}^2$. Donc, &c.

PROPOSITION LVIII.

211. *Trouver la grandeur d'une espace hyperbolique terminée par la courbe & par une ordonnée.*

Soit l'espace hyperbolique HBPO dont on demande la grandeur (*Fig.* 141.) & supposant d'abord que l'hyperbole soit équilatere, c'est-à-dire que ses asymptotes DF, DE, se coupent à angles droits, menons de l'extrémité H de l'ordonnée HP, la droite HE parallele à l'asymptote DF, & concevons que de tous les points de la droite DE soient menées des droites MR, QT, SB, &c. paralleles à la même asymptote DF, & que des points R, T, B, &c. où ces paralleles coupent la courbe, on mene des droites H*a*, R*b*, T*c*, B*d*, &c. paralleles à DE. Cela posé, faisons le triangle rectangle DKE.

Par la proprieté de l'hyperbole entre les asymptotes, les rectangles DEH*a*, DMR*b*, DQT*c*, &c. sont tous égaux entr'eux, & par conséquent leurs bases sont réciproques à leurs hauteurs; ainsi dans les deux premiers on a EH, MR :: DM, DE, & de même des autres. Or dans le triangle rectangle DKE, on a DM, DE :: M*m*, EK, donc EH, MR :: M*m*, EK, c'est-à-dire que les bases des rectangles DEH*a*, DMR*b*, &c. sont réciproques aux Elemens du triangle EKD. Or les bases des rectangles DEH*a*, DMR*b*, &c. sont les Elemens de la figure DEHCF, donc les Elemens de cette figure sont réciproques aux Elemens du triangle. Mais nous avons vû dans l'*Arithmétique des Infinis* que la figure composée de pareils Elemens étoit infinie du côté de F, & qu'elle le seroit aussi du côté de E si on

continuoit; donc l'espace compris entre l'hyperbole & les asymptotes est infini de part & d'autre, & par conséquent l'hyperbole & les asymptotes ne peuvent se rencontrer qu'à l'infini.

Maintenant comme nous avons borné l'espace hyperbolique du côté de E, bornons-le du côté de F par une droite SB parallele à l'asymptote DF, & tachons de connoître la grandeur de l'espace SEHB, lequel étant une fois connu nous fera découvrir celui que nous cherchons.

Pour cela, appellons A la droite DE, a chacune des parties égales EM, MQ, &c. B la base EH, C la hauteur ES de l'espace SEHB, & nous aurons DM $= A - a$, DQ $= A - 2a$, &c. jusqu'au dernier DS qui sera A — C, & les parties E, EM, EQ, &c. formeront la suite o. a. $2a$. $3a$, &c. jusqu'au dernier ES qui sera C.

Puisque les rectangles DEHa, DMRb, &c. sont égaux entr'eux, & que le premier est AB, à cause de sa hauteur DE $= A$, & de sa base EH $= B$, si je divise ce premier AB par la hauteur $A - a$ du second, le quotient $\frac{AB}{A-a}$ sera la base MR du second; de même si je divise le premier par la hauteur $A - 2a$ du troisiéme le quotient $\frac{AB}{A-2a}$ sera la base du troisiéme, & ainsi des autres jusqu'au dernier DSBd dont la base sera $\frac{AB}{A-C}$; mais les bases de ces rectangles sont les Elemens de la figure SEHB; donc ces Elemens composent la suite $\frac{AB}{A}$. $\frac{AB}{A-a}$. $\frac{AB}{A-2a}$. $\frac{AB}{A-3a}$, &c. $\frac{AB}{A-C}$, ou $\overline{1 + \frac{A}{A-a} + \frac{A}{A-2a}, \&c. + \frac{A}{A-C}} \times B$.

Or faisant la division du terme $\frac{A}{A-a}$, le quotient donne la suite infinie $1 + \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A^2} + \frac{a^3}{A^3}$, &c. ce que l'on trouve en faisant la division telle qu'on la voit ici, & de la maniere que nous avons enseigné dans l'*Arithmétique des Géometres*.

$$
\begin{array}{l}
\underline{A} \quad \left\{ 1 + \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A^2} + \frac{a^3}{A^3} + \frac{a^4}{A^4}, \&c. \right. \\
\underline{A - a} \\
+ a \\
\underline{A - a} \\
+ \frac{a^2}{A} \\
\underline{A - a} \\
+ \frac{a^3}{A^2} \\
\underline{A - a} \\
+ \frac{a^4}{A^3} \\
\underline{A - a} \\
+ \frac{a^5}{A^4}
\end{array}
$$

De même faisant la division du terme $\frac{A}{A-2a}$, le quotient donne la suite $1+\frac{2a}{A}+\frac{4a^2}{A^2}+\frac{8a^3}{A^3}$, &c. & le quotient de $\frac{A}{A-3a}$ donnera la suite $1+\frac{3a}{A}+\frac{9a^2}{A^2}+\frac{27a^3}{A^3}+\frac{81a^4}{A^4}$, & ainsi des autres termes jusqu'au dernier $\frac{A}{A-C}$ dont le quotient sera $1+\frac{C}{A}+\frac{C^2}{A^2}+\frac{C^3}{A^3}$, &c.

Supposant donc dans toutes ces suites $A=1$, pour abreger le calcul, nous aurons la suite $1+\frac{A}{A-a}+\frac{A}{A-2a}+\frac{A}{A-3a}$, égale à la somme des suites qu'on voit ici.

$$\left.\begin{array}{l} 1+a+a^2+a^3+a^4, \&c. \\ 1+2a+4a^2+9a^3+16a^4, \&c. \\ 1+3a+9a^2+27a^3+81a^4, \&c. \\ \&c. \\ 1+C+C^2+C^3+C^4, \&c. \end{array}\right\}\times B.$$

Et multipliant toutes ces suites par B, le produit sera égal à $\overline{C+\frac{1}{2}C^2+\frac{1}{3}C^3+\frac{1}{4}C^4+\frac{1}{5}C^5, \&c.}\times B.$

la suite $\overline{1+\frac{A}{A-a}+\frac{A}{A-2a}+\frac{A}{A-3a}\ \&c.+\frac{A}{A-C}}\times B$. C'est-à-dire à la somme des Elemens de la figure SEHB.

Or si l'on considere les rangs perpendiculaires que les termes de ces suites forment, on trouvera que le premier étant composé des égaux 1. 1. 1, &c. sa somme est égale au dernier terme multiplié par le nombre des termes qui est C, donc cette somme est C. De même, le second étant composé des premieres puissances $1a$, $2a$, $3a$, &c. C, sa somme est au dernier terme C, multiplié par le nombre des termes C comme 1 à 2; donc cette somme est $\frac{1}{2}C^2$, & on trouvera par le même raisonnement fondé sur les principes de l'Arithmétique des Infinis, que la somme du troisiéme rang perpendiculaire est $\frac{1}{3}C^3$, que celui du quatriéme est $\frac{1}{4}C^4$, & ainsi de suite. Donc la somme des Elemens de la figure SEHB est $\overline{C+\frac{1}{2}C+\frac{1}{3}C^3, \&c.}\times B$.

Pour faire l'application de ceci, supposons $DE=A=I$, $SE=C=\frac{1}{2}$, $EH=B=\frac{1}{4}$, nous aurons $\overline{C+\frac{1}{2}C^2+\frac{1}{3}C^3+\frac{1}{4}C^4}$, &c. $\times B=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{64}$, &c. $\times\frac{1}{4}=\frac{41}{64}\times\frac{1}{4}=\frac{41}{256}$. Ainsi l'espace $SEHB=\frac{41}{256}$, c'est pourquoi ajoûtant la valeur des triangles

DSB, EHx, la somme sera la valeur de l'espace xDBH, & retranchant du triangle xDO la valeur de l'espace xDBH, le reste sera la valeur de la demi-hyperbole ABO.

C'est-là ce qu'on appelle quarrer l'hyperbole par approximation, & il est visible qu'on peut en approcher de plus en plus à l'infini en prenant un plus grand nombre de termes de chaque suite.

Si l'hyperbole n'est pas équilatere, c'est-à-dire si les asymptotes DF, DE (*Fig.* 142.) ne se coupent pas à angles droits, on tirera du point H la droite HK parallele à l'asymptote DF, & du point D la droite Dr perpendiculaire à HK, après quoi faisant le triangle DrK, on concevra que de tous les points E, M, Q, &c. soient menées des paralleles à AK, & que des points où ces paralleles coupent la courbe, soient menées des paralleles à l'asymptote DE. Cela fait, les parallelogrammes DEHa, DMRb, &c. seront tous égaux entr'eux par la proprieté de l'hyperbole entre les asymptotes, ainsi leurs bases EH, MR, &c. seront réciproques à leurs hauteurs Dc, Dr, c'est-à-dire aux Elemens du triangle DKr qui sont entr'eux comme ces hauteurs. C'est pourquoi bornant l'espace asymptotique par la droite SB, on trouvera la valeur de l'espace SEHB par le même calcul que nous avons employé ci-dessus, en observant d'appeller A la droite Dr, & non pas l'asymptote DE, & C la droite sr, & le reste s'achevera comme auparavant.

PROPOSITION LIX.

212. *Trouver le centre de gravité d'une hyperbole* HBPO (Fig. 141. 142.)

Nous chercherons d'abord le centre de gravité de la demi-hyperbole HBO, car celui-là étant trouvé, il sera facile d'avoir celui de l'autre demi-hyperbole, après quoi joignant les deux centres par une ligne droite, le point où cette droite coupera l'axe sera visiblement le centre de gravité de l'hyperbole entiere.

Pour trouver donc le centre de gravité de la demi-hyperbole HBO, considerez que le moment de l'espace hyperbolique SEHB par rapport à DF, n'est autre chose que le produit de ses Elemens multipliés chacun par sa distance DS, DQ, DM, &c. (*Fig.* 141.) ou Ds, Dq, &c. (*Fig.* 142.) & par conséquent ce moment est égal à la somme des rectangles ou des parallelogrammes DEHa, DMRb, &c. dont le dernier est DSBd, &

dont le nombre des termes est exprimé par la droite SE (*Fig.* 141.) ou *sr* (*Fig.* 142.) Or tous ces rectangles ou ces parallelogrammes sont égaux entr'eux & par conséquent au premier DEHa = A × B, multipliant donc AB par le nombre des termes C, le produit C × A × B sera le moment de l'espace hyperbolique SEHB. Et si à ce moment on ajoûte ceux des triangles DSB, ExH, qui sont faciles à trouver après tout ce que nous avons dit jusqu'ici, la somme sera le moment de l'espace DxHB par rapport à DF; donc si du moment du triangle DxO on retranche le moment de l'espace DxHB, le reste sera le moment de la demi-hyperbole par rapport à DF, divisant donc ce moment par la grandeur que nous avons trouvée par la Proposition précédente, le quotient sera la distance du centre de gravité de la demi-hyperbole HBO par rapport à DF.

Pour trouver la distance de ce centre au second demi-diametre DN (*Fig.* 143.), concevons que de tous les points de DN prolongé s'il le faut soient menées des droites 12, 34, &c. paralleles au premier diametre DB, & que des points ou ces paralleles coupent la courbe soient menées des ordonnées 25, 46, &c. au premier diametre; par la propriété de l'hyperbole que nous avons observée (*N°* 210.), les ordonnées au petit axe DB, 12, 34, &c. composeront la somme de tous les $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{a}{p}yy}$, donc leurs quarrés composeront la somme de tous les $\frac{1}{4}a^2 + \frac{a}{p}yy$. Or le moment de chacune de ces ordonnées est égal à la moitié de son quarré, parce que ce moment est égal à l'ordonnée multipliée par la distance de son centre de gravité à la ligne DN, laquelle distance est égale à la moitié de l'ordonnée; donc la somme des momens de ces ordonnées, ou le moment de l'espace DNHB par rapport à DN est égal à la somme de tous les $\frac{1}{8}a^2 + \frac{a}{2p}yy$. Or a^2 est une grandeur constante, & les yy sont les quarrés des ordonnées 25, 46, &c. qui sont en proportion arithmetique, donc appellant N le nombre des termes DN la somme de tous les $\frac{1}{8}a^2$ est $\frac{1}{8}Na^2$, & la somme de tous les $\frac{a}{2p}yy$ est $\frac{aN}{6p}yy$ ou $\frac{aN^3}{6p}$ à cause que le plus grand y est égal à DN = N; donc la somme de tous les $\frac{1}{8}a^2 + \frac{a}{2p}yy$ est $\frac{1}{8}Na^2 + \frac{aN^3}{6p}$; ainsi le moment de l'espace DNHB par rapport à DN est connu, c'est

pourquoi si du moment du rectangle DNHO qui est facile à trouver, on retranche le moment de l'espace DNHB, le reste sera le moment de la demi-hyperbole HBO, & ce moment étant divisé par la grandeur trouvée, ainsi qu'il a été dit ci-dessus, le quotient sera la distance de son centre de gravité au demi-diametre DN.

Pour déterminer donc ce centre, il faut marquer d'abord sur le premier axe DO (*Fig.* 144.), sa distance DS du petit axe, ensuite si les asymptotes ne sont pas perpendiculaires entr'elles, on tirera DM perpendiculaire à DF, & l'on marquera sur DM la distance DR du centre de gravité à l'asymptote DF, puis du point R on menera RX parallele à DF, & du point S la droite SX parallele à DN, & le point X où ces paralleles se couperont sera le centre de gravité demandé; ce qui n'a pas besoin de demonstration.

Enfin si l'on veut trouver la distance du centre de gravité au premier axe DO, on concevra la partie BO (*Fig.* 143.) coupée en petites parties égales, de sorte que les abscisses B5, B6, &c. soient en proportion arithmetique, & alors les ordonnées 25, 46, &c. seront la somme des $y = \sqrt{xp + \frac{p}{a}xx}$ (*N.* 208.), donc leurs quarrés seront la somme des $yy = xp + \frac{p}{a}xx$; & la moitié de leurs quarrés seront la somme des $\frac{1}{2}yy = \frac{1}{2}xp + \frac{p}{2a}xx$, laquelle somme sera le moment des ordonnées ou le moment de la demi-hyperbole HBO par rapport à BO. Or à cause des x arithmetiquement proportionnels si nous appellons X le plus grand BO, le nombre des termes qui est aussi BO sera aussi X, & par conséquent la somme de tous les $\frac{1}{2}xp$ sera $\frac{1}{4}X^2p$, & la somme de tous les $\frac{p}{2a}xx$ sera $\frac{p}{6a}X^3$. Donc la somme de tous les $\frac{1}{2}xp + \frac{p}{2a}xx$, ou le moment de la demi-hyperbole par rapport à BO, sera $\frac{1}{4}X^2p + \frac{p}{6a}X^3$; divisant donc ce moment par la grandeur de la demi-hyperbole le quotient sera la distance du centre de gravité au premier axe BO.

Observations touchant l'Hyperbole.

213. Soit une demi-Parabole quarrée ABC inscrite dans un rectangle ACEB (*Fig.* 145.), & concevons que de tous les points de la tangente CE au sommet, soient menées des droites

FR, GS, HT, &c. paralleles à l'axe. Par la proprieté de cette parabole, ces droites seront comme les quarrés de leurs abscisses CF, CG, CH, &c. ou comme les quarrés 0. 1. 4. 9. 16. &c. des nombres naturels, donc leurs différences FR, XS, VT, &c. seront comme les nombres 0. 1. 3. 5. 7. &c. arithmetiquement proportionnels; concevons à present le polygone inscrit CRSTB, & que de tous les points ou les paralleles FR, GS, &c. coupent la courbe, soient menées des petites droites RX, SV, &c. paralleles à la tangente CE, ce qui nous donnera des petits triangles rectangles RXS, SVT, &c. qui ont tous un côté égal, car RX = SV, &c. ainsi appellant *a* ce petit côté les hypothenuses CR, RS, ST, &c. formeront une suite dont les termes seront $\sqrt{aa+1}$, $\sqrt{aa+9}$, $\sqrt{aa+25}$, $\sqrt{aa+49}$, $\sqrt{aa+81}$, &c. c'est-à-dire, que ces hypothenuses seront comme les racines des quarrés des nombres 0. 1. 3. 5. 7. &c. arithmetiquement proportionnels augmentés chacun d'un même quarré *aa*, & par conséquent comme les ordonnées au second diametre d'une hyperbole (*N.* 210.) duquel diametre les abscisses seroient comme 0. 1. 3. 5. 7. &c.

Prenant donc deux droites *ab*, *bc*, dont l'une *bc* soient coupée proportionnellement aux différences des paralleles FR, GS, &c. & l'autre *ab* soit proportionnelle à la partie égale RX, ou SY, &c. les droites *fa*, *ga*, &c. seront entr'elles, comme les hypothenuses CR, RS, ST, &c. car les triangles *fba*, *gba*, &c. seront semblables aux petits triangles CFR, RSX, &c. ainsi élevant des perpendiculaires *fi*, *gm*, *hn*, &c. égales chacune aux droites *fa*, *ga*, &c. la courbe *aimn*, &c. sera une hyperbole; & les ordonnées *fi*, *gm*, seront aux abscisses *bf*, *bg*, &c. comme les cordes CR, &c. aux différences RF, SX, TV, &c. ou bien mettant les abscisses *fb*, *gb*, &c. sur les ordonnées *fi*, *gm*, &c. de *f* en *o*, de *g* en *p*, & ainsi de suite, la somme des ordonnées *fi*, *gm*, &c. sera à la somme des droites *fo*, *gp*, &c. comme la somme des cordes ou hypotenuses CR, RS, &c. à la somme des droite FR, XS, &c. c'est-à-dire, à l'axe CA.

Or si l'on conçoit que les hypothenuses soient infiniment petites, elles se confondront avec la courbe parabolique ou avec les tangentes, & l'angle que la derniere TB fera avec la différence YB, sera égal à l'angle que la tangente DB fera avec la même différence. Ainsi faisant avec la droite *ba* un triangle rectangle *cab* semblable au triangle rectangle TYB ou BAD qui lui est sem-

blable ; on aura *ac*, *cb* :: TB, YB ; & concevant que de tous les points de *bc* soient menées des droites au point *a*, & que l'on inscrive des cordes infiniment petites à la courbe parabolique, qui fassent avec les différences correspondantes les mêmes angles que les droites menées au point *a* font avec la ligne *bc* ; la somme de ces droites mises perpendiculairement sur la ligne *bc*, c'est-à-dire, l'espace hyperbolique *bcda* sera à la somme des abscisses correspondantes *bf*, *bg*, &c. ou au triangle *bce* dont les Elemens sont égaux à ces abscisses, comme la somme des cordes, c'est-à-dire, comme la courbe parabolique est à la somme des différences ou au diametre AC; or l'espace hyperbolique peut se connoître, comme il a été dit ci-dessus, & l'on connoîtra aisément la grandeur du triangle *cbe* de même que celle du diametre CA, donc on connoîtra aussi la grandeur de la courbe parabolique CB.

De là il suit que la rectification de la courbe parabolique, c'est-à-dire, la maniere de trouver une ligne droite égale à cette courbe, depend de la quadrature de l'hyperbole, car il est évident que si on pouvoit connoître dans l'exactitude geometrique la grandeur de l'espace hyperbolique *bcde*, on connoîtroit aussi dans la même exactitude la grandeur de la courbe parabolique.

214. En concevant les cordes inscrites infiniment petites, les triangles rectangles qu'elles forment avec les différences des paralleles à l'axe sont infiniment petits, c'est pourquoi les distances des cordes à l'axe, & des différences à l'axe ne different que d'une grandeur infiniment petite & peuvent être regardées comme étant égales. D'autre part les ordonnées *fi*, *gm*, &c. au petit axe de l'hyperbole sont autant éloignées du grand axe *ba* que les ordonnées *fo*, *gp*, &c. du triangle *bce*. Or nous avons la somme des ordonnées au petit axe de l'hyperbole est à la somme des Elemens du triangle *bce*, comme la somme des cordes inscrites à la courbe parabolique, est à la somme des différences. Multipliant donc les deux premiers termes de cette proportion par leur distance au grand axe de l'hyperbole, & les deux derniers par leur distance à l'axe de la parabole. Nous aurons, la somme des ordonnées au petit axe de l'hyperbole multipliées par leurs distances au grand axe, c'est-à-dire le moment de l'espace hyperbolique *bcda* par rapport à *ba* est à la somme des Elemens du triangle multipliés par leur distance, ou au moment du triangle *bce*, comme la somme des cordes multipliées par leurs distances ou le moment de la courbe parabolique par rap-

port au diametre AC, est à la somme des différences multipliées par leurs distances. Ainsi le solide décrit par l'espace hyperbolique autour du premier axe, est au solide décrit par le triangle, comme la surface du paraboloïde décrit autour de AC est à la somme des surfaces décrite par les différences autour de AC.

Or les différences étant en progression arithmetique, forment une suite dont l'exposant est 1, & leurs distances étant aussi arithmetiquement proportionnelles ont de même 1 pour exposant, donc leurs produits ou la somme des momens des différences forment une suite dont l'exposant est 2, & par conséquent la somme de cette suite est au plus grand terme multiplié par le nombre des termes, comme 1 à 3. Mais si ces mêmes différences étoient toutes dans une égale distance CE ou AB, auquel cas leur circonvolution autour de AC formeroit la circonference du cylindre circonscrit au paraboloïde, alors leurs produits formeroient encore une suite dont l'exposant seroit 1, & par conséquent leur somme seroit au dernier terme multiplié par le nombre des termes comme 1 à 2. Donc le moment de la somme des différences chacune en leur place, est au moment des différences mises dans une égale distance, comme $\frac{1}{3}$ à $\frac{1}{2}$ ou comme $\frac{2}{6}$ à $\frac{3}{6}$, ou enfin comme 2 à 3. Donc la surface du paraboloïde est aux $\frac{2}{3}$ de la surface du cylindre circonscrit, comme le solide décrit par l'espace hyperbolique est au solide rond décrit par le triangle.

Mais l'espace hyperbolique & son centre de gravité peuvent se trouver de la façon qui a été enseignée ci-dessus, donc on peut connoître le solide formé par la circonvolution de cet espace, & comme le solide formé par la circonvolution du triangle, & la surface du cylindre circonscrit peuvent se connoître aisément, il s'ensuit que la surface du paraboloïde peut être aussi connuë; & si au lieu de la surface on met le moment de la courbe parabolique, divisant ce moment par la grandeur de la courbe, on aura la distance de son centre de gravité à l'axe AC.

215. Si nous faisons tourner la demi-parabole autour de la tangente CE, alors les distances des petites parties de la courbe, & celles des différences à la droite CE seront les droites FR, GS, &c. qui sont entr'elles comme les quarrés des nombres naturels, & les distances des ordonnées de l'espace hyperbolique & du triangle au premier axe *ba* seront comme les nombres naturels, c'est pourquoi puisque nous avons vû que la somme des ordonnées

ordonnées de l'espace hyperbolique est à celle des ordonnées du triangle comme la somme des cordes ou des petites parties de la courbe parabolique est à la somme des différences, multipliant les deux premiers termes par les quarrés de leurs distances, lesquels seront entr'eux comme les quarrés des nombres naturels, & les seconds par leurs distances qui sont dans la même raison; nous aurons la somme des ordonnées de l'espace hyperbolique multipliée par les quarrés de leur distance, est à la somme des ordonnées du triangle multipliées aussi par les quarrés de leurs distances, comme la somme des petites parties de la courbe parabolique multipliées par leurs distances, est à la somme des différences multipliées par leurs distances, & mettant encore au lieu des deux derniers termes, qui sont les momens de la courbe parabolique & des différences par rapport à CE, mettant, dis-je, les figures décrites autour de CE, c'est-à-dire la surface du paraboloïde décrit autour de CE, & le cercle du rayon AC, à cause que la somme des différences est visiblement égale à ce rayon; nous aurons enfin, la somme des ordonnées de l'espace hyperbolique multipliées par les quarrés de leurs distances à la droite *ab*, est à la somme des ordonnées du triangle multipliées par les mêmes quarrés comme la surface du paraboloïde décrit autour de CE est au cercle du rayon AC. Ainsi il ne reste plus qu'à trouver les deux premiers termes, mais comme cela dépend de la connoissance des centres de gravité des solides, dont nous parlerons dans le Chapitre suivant, je me contenterai de dire ici, que la somme des ordonnées de l'espace hyperbolique multipliées par les quarrés de leurs distances, n'est autre chose que le moment de l'onglet de ces ordonnées par rapport à *ab*, de même que la somme des ordonnées du triangle multipliées par les mêmes quarrés, n'est autre chose que le moment de l'onglet de ces ordonnées par rapport à la même *ab*, ce que je vais expliquer en peu de mots.

Soit une surface plane ABCD (*Fig.* 146.) qui tourne autour de XZ, le moment de cette surface est la même chose que la somme des momens de ses Elemens AD, PQ, *am*, &c. & ces momens sont égaux aux produits des Elemens multipliés chacun par leurs distances à la ligne XZ, ainsi ces momens sont les surfaces AHSD, PRTQ, &c. qui composent l'onglet ABCDSHMN ou le moment de la surface ABCD. Maintenant si l'on conçoit un plan vertical sur la ligne XZ, les distances des surfaces

AHSD, PRTQ, &c. à ce plan multipliées par ces surfaces seront les momens de ces surfaces par rapport à ce plan ; & ces distances seront égales chacune à chacune aux distances des bases AD, PQ, &c. des surfaces. Or les surfaces sont les bases AD, PQ, &c. multipliées par leurs distances, & les momens des surfaces sont les surfaces multipliées par les mêmes distances, donc ces momens sont égaux aux bases multipliées deux fois successivement par leurs distances ou aux bases multipliées par les quarrés de leurs distances. Ainsi le moment de la surface AHSD est égal au produit de la base AD par le quarré de sa distance, & ainsi des autres ; donc *les Elemens de la base d'un onglet multipliés par les quarrés de leurs distances sont égaux aux momens des surfaces qui composent cet onglet, & par conséquent au moment de l'onglet.*

CHAPITRE XV.

Du centre de gravité des Solides.

216. LORSQUE je commençai cet Ouvrage, mon unique dessein étoit de faire voir comment on pouvoit mesurer les solides & leurs surfaces par la connoissance du centre de gravité de leurs figures génératrices, & dans cette vûë, je m'étois proposé de ne rien dire des centres de gravité des solides ; mais m'étant ensuite apperçû que ces centres étoient quelquefois nécessaires pour découvrir les momens de certaines figures planes, j'ai cru devoir ajoûter ce Chapitre, d'autant plus, que tout ce que j'ai dit jusqu'ici étant comme autant de materiaux qu'il ne s'agit presque plus que de rassembler pour rendre l'ouvrage complet ; il me sera plus facile de le faire ici que de remettre d'en parler dans quelque autre Ouvrage où je pourrois en avoir besoin.

Entre les solides, les uns ont des axes, c'est-à-dire des lignes droites qui passent par le centre de gravité de tous les Elemens ou des plans, dont on conçoit qu'ils sont composés, tels que sont les parallelepipedes, les prismes, les pyramides, les cones, les corps reguliers, la sphere, les conoïdes, & généralement tous les corps qui sont formés par la circonvolution entiere d'une surface plane autour d'une ligne de mouvement, & d'autres n'ont point d'axe, tels que sont tous les corps irreguliers. De plus il

s'en trouve dont les Elemens ſont entr'eux comme les termes d'une ſuite infinie dont le rapport eſt connu, & d'autres dont les Elemens ont entr'eux un rapport inconnu. Nous allons nous appliquer à trouver les centres de gravité de tous ces corps.

Du centre de gravité des Solides dont les Elemens ſont entr'eux comme les termes d'une ſuite connue.

217. *Dans tout ſolide qui a un axe, le centre de gravité ſe trouve ſur cet axe.* Ceci eſt évident par la ſeule définition de l'axe, car puiſque les centres de gravité de tous les Elemens du ſolide ſe trouvent ſur cette ligne, il faut néceſſairement que leur centre commun s'y trouve auſſi.

218. *Dans tout ſolide qui a un axe & dont les Elemens ſont entr'eux comme les termes d'une ſuite connue, le centre de gravité coupe l'axe en deux parties, dont celle qui eſt compriſe entre le centre & la baſe, eſt à celle qui eſt compriſe entre le centre & le ſommet, comme l'unité eſt à l'expoſant de la ſuite des Elemens augmenté de l'unité.*

J'ai démontré la même choſe par rapport aux figures planes dont les Elemens ſont entr'eux comme les termes d'une ſuite connuë. Mais pour en faciliter l'intelligence aux Commençans, je vais le démontrer de nouveau.

Soit donc un ſolide ABC (*Fig.* 147.) dont l'axe eſt la droite BD, & dont les Elemens IK, GH, &c. forment une ſuite dont nous appellerons l'expoſant m. La lettre m ſignifie tel nombre que l'on voudra, entier ou rompu. Si nous appellons S la ſomme de ces Elemens, P le dernier Element AC, & N le nombre des termes ou l'axe BD, la ſomme ſera au dernier terme multiplié par le nombre des termes comme 1 eſt à l'expoſant m augmenté de l'unité, ainſi qu'on a vû dans l'Arithmetique des Infinis, donc $S, NP :: 1, m+1$, & faiſant le produit des extremes & celui des moyens $SM+1S=1NP$, & diviſant par $m+1$, nous aurons $S=\frac{1}{m+1}NP$. Or les diſtances des Elemens au ſommet B, ſont entr'elles comme les nombres 0. 1. 2. 3. &c. dont l'expoſant eſt 1; multipliant donc chaque Element par ſa diſtance, les produits ou les momens des Elemens formeront une ſuite dont l'expoſant ſera $m+1$, & la ſomme de cette ſuite que nous appellerons s ſera au dernier terme NP multiplié par le nombre des termes comme 1 à $m+1+1$, ou

$m+2$. Donc s NNP :: 1, $m+2$, & $sm+2s$ = NNP, & enfin $s = \frac{1}{m+2}$ NNP, sera la somme des momens des Elemens par rapport au sommet B. Divisant donc cette somme par celle des Elemens qui est $\frac{1}{m+1}$, NP le quotient $\frac{m+1}{m+2}$, N sera la distance du centre de gravité du solide au sommet B, donc le reste de l'axe sera $\frac{1}{m+2}$ N, car $\frac{1}{m+2}$ N étant ajoûté à $\frac{m+1}{m+2}$ N fait $\frac{m+2}{m+2}$ N = N qui est l'axe entier, & par conséquent la partie de l'axe comprise entre le centre de gravité & la base, est à la partie comprise entre le centre & le sommet, comme $\frac{1}{m+2}$ est à $\frac{m+1}{m+2}$ ou comme 1 est à $m+1$, c'est-à-dire comme l'unité à l'exposant de la suite des Elemens augmenté de l'unité. Venons à l'application de ceci.

Dans les parallelepipedes, les prismes, & les cylindres, les Elemens paralleles à la base sont tous égaux entr'eux, donc l'exposant de leur suite est zero, & leur somme est au dernier multiplié par le nombre des termes ou par l'axe comme 1 est à $0+1$, c'est-à-dire, comme 1 est à 1; or les distances des Elemens au sommet de l'axe étant arithmetiquement proportionnelles forment une suite dont l'exposant est 1, multipliant donc chaque Element par sa distance, les produits formeront une suite dont l'exposant sera $0+1$ ou 1, & la somme de cette suite sera au dernier terme multiplié par le nombre des termes comme 1 est à 2. Donc cette somme ou le moment du solide sera $\frac{1}{2}$ NNP, & divisant ce moment par la grandeur NP, le quotient $\frac{1}{2}$ N marquera la distance du centre de gravité du solide au sommet de l'axe. Donc sa distance à la base sera aussi $\frac{1}{2}$ N, & par conséquent la distance du centre à la base sera à la distance du centre au sommet comme $\frac{1}{2}$ N est à $\frac{1}{2}$ N, c'est-à-dire, comme l'unité est à l'exposant zero des Elemens augmenté de l'unité.

Dans les pyramides & les cones, les Elemens paralleles à la base sont entr'eux comme les quarrés des nombres naturels dont l'exposant est 2, ainsi leur somme est $\frac{1}{3}$ NP. Or ces Elemens multipliés par leurs distances au sommet forment une suite dont l'exposant est $2+1$ ou 3, donc la somme de cette suite ou le moment du solide est $\frac{1}{4}$ NNP, & divisant ce moment par la grandeur $\frac{1}{3}$ NP, le quotient $\frac{3}{4}$ N marquera la distance du centre de

gravité du solide au sommet de l'axe, donc la distance à la base est $\frac{1}{4}$N, & cette distance est à la distance au sommet comme 1 à 3, c'est-à-dire, comme l'unité à l'exposant 2 des Elemens augmenté de l'unité.

Dans le paraboloïde du premier genre, les Elemens paralleles à la base étant entr'eux comme les nombres naturels dont l'exposant est 1, leur somme est $\frac{1}{2}$NP; or ces Elemens multipliés par leurs distances au sommet de l'axe forment une suite dont l'exposant est $1+1$ ou 2, donc leur somme ou le moment du solide est $\frac{1}{3}$NNP, & divisant ce moment par la grandeur $\frac{1}{2}$NP le quotient $\frac{2}{3}$N marquera la distance du centre de gravité du solide au sommet de l'axe; donc la distance à la base sera $\frac{1}{3}$ & cette distance est à la distance du centre au sommet comme 1 à 2, ou comme l'unité est à l'exposant 1 des Elemens augmenté de l'unité de même des autres solides.

Maintenant considerons ces figures planes dont les Elemens sont reciproques à quelque suite directe (*Fig.* 77.), l'axe est la droite AB, le sommet est A, la base est GC que nous appellerons P, & l'exposant des termes est $-m$; car nous savons que l'exposant de ces sortes de figures est negatif. La somme des Elemens $\frac{1}{-m+1}$NP, comme nous l'avons démontré dans l'Arithmétique des Infinis. Or ces Elemens étant multipliés par leurs distances à l'axe forment un onglet dont les surfaces élementaires ont pour exposant $-m+1$, donc la somme de ces surfaces ou l'onglet solide qu'elles forment $\frac{1}{-m+2}$NNP. Mais ces surfaces étant multipliées par leurs distances au sommet de l'axe ou au plan qui passeroit par ce sommet & qui leur seroit parallele, forment une suite dont l'exposant est $-m+1+1$ ou $-m+2$; donc la somme de cette suite, c'est-à-dire le moment de l'onglet est $\frac{1}{-m+3}$N³P. Divisant donc ce moment par la grandeur $\frac{1}{-m+2}$NNP de l'onglet, le quotient $\frac{-m+2}{-m+3}$N sera la distance du centre de gravité de l'onglet au sommet A ou au plan perpendiculaire qui passe par ce sommet, donc la distance à la base sera $\frac{1}{-m+3}$N, & cette distance est à la distance au sommet, comme 1 à $-m+2$, c'est-à-dire comme l'unité est à l'exposant $-m+1$ des Elemens de l'onglet augmenté de l'unité.

Au reste quoique la droite AB soit l'axe de la Figure 77, il est visible qu'elle n'est pas l'axe de l'onglet de cette figure, & qu'il faut prendre le centre de gravité de cet onglet, non pas sur la droite AB, mais sur le plan élevé perpendiculairement sur la cotte droite, c'est pourquoi j'ai dit que par le sommet A de l'onglet on doit entendre un plan élevé perpendiculairement sur l'Element FE, de même que par la base de cet onglet on doit entendre le plan élevé perpendiculairement sur le dernier Element GC. Je dirai dans la suite comment il faut déterminer la hauteur de ce centre de gravité au-dessus de la Figure 77.

219. *Dans tout solide dont les Elemens paralleles à la base sont entr'eux comme les termes d'une suite connue, ces Elemens sont semblables.* Car ces solides sont ou des parallelepipedes, ou des prismes, ou des cylindres, ou des pyramides, ou des cones, ou des spheres, ou des spheroïdes, ou des conoïdes, ou enfin des corps inscrits dans les spheres, les spheroïdes ou les conoïdes. Or dans les parallelepides, les prismes & les cylindres, les Elemens sont parfaitement égaux entr'eux en tout sens, & par conséquent ils sont semblables, dans les cones ils sont des cercles dont la nature est d'être semblables entr'eux, dans la pyramide on sçait que les côtés des Elemens sont entr'eux comme les abscisses de l'axe, dans la sphere, les spheroïdes, & les conoïdes, les Elemens sont des cercles, & dans les corps inscriptibles à la sphere, aux spheroïdes, & aux conoïdes les Elemens tels que nous les supposons sont comme les cercles dans lesquels ils sont inscrits, donc dans tous ces solides les Elemens sont semblables entr'eux.

Du centre de gravité des demi-Solides, dont les Elemens sont entr'eux comme les termes d'une suite connue.

220. Si l'on coupe un solide ABC (*Fig.* 148.) par un plan DBF perpendiculaire à la base & qui passe le long de son axe, ce solide sera coupé en deux parties égales FADB, FCDB, & ce sont ces parties que j'appelle *demi-Solides*. Or parmi ces demi-solides les uns ont encore des axes perpendiculaires à leurs bases, tels que sont les demi-parallelepipedes, les demi-prismes, & les demi-cylindres; les autres ont des axes inclinés à leurs bases, tels que sont les demi-pyramides & les demi-cones; & les autres enfin n'ont point d'axes, tels que sont les demi-conoï-

des. Pour faire donc une regle générale pour tous, nous chercherons la distance de leur centre de gravité à l'axe du solide entier. Et premierement il est visible que la distance du centre de gravité des demi-solides à la base, ou au plan qui passe par le sommet de l'axe parallelement à la base, est la même que dans les solides entiers, à cause que les Elemens des demi-solides sont entr'eux comme ceux des solides, ainsi il ne s'agit plus pour déterminer la position de ce centre qu'à trouver sa distance à l'axe du solide entier, ainsi que nous allons faire dans les regles suivantes.

221. *Si l'on coupe un demi-solide* ACEB (Fig. 149.) *par un plan* DBE, *qui passant le long de l'axe du solide entier, soit perpendiculaire à la base & la coupe en deux parties égales, le centre de gravité du demi-solide sera dans ce plan.* Car tous les plans élementaires du demi-solide sont coupés aussi en deux parties égales à cause de leur similitude & de leur position, donc tous les centres de gravité de ces plans sont dans le plan coupant, & par conséquent le centre de gravité commun doit s'y trouver.

222. *Dans tout demi-solide dont les Elemens sont entr'eux comme les termes d'une suite connuë, la distance du centre de gravité à l'axe du solide entier est à la distance du centre de gravité de la base à ce même axe comme l'exposant des Elemens augmenté de l'unité est aux* $\frac{1}{2}$ *de ce même exposant, augmentées de l'unité.*

Soit le demi-solide ACEB (*Fig.* 149.), l'axe du solide entier DB que nous appellerons N, le plan où est le centre de gravité soit DBE, & le centre de gravité de la base AEC soit le point O. Comme tous les plans élementaires du demi-solide paralleles à la base sont semblables entr'eux, les distances de leurs centres de gravité à l'axe du solide entier seront des lignes semblablement posées, & qui par conséquent seront entr'elles comme les côtés homologues de ces plans. Or les plans semblables sont entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues, donc les côtés homologues sont comme les racines de ces quarrés, donc les distances seront aussi comme les racines. Ainsi appellant m l'exposant des Elemens, & P le dernier ou la base, leur somme ou le demi-solide sera $\frac{1}{m+1}$ NP. Or l'exposant des racines des Elemens, qui est l'exposant des distances sera $\frac{m}{2}$ ou $\frac{1}{2}m$ par les regles du calcul des exposans que nous avons donnée au commencement de cet ouvrage; multipliant donc les Elemens chacun par

sa distance, les produits formeront une suite dont l'exposant sera $m + \frac{1}{2}m$ ou $\frac{3}{2}m$, & la somme de cette suite en appellant D la derniere & plus grande distance DO sera $\frac{1}{\frac{3}{2}m+1}$ NPD ou $\frac{2}{3m+2}$ NPD qui est le moment du demi-solide par rapport à l'axe BD. Divisant donc ce moment par la grandeur $\frac{1}{m+1}$ NP le quotient $\frac{2m+2}{3m+2}$ D ou $\frac{m+1}{\frac{3}{2}m+1}$ D sera la distance du centre de gravité du demi-solide à l'axe du solide. Or la distance du centre de gravité de la base au même axe est D ou $\frac{\frac{3}{2}m+1}{\frac{3}{2}m+1}$ D. Donc la distance du centre de gravité du demi-solide est à la distance du centre de gravité de la base comme $m+1$ est à $\frac{3}{2}m+1$, ou comme l'exposant des Elemens du demi-solide augmenté de l'unité, est aux trois moitiés du même exposant augmentées de l'unité. Faisons l'application de ceci.

Dans les demi-cylindres les demi-parallelepipedes & les prismes, l'exposant des Elemens est zero à cause qu'ils sont tous égaux, donc leur somme multipliée par le nombre des termes est NP, les distances des centres de gravité de ces Elemens à l'axe du solide entier étant aussi égales, les produits de ces distances par ces Elemens formeront une suite dont l'exposant sera $0+0$ ou simplement zero. Ainsi appellant D la derniere distance, c'est-à-dire celle du centre de gravité de la base, la somme des Elemens multipliés par leurs distances où le moment du demi-solide sera NPD, & divisant ce moment par la grandeur NP, le quotient D marquera la distance du centre de gravité du demi-solide à l'axe du solide entier. Elevant donc sur le centre O de la base (*Fig.* 150.) une perpendiculaire OP égale à la moitié de l'axe AB, parce que nous savons que la distance du centre de gravité de ces solides est à la moitié de l'axe; le point P sera le centre de gravité du demi-solide, & la distance QP de ce centre à l'axe sera à la distance AO du centre de gravité de la base comme 1 est à 1, ou comme l'exposant zero des Elemens augmenté de l'unité est aux $\frac{3}{2}$ de ce même exposant zero augmentées de l'unité.

Dans le demi-paraboloïde du premier genre les Elemens ou les plans élementaires étant entr'eux comme les abscisses, l'exposant de leur suite est 1, & par conséquent leur somme est $\frac{1}{2}$ NP; or ces Elemens étant semblables entr'eux les distances de leurs centres de gravité à l'axe seront entr'elles comme les côtés homologues

mologues ou comme les racines quarrées des Elemens, & par conséquent comme les racines quarrées des abscisses ou des nombres naturels; donc l'exposant de la suite de ces distances sera $\frac{1}{2}$. Ainsi multipliant chaque Element par sa distance, les produits formeront une suite dont l'exposant $1+\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{2}$ & la somme de cette suite sera $\frac{2}{5}$ NPD en appellant toujours D la derniere distance ou celle du centre de gravité de la base à l'axe. Divisant donc cette somme qui est le moment du solide par la somme $\frac{1}{2}$ND des Elemens, le quotient $\frac{4}{5}$ D marquera que le centre de gravité du demi-paraboloïde à l'axe est égale aux $\frac{4}{5}$ de la distance du centre de la base. Supposant donc que la droite AO (*Fig.* 151.) soit la distance du centre de gravité de la base, on en prendra les quatre cinquiémes de A en I, & on élevera au point I une perpendiculaire égale au tiers de l'axe parce qu'on sçait par la regle précédente que le centre de gravité du demi-paraboloïde est éloigné de la base d'un tiers de l'axe, & l'extrémité P de cette perpendiculaire sera le centre de gravité du demi-paraboloïde, & ainsi des autres demi-solides.

Ce que nous venons de dire doit s'entendre non-seulement des demi-solides, mais encore de toutes les portions d'un solide coupées par des plans perpendiculaires à la base & qui passent par l'axe, comme par exemple le tiers, le quart, &c.

Du centre de gravité des Onglets en général.

223. Tout onglet a un plan incliné qui passe par l'extrémité de sa base, ou qui couperoit sa base si elle étoit prolongée. Or pour abreger le discours nous appellerons *pointe de l'Onglet*, la section commune du plan incliné & de la base. Ainsi dans l'onglet ABCDEF (*Fig.* 152.), la droite AB est la pointe de l'onglet, & dans l'onglet ABCDEFMN, la *pointe* sera la droite *ab* ou le plan incliné coupe la base prolongée. Il est visible que la pointe d'un onglet est la même chose que l'axe de mouvement de la base.

224. *Dans tout onglet droit si d'un point* G (Fig. 152, 153.) *du plan incliné on abaisse une perpendiculaire* GH *sur la base, & que l'ayant coupée en deux parties égales en* R, *on fasse passer par le point* R *un plan incliné qui passe par la pointe* AB *ou ab, ce plan coupera l'onglet en deux parties égales.* Du point H menez la droite HI perpendiculaire à la pointe AB, ou *ab*, & du point I tirez la droite IG, vous aurez un triangle rectangle IGH qui sera perpendiculaire à la section commune du plan incliné & de la base, & par

conséquent son angle HIG mesurera l'inclinaison des deux plans. Or si l'on conçoit que l'onglet soit coupé par une infinité de plans paralleles au triangle HIG, tous ces plans seront autant de triangles rectangles perpendiculaires à la pointe, & par conséquent leurs angles à cette pointe seront tous la mesure de l'inclinaison des deux plans; donc ces angles seront tous égaux, & les triangles seront semblables, par la même raison les parties de ces triangles comprises entre le second plan incliné & la base, seront aussi des triangles rectangles. Ainsi dans les triangles compris entre le premier plan incliné & la base, on aura PQ, GH :: IQ, IH, & dans les triangles compris entre le second plan & la base on aura OQ, RH, IQ, IH, donc PQ, GH :: QO, RH, ou PQ, QO :: GH, RH, mais GH est double de RH par la construction, donc PQ est aussi double de QO, & par conséquent le second plan coupe le triangle QIP en deux parties égales; or la même chose arrivera à l'égard de tous les autres triangles qui composent l'onglet; donc l'onglet est coupé en deux également par le plan incliné AB*mn* ou *abmn* qui passe par R & par la pointe de l'onglet.

Nous appellerons ce second plan incliné *plan diviseur*, pour le distinguer du premier.

224. *Le centre de gravité d'un onglet est dans le plan diviseur.* Ce plan divise tous les Elemens de l'onglet en deux parties égales, donc les centres de gravité de ces Elemens sont dans ce plan, & par conséquent le centre de gravité commun, ou le centre de l'onglet doit s'y trouver aussi.

225. *Si un onglet* ABCDEF (Fig. 152.) *peut être partagé en deux également par un plan* QIP *perpendiculaire à sa base & à sa pointe le centre de gravité de l'onglet est dans ce plan* QIP. Cela est évident; car puisque l'onglet est supposé divisé en deux parties égales, il est sûr que ces parties doivent être en équilibre autour du plan qui les sépare.

226. *Si un onglet peut être partagé en deux également par un plan perpendiculaire à sa base & à sa pointe, le centre de gravité de l'onglet est dans la section commune* IO *du plan perpendiculaire & du plan diviseur* (Fig. 152.). Nous venons de démontrer que le centre se trouve dans l'un & dans l'autre plan, donc il doit nécessairement se trouver dans leur intersection.

Or il faut remarquer ici, 1°. Que de tous les onglets il n'y a que ceux dont les Elemens de la base paralleles à la pointe peu-

vent être tous divisés en deux également par une droite QI perpendiculaire ou oblique à la même pointe, qui puissent être coupés en deux parties égales par un plan perpendiculaire à la base, car alors coupant l'onglet par des plans verticaux sur les Elemens de la base, ces plans feront des rectangles qui seront tous coupés en deux également par le plan perpendiculaire à la base sur la droite IQ, & par conséquent le centre de gravité sera dans ce plan. Mais il n'en est pas de même des onglets dont les Elemens de la base ne peuvent pas être divisés en deux parties égales, car quoiqu'on puisse trouver une droite qui divise la base en deux parties égales, cependant tous les Elemens n'étant pas divisés de la même façon, les rectangles élevés verticalement sur ces Elemens ne seront pas tous divisés en deux parties égales par le plan vertical sur la droite qui divise la base, d'où il suit que l'onglet ne sera pas divisé non plus en deux également, & que son centre de gravité ne sera pas dans le plan perpendiculaire. 2°. Dans les onglets qui sont divisés en deux parties égales par un plan perpendiculaire IQP, le centre de gravité se trouve encore indéterminé, car quoiqu'on sache qu'il est dans la droite IO qui est la section commune du plan diviseur & du plan perpendiculaire, il reste encore à sçavoir dans quel point de cette droite on peut le trouver, & c'est ce que nous allons chercher presentement en commençant d'abord par les onglets dont les Elemens de la base ont entr'eux un rapport connu.

Du centre de gravité des Onglets dont les Elemens de la base ont un rapport connu.

227. Nous avons démontré sur la fin du nombre 215, que le moment d'un onglet étoit égal au produit des Elemens de sa base multipliés par les quarrés de leurs distances à la pointe ou à l'axe de mouvement; or c'est sur ce principe & sur les deux précédens que nous allons déterminer les centres de gravité dont il est ici question en employant l'Arithmetique des Infinis; nous supposons toujours que le plan incliné de l'onglet fait un angle de 45 degrés avec la base.

228. Soit un onglet ABCED (*Fig.* 154.) dont la pointe est la droite RS & la base est le triangle ABC dont l'onglet est le moment par rapport à RS. Du sommet A du triangle menons la perpendiculaire AP, au côté opposé, & concevons que les Ele-

mens soient pris parallelement à la pointe RS ; ces Elemens formeront une suite dont les termes seront entr'eux comme les nombres naturels o. 1. 2. 3. &c. dont l'exposant est 1, ainsi nous les appellerons o. a, b, c, d, &c. jusqu'au dernier & plus grand que nous appellerons P. Les distances de ces Elemens à la pointe RS formeront aussi une suite dont les termes seront entr'eux comme les Elemens, c'est pourquoi nous les appellerons o. x, z, y, &c. jusqu'à la derniere & plus grande AP que nous appellerons D, & comme le nombre des termes est égal à cette distance nous l'appellerons aussi D, donc les quarrés des distances serons o. x^2, z^2, y^2, &c. D^2.

Cela posé, le moment de la base ou la grandeur de l'onglet sera égal à la somme des Elemens multipliés par leurs distances, ou à la suite o. az, bz, cy, &c. PD; or cette suite étant le produit des deux autres qui ont chacune pour exposant l'unité, son exposant sera $1+1=2$, & par conséquent la somme de cette suite sera $\frac{1}{3}$ PD × D.

o.	o.
ax.	ax^2.
bz.	bz^2.
cy.	cy^2.
&c.	&c.
PD.	PD^2.
$\frac{1}{3}$ PD×D.	$\frac{1}{4}PD^2 \times D$.

De même le moment de l'onglet par rapport au plan vertical élevé sur RS est égal aux Elemens de la base multipliés par les quarrés de leurs distances ou à la suite o. ax^2, bz^2, cy^2, &c. PD^2. Or cette suite étant le produit de deux autres dont les exposans sont 1, 2, son exposant est par conséquent 3, & sa somme est $\frac{1}{4}$ PDD × D, divisant donc ce moment par la grandeur de l'onglet, le quotient $\frac{3}{4}$D sera la distance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical sur la pointe RS.

Pour faire voir en passant l'accord des principes que nous établissons, on n'a qu'à faire attention que l'onglet proposé est une pyramide dont le sommet est A & la base est le plan BDEC. Or les Elemens de cette pyramide paralleles à sa base étant entr'eux comme les quarrés des nombres naturels dont l'exposant est 2, la distance de son centre de gravité à sa base est à la distance de ce même centre au sommet comme 1 à 2+1, ou comme 1 à 3, selon la regle donnée ci-dessus (*N.* 218.), & c'est précisement la même chose que nous trouvons ici.

Maintenant si nous concevons un plan diviseur AOX (*Fig.* 155.), & un plan AMN perpendiculaire à la base & qui divise l'onglet en deux parties égales, nous savons que le centre de gra-

vité de l'onglet sera dans la commune section AV de ces deux plans ; c'est pourquoi prenant les $\frac{3}{4}$ de AN de A en Z, & élevant en Z une perpendiculaire ZQ, le point Q où cette perpendiculaire coupera la droite AV sera le centre de gravité cherché.

J'ai pris les $\frac{3}{4}$ de AN quoique cette droite ne soit pas la perpendiculaire du triangle ou de la base, mais cela n'y fait rien, parce que quand j'aurois pris les trois quarts de cette perpendiculaire, c'est-à-dire de la droite AP (*Fig.* 154.), il est visible que du point de division menant une droite parallele à la pointe de l'onglet, cette droite auroit coupé les trois quarts de AN (*Fig.* 155.).

229. Soit un autre triangle ABC (*Fig.* 156.), dont l'axe de mouvement est AB, & dont le moment est l'onglet ABCD. Les Elemens de ce triangle paralleles à la base à commencer par le sommet C, seront o. a, b, c, &c. P, & appellant les abscisses CR, CS, CT, &c. o. x, z, y, &c. D, les distances de ces Elemens à l'axe de mouvement AB seront D — o, D — x, D — y, &c. D — D. Multipliant donc les Elemens par leur distances, leur somme ou l'onglet sera la suite Do — o, Da — xa, &c. or cette suite est composée de deux autres dont la premiere qui est positive étant le produit de la suite des égaux D, D, D, &c. par la suite des premieres puissances o. a, b, &c. vaut $\frac{1}{2}$DP × D, & l'autre qui est négative étant le produit des premieres puissances o. a, b, c, &c. par les premieres puissances x, z, y, &c. vaut — $\frac{1}{3}$DP × D ; donc la suite entiere ou l'onglet vaut $\frac{1}{6}$ DP × D.

$$\begin{array}{l} Do - o. \\ Da - ax. \\ Db - bz. \\ Dc - cy. \\ \&c. \\ DP - DP. \end{array}$$

$$\tfrac{1}{2}DP \times D - \tfrac{1}{3}DP \times D = \tfrac{1}{6}DP \times D.$$

D'autre part multipliant les Elemens par les quarrés $D^2 - o + o$, $D^2 - 2xD + xx$, &c. de leurs distances les produits formeront une suite qui sera composée de trois autres comme on le voit ici ; or la premiere de ces

$$\begin{array}{l} D^2 o - oD + o. \\ D^2 a - 2axD + axx. \\ D^2 b - 2bzD + bzz. \\ D^2 c - 2cyD + cyy. \\ \&c. \\ D^2 P - 2PD^2 + PD^2. \end{array}$$

$$\tfrac{1}{2}D^3P - \tfrac{2}{3}D^3P + \tfrac{1}{4}D^3P = \tfrac{1}{12}D^3P.$$

ſuites étant le produit des égaux D^2, D^2, &c. par les premieres puiſſances o. *a*, *b*, *e*, &c. vaut $\frac{1}{2}$ D^3P, la ſeconde étant un double produit des premieres puiſſances o. *a*, *b*, &c. par les premieres puiſſances o. *x*, *z*, *y*, &c. vaut $-\frac{2}{3}$ D^3P parce qu'elle eſt négative, & la troiſiéme étant le produit des premieres puiſſances o. *a*, *b*, *c*, &c. par les quarrés o. *xx*, *zz*, *yy*, &c. vaut $\frac{1}{4}$ D^3P; donc la ſuite entiere où le moment de l'onglet vaut $\frac{1}{12}$ D^3P; diviſant donc ce moment par la grandeur $\frac{1}{6}$ D^2P, le quotient $\frac{1}{2}$ D marquera la diſtance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical élevé ſur la pointe AB, & cette diſtance ainſi trouvée il ſera facile de trouver ce centre ſur l'interſection du plan diviſeur & du plan perpendiculaire.

Si l'on veut ici s'aſſurer encore une fois de l'accord des principes, conſiderez que l'onglet propoſé étant une pyramide, ſi du centre de gravité O de ſa baſe (*Fig.* 157.) on tire une droite OD au ſommet, cette droite ſera l'axe de la pyramide, & comme la diſtance de ſon centre de gravité à la baſe eſt le quart de la hauteur CD (*N.* 218.); & qu'il ſe trouve par conſéquent en P, enſorte que OP eſt le quart de l'axe, ſi du point P vous abaiſſez une perpendiculaire PX ſur la baſe, vous aurez à cauſe des triangles rectangles ODC, OPX; OX, OC :: OP, OD, & par conſéquent OX ſera le quart de OC; mais le point O étant le centre de gravité de la baſe ou du triangle ABC, la droite OC eſt les deux tiers de MC, donc OX eſt le quart des deux tiers de MC, c'eſt-à-dire, les $\frac{2}{12}$ ou les $\frac{1}{6}$ de MC. Ajoûtant donc ce ſixiéme au tiers MO, la droite MC ſera le tiers plus le ſixiéme ou la moitié de MC, & c'eſt ce que nous venons de trouver.

230. Soit un rectangle ABCD (*Fig.* 158.) dont le moment eſt l'onglet ABCDEF ayant ſa pointe ſur le côté AB; les Elemens du rectangle paralleles à la baſe étant égaux entr'eux forment la ſuite P, P, P, &c. dont l'expoſant eſt zero, & leurs diſtances forment la ſuite o. *x*, *z*, *y*, &c. D, dont l'expoſant eſt 1, multipliant donc les Elemens par leurs diſtances les produits ou le moment du rectangle ſera la ſuite Po, P*x*, P*z*, &c. PD, dont la valeur eſt $\frac{1}{2}$ PDD.

Po.	Po.
P*x*.	Px^2.
P*z*.	Pz^2.
P*y*.	Py^2.
&c.	&c.
PD.	PD^2.
$\frac{1}{2}$ PDD.	$\frac{1}{3}$ PD^3.

Multipliant de même les Elemens par les quarrés de leurs diſtances les produits feront la ſuite Po, Px^2,

Pz^2, &c. PDD, donc la valeur est $\frac{1}{3}PD^3$; divisant donc cette valeur qui est le moment de l'onglet, par la grandeur $\frac{1}{2}$ PDD, le quotient $\frac{2}{3}$D marquera que le centre de gravité de l'onglet est éloigné du plan vertical sur la pointe AB des deux tiers de la droite IQ perpendiculaire à cette pointe ; & en effet, si on conçoit que l'onglet soit coupé par une infinité de plans perpendiculaires à la base & à la pointe, ces plans seront autant de triangles rectangles tous égaux entr'eux, & prenant pour les sommets de ces triangles les angles qui sont sur la pointe AB, il est visible que leurs centres de gravité seront tous éloignés de ce sommet des deux tiers de la droite IQ. Donc leur centre commun, c'est-à-dire le centre de l'onglet sera dans le même éloignement.

Coupant donc l'onglet par un plan diviseur ABVT, & par un plan IPQ perpendiculaire à la base & à la pointe, & qui coupe l'onglet en deux parties égales, le centre de gravité sera sur la droite IO, & pour le déterminer on prendra IX égal aux deux tiers de IQ, & élevant sur X la perpendiculaire XS, le point S où cette perpendiculaire coupera la droite OI sera le centre de gravité cherché.

Ce seroit la même chose si la base de l'onglet étoit un parallelogramme au lieu d'un rectangle. Venons à present aux onglets qui n'ont point de plans perpendiculaires à la base qui les coupe en deux parties égales.

231. Soit une demi-parabole quarrée ABC (*Fig.* 159.) dont l'onglet ABCDE ayant sa pointe en AS, est le moment par rapport à AS. Les Elemens de cette parabole à commencer au sommet A sont entr'eux comme les racines des nombres naturels, & par conséquent ils forment la suite o. $a^{\frac{1}{2}}$, $b^{\frac{1}{2}}$, $c^{\frac{1}{2}}$, &c. P, & leurs distances sont o. x, z, y, &c. D, multipliant donc les Elemens par leurs distances, leurs produits formeront la suite o. $a^{\frac{1}{2}}x$, $b^{\frac{1}{2}}z$, &c.

o.	o.
$a^{\frac{1}{2}}x$.	$a^{\frac{1}{2}}x^2$.
$b^{\frac{1}{2}}z$.	$b^{\frac{1}{2}}z^2$.
$c^{\frac{1}{2}}y$.	$c^{\frac{1}{2}}y^2$.
&c.	&c.
PD.	PD^2.
$\frac{2}{3}PD^2$.	$\frac{2}{7}PD^3$.

laquelle étant le produit des racines quarrées multipliées par les premieres puissances, a pour exposant $\frac{1}{2}+1$ ou $\frac{3}{2}$, ainsi la somme est au dernier terme multiplié par le nombre des termes D comme 1 à $\frac{3}{2}+1$ ou comme 2 à 5, donc cette somme ou le moment de la parabole est $\frac{2}{5}PD^2$.

Multipliant de même les Elemens par les quarrés des distances, les produits formeront la suite o. $a^{\frac{1}{2}}x^2$, $b^{\frac{1}{2}}z^2$, &c. laquelle étant le produit des racines quarrées par les quarrés a pour exposant $\frac{1}{2}+2$ ou $\frac{5}{2}$, & par conséquent sa somme sera $\frac{2}{7}$ PD³. Divisant donc cette somme qui est le moment de l'onglet par la grandeur $\frac{2}{5}$ PD², le quotient $\frac{5}{7}$ D marquera que le centre de gravité de cet onglet est éloigné du plan vertical sur la pointe AS de $\frac{5}{7}$ de la droite AC.

Maintenant on peut bien trouver un plan diviseur de l'onglet; mais on ne trouvera point de plan perpendiculaire sur la base qui le divise en deux également; c'est pourquoi pour déterminer le centre de gravité, il faut prendre un plan vertical sur le côté AC & chercher la distance du centre à ce plan. Concevons donc que l'onglet soit coupé par une infinité de plans perpendiculaires à la base & paralleles à la pointe AS. Ces plans seront des rectangles dont les bases seront égales aux Elemens de la demi-parabole; & comme dans les rectangles le centre de gravité se trouve sur la ligne qui coupe la base en deux parties égales & qui lui est perpendiculaire, il s'ensuit que les distances des centres de gravité des rectangles au plan vertical sur AC seront égales aux moitiés des Elemens de la base: or la suite des rectangles est o. $a^{\frac{1}{2}}x$, $b^{\frac{1}{2}}z$, &c. multipliant donc ces rectangles par les distances qui sont o. $\frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{2}b^{\frac{1}{2}}$, &c. les produits formeront la suite o. $\frac{1}{2}ax$, $\frac{1}{2}bz$, &c. laquelle étant la moitié du produit des premieres puissances a, b, c &c. par les premieres puissances; aura pour exposant 2, & par conséquent sa somme ou le moment de l'onglet par rapport au plan vertical sur AC sera $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$ P²D² $=\frac{1}{6}$ P²D², & divisant ce moment par la grandeur $\frac{2}{5}$ PD², le quotient $\frac{5}{12}$ P marquera que le centre de gravité de l'onglet est éloigné du plan vertical sur AC des $\frac{5}{12}$ de la droite CB.

o	o
$a^{\frac{1}{2}}x$	$\frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{2}}x=\frac{1}{2}ax$.
$b^{\frac{1}{2}}z$	$\frac{1}{2}b^{\frac{1}{2}}\times b^{\frac{1}{2}}z=\frac{1}{2}bz$.
$c^{\frac{1}{2}}y$	$\frac{1}{2}c^{\frac{1}{2}}\times c^{\frac{1}{2}}y=\frac{1}{2}cy$.
&c.	&c. &c.
PD	$\frac{1}{2}$P. $\times$PD $=\frac{1}{2}$P²D.
	$\frac{1}{6}$P²D².

Prenant donc sur AC la droite AX égale aux $\frac{5}{7}$ de AC, & sur CB la droite CT égale aux $\frac{5}{12}$ de CT, on menera du point X une droite XO parallele à CB, & du point T une droite TO parallele à AC & sur le point O d'intersection on élevera une perpendiculaire

pendiculaire sur la base, & le point V où cette perpendiculaire coupera le plan diviseur sera le centre de gravité.

Que si on veut trouver autrement la hauteur de cette perpendiculaire, on prolongera TO jusqu'à ce qu'elle coupe la pointe en R, & dans le plan CDEB on élevera la perpendiculaire TN égale à la moitié de la hauteur CD, puis on dira comme RT est à TN, ainsi RO est à un quatriéme terme qui sera la hauteur du centre de gravité sur la base, ce qui est évident à cause que le plan diviseur MQA coupe CDEB en deux parties égales, & que par conséquent si l'on tire dans ce plan la droite NR, les perpendiculaires TN, QV seront proportionnelles aux droites RO, RT.

232. Soit l'onglet ABCD (*Fig.* 160.) qui est le moment de la demi-parabole quarrée ABC par rapport à sa base BC; les Elemens de sa base en commençant par le sommet A sont o. $a^{\frac{1}{2}}$, $b^{\frac{1}{2}}$, $c^{\frac{1}{2}}$, &c. P, & leurs distances sont D—o, D—x, D—z, &c. D—D, appellant l'axe CA = D. Multipliant donc les Elemens par leurs distances, leur produit ou l'onglet sera la suite D—o, $a^{\frac{1}{2}}$D—$a^{\frac{1}{2}}x$, &c. laquelle est composée de deux autres, dont la premiere étant le produit des racines quarrées o. $a^{\frac{1}{2}}$, $b^{\frac{1}{2}}$, &c. par les égaux D, D, D, &c. vaut $\frac{2}{3}$PD², & la seconde qui est négative vaut $-\frac{2}{5}$PD², ainsi la suite entiere vaut $\frac{4}{15}$PD².

$Do - o.$	$D^2o - oD + o.$
$a^{\frac{1}{2}}D - a^{\frac{1}{2}}x.$	$a^{\frac{1}{2}}D^2 - 2a^{\frac{1}{2}}xD + a^{\frac{1}{2}}x^2.$
$b^{\frac{1}{2}}D - b^{\frac{1}{2}}z.$	$b^{\frac{1}{2}}D^2 - 2b^{\frac{1}{2}}zD + b^{\frac{1}{2}}z^2.$
$c^{\frac{1}{2}}D - c^{\frac{1}{2}}y.$	$c^{\frac{1}{2}}D^2 - 2c^{\frac{1}{2}}yD + c^{\frac{1}{2}}y^2.$
&c.	&c.
$PD - PD.$	$PD^2 - 2PD \times D + PD^2.$
$\frac{2}{3}PD^2 - \frac{2}{5}PD^2 = \frac{4}{15}PD^2.$	$\frac{2}{3}PD^3 - \frac{4}{5}PD^3 + \frac{2}{7}PD^3 = \frac{16}{105}PD^3.$

Multipliant de même les Elemens par les quarrés de leurs distances qui sont D²—oD+o, D²—2xD+x^2, &c. les produits ou le moment de l'onglet sera la suite qu'on voit ici, & dont la valeur est $\frac{16}{105}$PD³. Divisant donc ce moment par la gran-

deur $\frac{4}{15}$ PD², ou $\frac{28}{105}$ PD², le quotient $\frac{16}{28}$ D ou $\frac{4}{7}$ D marquera la distance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical sur la pointe BC.

Et supposant un autre plan vertical sur l'axe AC, les plans Elementaires de l'onglet perpendiculaires à ce plan seront des rectangles qui expriment les momens des Elemens de la base par rapport à AC, c'est-à-dire les rectangles Do — o, $a^{\frac{1}{2}}D - a^{\frac{1}{2}}x$, $b^{\frac{1}{2}}D - b^{\frac{1}{2}}z$, &c. & comme les centres de gravité de ces rectangles se trouvent sur la perpendiculaire qui coupe leurs bases en deux également, les distances de ces centres au plan vertical sur AC seront les moitiés des Elemens de la base ou la suite o. $\frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}b^{\frac{1}{2}}$,&c. multipliant donc les rectangles par les distances de leurs centres de gravité, le

$$oDo \quad - \quad o$$
$$\tfrac{1}{2}a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}}D - \tfrac{1}{2}a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}}x = \tfrac{1}{2}aD - \tfrac{1}{2}ax.$$
$$\tfrac{1}{2}b^{\frac{1}{2}} \times b^{\frac{1}{2}}D - \tfrac{1}{2}b^{\frac{1}{2}} \times b^{\frac{1}{2}}z = \tfrac{1}{2}bD - \tfrac{1}{2}bx.$$
$$\&c, \quad \&c. \quad \&c.$$
$$\tfrac{1}{2}P \times PD - \tfrac{1}{2}P \times PD = \tfrac{1}{2}P^2D - \tfrac{1}{2}P^2D.$$
$$\overline{\tfrac{1}{4}P^2D^2 - \tfrac{1}{6}P^2D^2 = \tfrac{1}{12}P^2D^2.}$$

produit ou le moment de l'onglet par rapport au plan vertical sur AC sera o. $\frac{1}{2}aD - \frac{1}{2}ax$, $\frac{1}{2}bD - \frac{1}{2}bx$, &c. & ce produit comme on voit ici vaut $\frac{1}{12}$ P²D²; ainsi divisant ce moment par la grandeur $\frac{4}{15}$ PD², le quotient $\frac{5}{16}$ P marquera que la distance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical sur AC est les $\frac{5}{16}$ de BC.

On prendra donc sur CA la droite CX égale aux $\frac{4}{7}$ de CA, & sur BC la droite CZ égale aux $\frac{5}{16}$ de BC, & menant du point X une droite XO parallele à BC, & du point Z une droite ZO parallele à AC, on élevera sur le point O une perpendiculaire, & le point où cette perpendiculaire coupera le plan diviseur de l'onglet, sera le centre cherché, ou bien on déterminera la hauteur de cette perpendiculaire, ainsi qu'il a été dit ci-dessus.

233. Soit l'onglet ABCD (*Fig.* 161.) qui est le moment de la demi-parabole quarrée ABC par rapport à son axe AC. On peut trouver le centre de gravité de cet onglet de deux différentes façons, que je vais expliquer ici, afin que les Commençans apprennent par là de quelle façon il faut se retourner pour resoudre un Problême.

La premiere maniere est de suivre la methode que nous ve-

nons d'employer, & pour cela il faut d'abord circonscrire à la demi-parabole le rectangle ACBE ; ensuite il faut faire attention que les Elemens de la demi-parabole paralleles à l'axe sont égaux à la somme des Elemens du rectangle ACBE, moins la somme des Elemens du complement AEB. Or les Elemens du complement AEB en commençant au sommet A, forment la suite o. a^2, b^2, c^2, &c. P, & la somme des Elemens du rectangle forme la suite des égaux P, P, P, &c. donc la somme des Elemens de la parabole paralleles à l'axe en commençant du côté de l'axe forment la suite P—o, P—a^2, P—b^2, P—c^2, &c. P—P; mais les distances de ces Elemens à l'axe forment la suite o. x, z, y, &c. D, multipliant donc les Elemens par leurs distances, le produit ou l'onglet ABCD sera la suite oP—oo, xP—xa^2, &c. dont la valeur est $\frac{1}{4}$ D^2P.

oP — oo.	oP — oo.
xP — xa^2.	x^2P — x^2a^2.
zP — zb^2.	z^2P — z^2b^2.
yP — yc^2.	y^2P — y^2c^2.
&c.	&c.
DP — DP.	D^2P — D^2P.
$\frac{1}{2}D^2P - \frac{1}{4}D^2P = \frac{1}{4}D^2P$.	$\frac{1}{3}D^3P - \frac{1}{5}D^3P = \frac{2}{15}D^3P$.

Multipliant de même les Elemens par les quarrés de leurs distances, le produit ou le moment de l'onglet par rapport au plan vertical sur AC, sera la suite oP—oo, x^2P—x^2a^2, z^2P—z^2b^2, &c. dont la valeur est $\frac{2}{15}$ D^3P. Divisant donc ce moment par la grandeur $\frac{1}{4}$ D^2P, le quotient $\frac{8}{15}$ D marquera la distance du centre de gravité au plan vertical sur AC.

Et concevant un plan vertical sur CB, les plans Elementaires de l'onglet paralleles à AC seront les rectangles oP—oo, xP—xa^2, zP—zb^2, &c. qui forment les momens des Elemens de la base, & comme les centres de gravité de ces rectangles se trouvent sur les perpendiculaires élevées sur le milieu de leurs bases, il s'ensuit que les distances de ces centres au plan vertical sur CB sont égales aux moitiés des Elemens de la base paralleles à AC, donc ces distances forment la suite $\frac{1}{2}$P—$\frac{1}{2}$o, $\frac{1}{2}$P—$\frac{1}{2}a^2$, $\frac{1}{2}$P—$\frac{1}{2}b^2$, &c. $\frac{1}{2}$P—$\frac{1}{2}$P. Multipliant donc les rectan-

gles par ces distances, le produit ou le moment de l'onglet par rapport au plan vertical sur CB, sera la suite qu'on voit ici, & dont la valeur est $\frac{1}{12}$ D^2P^2.

$$\frac{1}{2}oP^2 - o \qquad o.$$
$$\frac{1}{2}xP^2 - a^2xP + \frac{1}{2}xa^4.$$
$$\frac{1}{2}zP^2 - b^2zP + \frac{1}{2}zb^4.$$
$$\frac{1}{2}yP^2 - c^2yP + \frac{1}{2}yc^4.$$
&c.
$$\frac{1}{2}DP^2 - PDP + \frac{1}{2}DP^2.$$

Divisant donc ce moment par la grandeur $\frac{1}{4}D^2P$, le quotient $\frac{1}{3}P$ marquera la distance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical sur CB, ainsi on prendra sur CB la droite CX égale à $\frac{8}{15}$ de CB, & sur AC la droite CZ égale au $\frac{1}{3}$ de AC ; puis tirant ZO parallele à CB, & XO parallele à AC, on élevera sur le point O une perpendiculaire laquelle venant à couper le plan diviseur de l'onglet donnera dans le point de rencontre le centre de gravité cherché.

$$\frac{1}{4}D^2P^2 - \frac{1}{4}D^2P^2 + \frac{1}{12}D^2P^2 = \frac{1}{12}D^2P^2.$$

Pour trouver le même centre de gravité par une autre voye, voici comme on fera : Concevez que l'onglet soit coupé par une infinité de plans perpendiculaires à la base, & à la pointe AC, ces plans seront des triangles rectangles isosceles qui par conséquent seront les produits de leurs bases par la moitié de leurs hauteurs ou par la moitié des mêmes bases. Or les bases des triangles sont les Elemens de la demi-parabole ABC ordonnés à la pointe AC ou à l'axe ; donc ces Elemens sont o. $a^{\frac{1}{2}}$, $b^{\frac{1}{2}}$, $c^{\frac{1}{2}}$, &c. P, & ces Elemens multipliés par leurs moitiés o. $\frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{2}b^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{2}c^{\frac{1}{2}}$, &c. $\frac{1}{2}P$, donnent la suite o. $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}c$, &c. $\frac{1}{2}PP$, dont la valeur est $\frac{1}{4}P^2D$ en appellant D le nombre des termes ou l'axe AC.

o.	o.
$\frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}a.$	$\frac{1}{2}a \times \frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}.$
$\frac{1}{2}b^{\frac{1}{2}} \times b^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}b.$	$\frac{1}{2}b \times \frac{2}{3}b^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}b^{\frac{3}{2}}.$
$\frac{1}{2}c^{\frac{1}{2}} \times c^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}c.$	$\frac{1}{2}c \times \frac{2}{3}c^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}c^{\frac{3}{2}}.$
&c.	&c.
$\frac{1}{2}P \times P = \frac{1}{2}PP.$	$\frac{1}{2}P^2 \times \frac{2}{3}P = \frac{1}{3}P^3.$
$\frac{1}{4}P^2D.$	$\frac{2}{15}P^3D.$

Or prenant pour les sommets des triangles qui composent l'onglet, les angles qui sont sur la pointe AC, les distances de leurs centres de gravité

au plan vertical sur cette pointe, seront les deux tiers de leurs bases. ainsi ces distances formeront la suite o. $\frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}$, $\frac{2}{3}b^{\frac{1}{2}}$, $\frac{2}{3}c^{\frac{1}{2}}$, $\frac{2}{3}$P. Multipliant donc les triangles par leurs distances, c'est-à-dire la suite o. $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}c$, &c. par la suite des distances, le produit ou le moment de l'onglet par rapport à AC sera la suite o, $\frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}$, $\frac{1}{3}b^{\frac{3}{2}}$, &c. dont la valeur est $\frac{2}{15}P^3D$, & divisant ce moment par la grandeur $\frac{1}{4}P^2D$, le quotient $\frac{8}{15}$P marquera la distance du centre de gravité à l'axe, & c'est la même distance que nous avons trouvé par la Méthode précédente, si ce n'est que nous appellons ici P ce que nous appellions D & D, ce que nous appellions P.

Et concevant un plan vertical sur BC, les distances des triangles à ce plan seront, à commencer par le sommet A, D — o, D — x, D — z, &c. D — D, en appellant x, z, y, &c. les abscisses de l'axe. Multipliant donc les triangles par leurs distances, le produit ou le moment de l'onglet par rapport au plan vertical sur BC sera la suite o, $\frac{1}{2}a$D — $\frac{1}{2}ax$, $\frac{1}{2}b$D — $\frac{1}{2}bz$, &c. dont la valeur est $\frac{1}{12}P^2D$, &

$$o$$
$$\frac{1}{2}aD - \frac{1}{2}ax$$
$$\frac{1}{2}bD - \frac{1}{2}bz$$
$$\frac{1}{2}cD - \frac{1}{2}cy$$
&c.
$$\frac{1}{2}P^2D - \frac{1}{2}PD$$
$$\frac{1}{4}P^2D^2 - \frac{1}{6}P^2D^2 = \frac{1}{12}P^2D^2.$$

divisant ce moment par la grandeur $\frac{1}{4}P^2D$, le quotient $\frac{1}{3}$D sera la distance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical sur BC.

Les distances du centre de gravité de l'onglet aux plans verticaux sur AC & sur CB étant trouvées, on trouvera ce centre ainsi qu'il a été dit ci-dessus, ce qui est trop aisé pour le répeter davantage.

34. Soit l'onglet ABCDE (*Fig.* 162.) qui est le moment de la demi-Parabole ABC par rapport à la droite AF parallele à l'axe BC, les Elemens de cette demi-Parabole paralleles à la pointe AF étant la somme des Elemens du rectangle circonscrit ACBF moins la

$$PD - oD - oP + o$$
$$PD - Da^2 - xP + a^2x$$
$$PD - Db^2 - zP + b^2z$$
$$PD - Dc^2 - yP + c^2y$$
&c.
$$PD - DP - DP + PD$$
$$PD^2 - \frac{1}{3}PD^2 - \frac{1}{2}PD^2 + \frac{1}{4}PD^2 = \frac{5}{12}PD^2.$$

somme des Elemens du complement AFB, sont à commencer du côté de l'axe, la suite $P - o$, $P - a^2$, $P - b^2$, $P - c^2$, &c. $P - P$, & appellant D la plus grande distance FB qui est aussi le nombre des termes, les distances sont $D - o$, $D - x$, $D - z$, $D - y$, &c. $D - D$. Multipliant donc les Elemens par leurs distances, le produit ou l'onglet sera la suite $PD - oD - oP + o$, $PD - Da^2 - xP + a^2x$, &c. dont la valeur est $\frac{5}{12}PD^2$.

Multipliant de même les Elemens par les quarrés de leurs distances, le produit ou le moment de l'onglet sera la suite qu'on voit ici, & dont la valeur est $\frac{3}{10}PD^3$. Divisant donc ce moment par la grandeur $\frac{5}{12}PD^2$, le quotient $\frac{18}{25}D$ marquera la distance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical sur AF.

$$PD^2 - o - o + o + o - o.$$
$$PD^2 - a^2D^2 - 2PxD + 2a^2xD + Px^2 - a^2x^2$$
$$PD^2 - b^2D^2 - 2zPD + 2b^2zD + Pz^2 - b^2z^2$$
$$PD^2 - c^2D^2 - 2yPD + 2c^2yD + Py^2 - c^2y^2$$
&c.
$$PD^2 - PD^2 - 2DPD + 2PD^2 + PD^2 - PD^2$$
$$\overline{PD^3 - \tfrac{1}{3}PD^3 - \tfrac{2}{2}PD^3 + \tfrac{2}{4}PD^3 + \tfrac{1}{3}PD^3 - \tfrac{1}{5}PD^3 = \tfrac{3}{10}PD^3.}$$

$$\tfrac{1}{2}P^2D$$
$$\tfrac{1}{2}P^2D - PDa^2 - \tfrac{1}{2}xP^2 + a^2xP + \tfrac{1}{2}a^4D - \tfrac{1}{2}a^4x$$
$$\tfrac{1}{2}P^2D - PDb^2 - \tfrac{1}{2}zP^2 + b^2zP + \tfrac{1}{2}b^4D - \tfrac{1}{2}b^4z$$
$$\tfrac{1}{2}P^2D - PDc^2 - \tfrac{1}{2}yP^2 + c^2yP + \tfrac{1}{2}c^4D - \tfrac{1}{2}c^4y$$
&c.
$$\tfrac{1}{2}P^2D - P^2D - \tfrac{1}{2}DP^2 + PDP + \tfrac{1}{2}P^2D - \tfrac{1}{2}P^2D$$
$$\overline{\tfrac{1}{2}P^2D^2 - \tfrac{1}{3}P^2D^2 - \tfrac{1}{4}P^2D^2 + \tfrac{1}{4}P^2D^2 + \tfrac{1}{10}P^2D^2 - \tfrac{1}{12}P^2D^2 = \tfrac{11}{60}P^2D^2.}$$

Et concevant un plan vertical sur la droite AC, les distances des plans Elementaires de l'onglet seront égales aux moitiés des Elemens de la base paralleles à AF, à cause que ces plans Elementaires sont des rectangles; ainsi ces distances formeront la suite $\frac{1}{2}P - o$, $\frac{1}{2}P - \frac{1}{2}a^2$, $\frac{1}{2}P - \frac{1}{2}b^2$, &c. Multipliant donc les rectangles, c'est-à-dire la suite $PD - oD - oP + o$, $PD - Da^2 - xP + a^2x$, &c. par leurs distances, le produit ou le moment

de l'onglet par rapport au plan vertical sur AC sera une suite dont la valeur comme on voit ici est $\frac{11}{60}P^2D$. Divisant donc ce moment par la grandeur $\frac{5}{12}PD^2$, ou $\frac{25}{60}PD^2$, le quotient $\frac{11}{25}P$ marquera la distance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical sur AC.

On prendra donc sur $AF = P$ la partie AX égale à $\frac{11}{25}$ de AF, & sur AC la partie AZ égale à $\frac{18}{25}$ de AC, & menant les paralleles XO, ZO, la perpendiculaire élevée sur le point O coupera le plan diviseur de l'onglet en un point qui sera le centre de gravité.

Je ne donne pas un grand nombre d'exemples de ceci, car il est facile de voir qu'on peut trouver de la même façon les centres de gravité des onglets faits sur des paraboles entieres de quelque genre qu'elles soient sur leurs complemens & en general sur toutes les bases dont les Elemens sont entr'eux comme les termes d'une suite connuë ; mais comme nous avons supposé jusqu'ici que le plan incliné de l'onglet passoit par l'extremité de la base, il est bon de dire quelque chose des onglets dont la pointe est hors la base.

235. Soit l'onglet ABCDEF (*Fig.* 163.) qui est le moment du triangle ABC par rapport à la droite RS, j'appelle o. *a*. *b*. *c*. *d*, &c. P les Elemens de la base paralleles à la pointe RS de l'onglet ; N la droite NA ; o, x, z, y, &c. D, les abscisses AQ, AP, Ao, &c. Donc les distances à la pointe seront $N + o$, $N + x$, $N + z$, &c. $N + D$, & le nombre des termes sera D.

Multipliant donc ces Elemens par leurs distances, le produit ou l'onglet sera la suite $No + o$, $Na + ax$, &c. dont la valeur est $\frac{1}{2}NDP + \frac{1}{2}PD^2$.

$No + o$	$N^2o +$
$Na + ax$	$N^2a + 2axN + axx$
$Nb + bx$	$N^2b + 2bzN + bzz$
$Nc + cx$	$N^2c + 2cyN + cyy$
&c.	&c.
$NP + PD$.	$N^2P + 2PDN + PD^2$
$\frac{1}{2}NDP + \frac{1}{3}DP^2$.	$\frac{1}{2}N^2PD + \frac{2}{3}NPD^2 + \frac{1}{4}PD^3$

Multipliant de même les Elemens par les quarrés de leurs distances qui sont $N^2 + 2No + o$, $N^2 + 2xN + x^2$, &c. le produit ou le moment de l'onglet par rapport au plan vertical sur RS sera $\frac{1}{2}N^2PD + \frac{2}{3}NPD^2 + \frac{1}{4}PD^3$. Divisant donc ce moment

par la grandeur $\frac{1}{2}NDP + \frac{1}{3}PD^2$, le quotient $\frac{6N^2PD + 8NPD^2 + 3PD^3}{6NDP + 4PD^2}$ $= \frac{6N^2 + 8ND + 3D^2}{6N + 4D}$ sera la distance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical sur RS, & cette distance étant trouvée, il sera facile de déterminer le centre par le plan diviseur & par le plan perpendiculaire à la base qui coupe l'onglet en deux également ainsi qu'il a été enseigné ci-dessus.

236. Soit l'onglet ABCDEF (*Fig.* 164.) qui est le moment du triangle ABC par rapport à la droite RS, j'appelle des mêmes noms les grandeurs ci-dessus nommées, en commençant à compter les Elemens de la base & les abscisses par le sommet C, les distances des Elemens à la pointe sont $N + D - o$, $N + D - x$, $N + D - z$, &c. $N + D - D$; ainsi multipliant les Elemens par leurs distances, le produit ou l'onglet sera une suite dont la valeur est $\frac{1}{2}NPD + \frac{1}{6}PD^2$.

$$\begin{array}{lll}
No & + Do & - o \\
Na & + Da & - ax \\
Nb & + Db & - bx \\
Nc & + Dc & - cy \\
\&c. & & \\
NP & + DP & - PD \\
\hline
\end{array}$$

$$\frac{1}{2}NPD + \frac{1}{2}D^2P - \frac{1}{3}PD^2 = \frac{1}{2}NPD + \frac{1}{6}PD^2.$$

Multipliant de même les Elemens par les quarrés de leurs distances, le produit ou le moment de l'onglet par rapport au plan vertical sur RS sera une suite dont la valeur comme on voit ici est $\frac{1}{2}N^2P + \frac{1}{3}ND^2P + \frac{1}{12}PD^3$.

$$\begin{array}{l}
N^2o \\
N^2a + 2NDa - 2Nxa + aD^2 - 2Dxa + ax^2 \\
N^2b + 2NDb - 2Nzb + bD^2 - 2Dzb + bz^2 \\
N^2c + 2NDc - 2Nyc + cD^2 - 2Dyc + cy^2 \\
\&c. \\
N^2P + 2NDP - 2NDP + PD^2 - 2D^2P + PD^2 \\
\hline
\end{array}$$

$$\frac{1}{2}N^2DP + ND^2P - \frac{2}{3}ND^2P + \frac{1}{2}PD^3 - \frac{2}{3}PD^3 + \frac{1}{4}PD^3 = \frac{1}{2}N^2DP + \frac{1}{3}ND^2P + \frac{1}{12}PD^3$$

Divisant donc ce moment par la grandeur $\frac{1}{2}NPD + \frac{1}{6}PD^2$ le quotient $\frac{6N^2DP + 4ND^2P + PD^3}{6NPD + 2PD^2}$, ou $\frac{6N^2 + 4ND + D^2}{6N + 2D}$ sera la distance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical sur RS; & par conséquent on déterminera ce centre, ainsi qu'il a été dit plus haut.

237

237. Soit l'onglet ABCDE (*Fig.* 165.) qui eſt le moment d'un complement ABC de parabole quarrée par rapport à la droite RS ; appellant N la droite AN ; D la droite BA, o, a^2, b^2, c^2, &c. P, les Elemens paralleles à la pointe RS à commencer au ſommet A, les diſtancés de ces Elemens à la droite RS ſeront N+o, N+x, N+z, N+y, &c. N+D, & le nombre des termes ſera D. Au reſte on voit bien que j'appelle les Elemens o, a^2, b^2, &c. parce que les Elemens d'un complement de parabole quarrée ſont entr'eux comme les quarrés de leurs abſciſſes. Multipliant donc les Elemens par leurs diſtances, le produit ou l'onglet ſera une ſuite dont la valeur eſt $\frac{1}{3}NPD + \frac{1}{4}PD^2$.

$$\begin{array}{llll} No & + o & N^2o^2 & \\ Na^2 & + a^2x & N^2a^2 & + 2a^2xN + a^2x^2. \\ Nb^2 & + c^2y & N^2b^2 & + 2b^2zN + b^2z^2 \\ Nc^2 & + c^2y & N^2c^2 & + 2c^2yN + c^2y^2 \\ \&c. & & \&c. & \\ NP & + PD & N^2P & + 2PDN + PD^2 \\ \hline \frac{1}{3}NPD & + \frac{1}{4}D^2P & \frac{1}{3}N^2PD & + \frac{2}{4}PD^2N + \frac{1}{5}PD^3. \end{array}$$

Multipliant de même les Elemens par les quarrés de leurs diſtances, le produit ou le moment de l'onglet par rapport à RS ſera une ſuite dont la valeur eſt $\frac{1}{3}N^2PD + \frac{2}{4}PD^2N + \frac{1}{5}PD^3$, & diviſant ce moment par la grandeur $\frac{1}{3}NPD + \frac{1}{4}D^2P$, le quotient $\frac{20N^2PD + 30PD^2N + 12PD^3}{20NPD + 15D^2P} = \frac{20N^2 + 30DN + 12D^2}{20N + 15D}$ ſera la diſtance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical ſur SR.

Et concevant un autre plan vertical ſur BA, les plans Elementaires de l'onglet paralleles à RS ſeront les rectangles No + o, Na^2 + a^2x, Nb^2 + b^2z, &c. c'eſt pourquoi les diſtances des centres de gravité de ces rectangles au plan vertical ſur BA ſeront égales aux demi-baſes de ces rectangles ; & par conſéquent elles ſeront o, $\frac{1}{2}a^2$, $\frac{1}{2}b^2$, $\frac{1}{2}c^2$, &c. $\frac{1}{2}$P. Multipliant donc les rectangles par ces diſtances, le produit ou le moment

$$\begin{array}{ll} Noo & + oo \\ \frac{1}{2}Na^4 & + \frac{1}{2}a^4x \\ \frac{1}{2}Nb^4 & + \frac{1}{2}b^4z \\ \frac{1}{2}Nc^4 & + \frac{1}{2}c^4y \\ \&c. & \\ \frac{1}{2}NPP & + PPD \\ \hline \frac{1}{10}NPPD & + \frac{1}{12}PPDD \end{array}$$

de l'onglet par rapport au plan vertical ſur AB ſera une ſuite dont la valeur eſt $\frac{1}{10}NPPD + \frac{1}{12}PPDD$, & diviſant ce moment par la grandeur $\frac{1}{3}NPD + \frac{1}{4}D^2P$, le quotient $\frac{6NPPD + 5PPDD}{20NPD + 15D^2P}$

$= \frac{6NP + 5PD}{20N + 15D}$ sera la distance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical sur AB, après quoi on déterminera facilement la position de ce centre.

Et on suivra la même méthode par rapport aux autres onglets ausquels je ne m'arrête point de peur qu'on ne m'accuse de m'étendre trop sur des choses faciles.

Du centre de gravité des Onglets, dont les Elemens des bases ne sont pas entr'eux dans un rapport connu.

238. On trouvera ces centres par une Methode générale que je vais expliquer : Soit par exemple l'onglet ABCDEFG (*Fig.* 166.) dont la pointe est la droite AB, je coupe cet onglet par des plans diagonaux perpendiculaires à la base, & qui aillent tous aboutir à l'extremité A de la pointe. Ainsi l'onglet se trouve divisé en trois pyramides BCHA, CHGDA, DGFEA, qui ont toutes leur sommet sur la pointe AB. Je cherche le centre de gravité de chacune de ces pyramides, & les distances de ces centres au plan vertical sur AB, puis multipliant chaque pyramide par la distance de son centre, les produits sont les momens de ces pyramides par rapport au plan vertical sur AB. Ajoûtant donc ensemble ces momens, leur somme est le moment de l'onglet par rapport au même plan vertical ; c'est pourquoi je divise ce moment par la valeur de l'onglet ou par la somme des pyramides, & le quotient est la distance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical sur AB.

Toute la difficulté en ceci, consiste à trouver la distance du centre de gravité de chaque pyramide au plan vertical sur l'axe, à cause que ce plan ne peut pas être toujours parallele aux plans Elementaires des pyramides, & pour en venir à bout on agira en cette sorte.

Soit le triangle ABC (*Fig.* 167.) dont l'onglet ABCDE est le moment par rapport à l'axe de mouvement RS qui n'est pas parallele aux Elemens du triangle, je cherche le centre de gravité O de la base BCDE de la pyramide, & la distance de ce centre aux côtés BC, BE, je tire du point O au sommet A la droite OA qui sera l'axe de la pyramide ; & par conséquent le centre de gravité sera sur cet axe, j'abbaisse du point O la perpendiculaire ON, & du point N je tire la droite NA. Cela fait, la droite BN étant la distance du centre de gravité O au

côté BE m'est connue, & je connois aussi le côté BA du triangle & l'angle ABN; donc la droite AN me sera facilement connuë. Je prens donc sur AN la partie AM égale à ses trois quarts, parce que je sçai que le centre de gravité de la pyramide est éloigné du sommet des trois quarts de la hauteur, & du point M élevant la perpendiculaire MQ, le point Q où elle coupe l'axe est le centre de gravité cherché; & il me seroit facile de déterminer la grandeur de l'axe AO par le moyen du triangle rectangle ANO, dont les côtés AN, NO sont connus.

Maintenant pour trouver la distance du centre Q au plan vertical sur RS, je mene du point M la droite MX perpendiculaire sur RX, & connoissant dans le triangle rectangle AMX, l'hypotenuse AM, & l'angle aigu XAM, le côté XM devient aussi connu. Or XM est la distance du centre de gravité de la pyramide au plan vertical sur RS. Donc, &c.

239. Si la pointe de l'onglet se trouve sur la base prolongée (*Fig.* 168.) on coupera l'onglet par un plan FONML parallele à sa base, & qui passe par la moindre hauteur EF, ce qui le divisera en deux solides dont l'un est un prisme, & l'autre est un onglet FLMNOGHI. On cherchera le centre de gravité de la base du prisme, & sa distance à la droite EA, & ajoûtant à cette distance la perpendiculaire menée entre la droite EA & la droite RS, la somme sera la distance du centre de gravité du prisme au plan vertical sur RS; cela fait on divisera l'onglet FLMNOGHI en pyramides qui ayent leur sommet au point F, & l'on cherchera les distances de leurs centres de gravité au plan vertical sur EA, après quoi ajoûtant à chacune de ces distances la perpendiculaire menée entre le plan vertical sur EA, & le plan vertical sur RS, on achevera le reste comme ci-dessus, & l'on aura le moment de l'onglet FLMNOGHI par rapport au plan vertical sur RS; & ajoûtant à ce moment celui du prisme FC, la somme sera le moment entier du solide AH.

Du centre de gravité des Onglets dont le plan incliné fait avec la base un angle plus grand ou moindre de 45 dégrés.

240. *Les Onglets de même base sont entr'eux comme leurs hauteurs moyennes, c'est-à-dire comme les perpendiculaires élevées sur le centre de gravité de leurs bases & comprises entre les bases & les plans*

inclinés. J'ai déja démontré ceci en parlant des onglets, & d'ailleurs la chose évidente, car les onglets étant les produits des bases par les hauteurs moyennes, il est clair que si les bases sont égales, les produits doivent être comme les hauteurs.

241. *Les momens des onglets de même base, & dont les plans inclinés passent par la même pointe, sont entr'eux comme les hauteurs moyennes des onglets.* Soient deux onglets AF, *af* (*Fig.* 169.) ayant les bases égales, & les pointes sur une même ligne AD, *ad*, concevons ces onglets coupés par des plans perpendiculaires à la base, & perpendiculaires à leurs pointes, les plans de l'onglet AF seront aux plans de l'onglet *af*, comme les hauteurs aux hauteurs à cause des bases égales; or ces hauteurs sont entr'elles comme les hauteurs moyennes, ainsi que nous l'avons démontré en parlant des onglets; donc les plans de l'onglet AF sont aux plans de l'onglet *af*, comme la hauteur moyenne de l'onglet AF à la hauteur moyenne de l'onglet *af*. Mais les momens des plans de l'onglet AF sont les produits de ces plans par leurs distances à la pointe, de même que les momens des plans *af* sont les produits de ces plans par leurs distances à la pointe, & dans l'un & l'autre onglet ces distances se trouvent égales; donc les produits ou les momens des plans de l'onglet AF sont aux produits ou aux momens des plans de l'onglet *af*, encore comme la hauteur moyenne à la hauteur moyenne; & par conséquent le moment de l'onglet AF est au moment de l'onglet *af*, comme la hauteur à la hauteur.

242. *Dans les onglets de même base & de même pointe, la distance du centre de gravité au plan vertical sur la pointe est égale.* Car soit que les plans Elementaires de l'onglet paralleles à la pointe ayent plus ou moins de hauteur, leurs distances au plan vertical est toujours la même.

Delà il suit qu'ayant trouvé le centre de gravité d'un onglet dont le plan incliné fait un angle de 45 dégrés, on trouvera facilement le centre de gravité de tous les onglets de même base & de même pointe, quelqu'angle que le plan incliné fasse avec la base, ce qui n'a pas besoin d'une grande explication.

REMARQUE SINGULIERE,
Touchant les Onglets.

243. *Si sur une même base* ABCD (Fig. 170.) *on fait deux onglets dont les plans inclinent de 45 dégrés, & dont le premier* AE

ait sa pointe sur le côté AD, *&* *le second* Af *ait sa pointe sur l'autre côté* AB, *je dis que le moment du premier onglet par rapport au plan vertical élevé sur la pointe* AB *du second, est égal au moment du second par rapport au plan vertical élevé sur la pointe* AD *du premier.*

Concevons que le premier onglet AE soit coupé par une infinité de plans perpendiculaires à sa base & paralleles à sa pointe AD, & que le second Af soit coupé par des plans perpendiculaires à sa base & à sa pointe AB, les plans du premier seront des rectangles, lesquels seront égaux aux produits des Elemens de la base par leurs distances à la pointe AD; ainsi les distances des centres de gravité de ces rectangles au plan vertical sur AB, seront les moitiés des Elemens de la base; donc leurs momens par rapport à ce plan seront les produits des Elemens multipliés par leurs distances à la droite AD, & ensuite par leurs moitiés.

D'autre part, les plans du second onglet seront des triangles rectangles isosceles égaux aux produits des Elemens de la base, multipliés par les moitiés de ces mêmes Elemens, & les distances de ces triangles au plan vertical sur AD sont les mêmes que les distances des plans du premier onglet au même plan vertical; donc les momens des triangles par rapport à AD, sont encore les produits des Elemens de la base multipliés premierement par leurs moitiés, & ensuite par les distances à la droite AD; & par conséquent les momens des rectangles du premier onglet par rapport au plan vertical sur AB sont égaux aux momens des triangles du second par rapport au plan vertical sur AD. Donc, &c.

Du centre de gravité des Solides imparfaits produits par la circonvolution imparfaite d'une figure plane autour d'un axe de mouvement.

244. Si une figure plane ABCD (*Fig.* 171.) tournant autour d'un axe AD de mouvement, fait une révolution en sorte qu'elle revienne au lieu d'où elle étoit partie, le solide ABCDEF qu'elle produit s'appellera *Solide parfait*, & si elle ne fait que la moitié ou le tiers, ou le quart, ou telle autre partie qu'on voudra de la circonvolution entiere, le solide BCDEFGH qu'elle produit s'appellera *Solide imparfait*.

245. Dans tout solide parfait le centre de gravité est visiblement dans l'axe, mais pour le déterminer on concevra que ce

solide soit coupé par une infinité de plans perpendiculaires à son axe & au plan générateur; si ces plans Elementaires sont entr'eux comme les termes d'une suite connuë, on trouvera leur centre commun de gravité par la regle que nous avons donnée ci-dessus (*N.* 218.); car ces solides-ci sont du nombre de ceux dont nous avons parlé dans cet Article.

Mais si les plans Elementaires ne sont pas entr'eux comme les termes d'une suite connuë (*Fig.* 172.) alors on cherchera le centre de gravité O de l'onglet égal au solide ou égal au moment de sa base, & de ce centre abbaissant sur la base une perpendiculaire OP, on menera du point P une perpendiculaire PN sur l'axe AB de cette base, & le point M où cette perpendiculaire coupera l'axe, sera le centre de gravité du solide; car tandis que le plan générateur ABCDE décrira le solide rond, l'extremité P de la droite NP décrira une circonférence qui sera égale à la perpendiculaire élevée sur le point P de la base de l'onglet égal au solide, & comprise entre la base & le plan incliné. Or par la supposition le centre de gravité de l'onglet est sur cette ligne, & ne differe même pas du centre de cette ligne, à cause que le centre de gravité de l'onglet se trouve toujours sur le plan diviseur qui coupe toutes les perpendiculaires sur la base en deux également; donc le centre de gravité du solide rond sera aussi le même que le centre de gravité de la circonférence décrite par le point P, or le centre de cette circonférence est le point N. Donc, &c.

Pour donner un plus grand jour à ceci, concevez que l'onglet égal au solide soit coupé par une infinité de plans perpendiculaires à sa base & à l'axe AB, ces plans seront des triangles égaux chacun à chacun aux plans Elementaires du solide perpendiculaires à l'axe, lesquels plans sont des cercles. Or le centre de gravité de l'onglet sera dans le triangle perpendiculaire sur NP, & tous les autres triangles seront en équilibre autour de lui; donc le centre de gravité du solide sera dans le cercle correspondant, c'est-à-dire dans le cercle perpendiculaire sur NP, & tous les autres seront en équilibre autour de lui, mais le centre de cercle est le point N. Donc, &c.

246. *Dans tout solide imparfait, les plans Elementaires perpendiculaires à l'axe sont des demi-cercles si le plan generateur a fait la moitié de sa révolution* (Fig. 171.), *ou des secteurs de cercle si le plan generateur a fait plus ou moins de la demi-révolution* (Fig.

173.). Cela est évident & n'a pas besoin de Démonstration.

247. *Les secteurs Elementaires d'un solide imparfait sont des secteurs semblables.* Car tout solide imparfait de cette espece a toujours deux plans inclinés ADGB, CFGB, (*Fig.* 173.) dont la section commune est l'axe BG. Or les secteurs compris entre ces plans leur sont perpendiculaires, puisqu'ils sont perpendiculaires à l'axe qui est leur commune section ; donc les angles de ces secteurs sont tous la mesure de l'angle d'inclinaison des deux plans, mais les secteurs qui ont les angles égaux sont semblables. Donc, &c.

248. *Si l'on coupe l'arc* AC (Fig. 174.) *d'un secteur Elementaire* ABC *de solide imparfait en deux parties égales par un plan* BDFE *qui soit perpendiculaire au secteur, & qui passe par l'axe* BF, *tous les autres secteurs Elementaires seront coupés en deux également.* Toutes les parties des secteurs comprises entre le plan coupant BDFE & le plan AGFB seront perpendiculaires à ces deux plans, de même que le demi-secteur ADB à qui elles sont paralleles ; donc tous leurs angles étant la mesure de l'angle d'inclinaison de ces deux plans seront égaux entr'eux & à l'angle ABD, moitié de l'angle ABC ; mais les angles des secteurs entiers étoient tous égaux entr'eux & à l'angle ABC, donc leurs parties comprises entre les deux plans sont leurs moitiés, & par conséquent tous ces angles sont divisés en deux parties également, mais quand les angles des secteurs sont coupés en deux parties égales, les secteurs sont aussi coupés en deux également, donc, &c. Nous appellerons le plan BDFE qui divise tous les secteurs Elementaires en deux parties égales, *Plan diviseur du solide.*

249. *Dans tout solide imparfait, le centre de gravité est dans le plan diviseur.* Si l'on conçoit que par tous les points du rayon BD, du secteur ABC, il passe des circonférences qui ayent toutes leurs centres en B, les portions de ces circonférences comprises entre les droites AB, BC, seront les Elemens du secteur, & il est visible que ces Elemens seront coupés en deux également par le rayon DB qui fait partie du plan diviseur du solide, donc le centre de gravité de ce secteur sera sur DB ; & on prouvera de la même façon que les centres de gravité des autres secteurs sont sur une ligne qui appartient au plan diviseur, donc tous les centres des plans Elementaires du solide étant sur le plan diviseur, leur centre commun ou le centre du solide doit s'y trouver aussi.

250. Si les plans Elementaires d'un solide imparfait sont entr'eux comme les termes d'une suite connuë, le centre de gravité se trouvera selon les regles que nous avons données ci-dessus (*N.* 222.); car ces sortes de solides sont du nombre de ceux dont nous avons parlé dans cet Article.

Mais si les plans Elementaires du solide ne sont pas entr'eux comme les termes d'une suite connuë (*Fig.* 174.), on cherchera le centre de gravité O de l'onglet égal au solide, ou de l'onglet égal au moment de sa base; du point O on abbaissera la perpendiculaire OP sur la base, & du point P on menera à l'axe BF la perpendiculaire PN, après quoi coupant l'axe du solide de la même façon en N, & menant dans le plan générateur BCHF la droite NP égale à NP, & perpendiculaire à l'arc EF, le centre de gravité de l'arc décrit par le point P sera le centre de gravité du solide, c'est pourquoi suivant les regles que nous avons données en parlant des arcs, on dira : comme l'arc décrit par le point P est à sa corde, ainsi son rayon NP est à un quatriéme terme qui sera la distance du centre de gravité de l'arc au centre N. Menant donc du point N une droite dans le plan diviseur BDF égale à la distance trouvée & perpendiculaire à l'axe, l'extremité de cette droite sera le centre de gravité du solide.

La démonstration de ceci est évidente après ce qui a été dit ci-dessus, car si l'on conçoit que l'onglet égal au solide soit divisé en une infinité de plans perpendiculaires à sa base & à sa pointe, ces plans seront des triangles égaux chacun à chacun aux secteurs Elementaires du solide; ainsi puisque le centre de gravité de l'onglet est dans le triangle perpendiculaire à NP, le centre du solide sera dans le secteur perpendiculaire à NP, or le centre de l'onglet est le centre de gravité de l'Element de ce triangle perpendiculaire sur le point P de la base, & éloigné de la pointe de la distance NP; donc le centre de gravité du solide sera le centre de gravité de l'arc Elementaire du secteur correspondant, lequel arc doit être éloigné de l'axe de la même distance NP.

On voit delà que la distance du centre de gravité d'un onglet au plan vertical sur sa pointe est à la distance du centre de gravité du solide égal à l'onglet, comme l'arc décrit par un rayon égal à cette distance est à sa corde.

Du

Du centre de gravité des Surfaces des Onglets & des Surfaces des Solides ronds égaux aux Onglets.

251. Si les Surfaces des Onglets sont rectilignes, c'est-à-dire, si elles sont composées de surfaces planes, on trouvera facilement leur centres de gravité en cette sorte.

Soit l'onglet AE (*Fig.* 175.) je cherche d'abord les centres de gravité O, P, des Surfaces DCE, CBFE, & leur distances au plan vertical élevé sur la pointe DA, je joins ces deux centres par une droite OP que je coupe en deux parties réciproques aux deux Surfaces au point R, & ce point est le centre de gravité commun aux deux Surfaces, & sa distance au plan vertical sur la pointe est très-facile à trouver ayant les distances des centres O, P au même plan. Je cherche de même le centre de gravité N de la surface ABF, & sa distance au plan vertical, puis menant du point N au point R une ligne droite, je coupe RN en Q en deux parties réciproques à la somme des deux premieres surfaces & à la troisiéme ABF, & ce point Q est le centre de gravité commun aux trois surfaces. Je cherche sa distance au plan vertical, & multipliant la surface entiere par cette distance, le produit est le moment de la surface par rapport au plan vertical.

Les hauteurs des centres O, P, N sur la base étant connuës, on connoîtra sans peine la hauteur du centre commun Q, de même que sa distance à chaque surface particuliere, c'est pourquoi je ne m'y arrêterai pas.

Si la surface de l'onglet étoit composée d'un plus grand nombre de surfaces particulieres, on continueroit à chercher de la même façon le centre de gravité commun, à la somme des trois premieres & à la quatriéme, & ainsi de suite.

Le centre de gravité de la surface de l'onglet étant déterminé, on trouvera celui de la surface du solide rond parfait ou imparfait de la même maniere que nous avons trouvé ci-dessus les centres de gravité de ces solides. Venons aux Surfaces des onglets dont les bases sont des demi-cercles ou des parties de demi-cercles.

252. Nous avons dit dans le Chapitre VI. que si un demi-cercle ABC (*Fig.* 80.) tourne autour de son diametre AC, premierement la somme des circonférences décrites par tous les

points d, e, h, &c. de la circonférence de ce demi-cercle est égale à la surface du cylindre circonscrit à la sphere, c'est-à-dire à la surface que décriroit la droite HR autour de AC. 2°. Que cela étoit vrai non-seulement par rapport au demi-cercle entier, mais encore par rapport à ses parties, & qu'ainsi la somme des circonférences décrites par tous les points de l'arc AN est égale à la somme des circonférences décrites par tous les points de la droite HS, la somme des circonférences décrites par tous les points de l'arc BN est égale à la somme des circonférences décrites par les points de la droite PS, & ainsi des autres. 3°. Que les circonférences étant entr'elles comme les rayons, il s'ensuivoit que la somme des circonférences décrites d'une part étant égales à la somme des circonférences décrites de l'autre, la somme des rayons devoit être aussi égale de part & d'autre; & que par conséquent la somme des sinus des arcs arithmétiquement proportionnels Ad, Ae, Ah, &c. étoit égale à la somme des Elemens du rectangle ACRH ou au double du quarré de rayon, en observant cependant de donner aux sinus la même épaisseur qu'aux Elemens du rectangle. 4°. Que ce que nous venons de dire est vrai pour les parties du demi-cercle, & qu'ainsi la somme des sinus des arcs arithmétiquement proportionnels de la partie ANX étoit égale à la somme des Elemens du rectangle correspondant AXSH, & de même des autres. 5°. Que la somme des quarrés des sinus des arcs arithmétiquement proportionnels du demi-cercle est égale à ce demi-cercle multiplié par le rayon, & que la somme des quarrés des sinus des arcs arithmétiquement proportionnels d'une partie quelconque ANX du demi-cercle est égale à cette partie multipliée par le rayon. 6°. Enfin que la somme des cubes des sinus arithmétiquement proportionnels du demi-cercle ou de quelqu'une de ses parties, est égale à la somme des quarrés du demi-cercle ou de la partie correspondante, multipliée par le rayon, ce qu'on pourroit continuer de la même façon en observant toujours de donner aux sinus une épaisseur égale à celle des Elemens du cercle. Cela posé.

253. *Si l'on conçoit que sur tous les points de la circonférence* ABC *du demi-cercle* ABC (Fig. 176.) *soient élevées des perpendiculaires égales aux circonférences que décriroient ces points en tournant autour du diamètre* AC, *& que sur tous les points de la droite* HR *soient élevées des perpendiculaires égales aux circonférences que ces points*

décriroient autour de AC, *je dis que si on éleve un plan vertical sur le diametre* BP *qui divise la droite* HR *en deux parties égales, le centre de gravité des perpendiculaires élevées sur la demi-circonférence* ABC *sera sur ce plan.*

Concevez que le diametre AC soit divisé en une infinité de parties égales A*a*, *ab*, *bc*, &c. & que des points de division soient menées des ordonnées prolongées jusqu'à la droite HR, la somme des perpendiculaires sur l'arc A*h* sera égale à la somme des perpendiculaires élevées sur la partie HM de la droite HR, car les perpendiculaires sur A*h* étant égales aux circonférences que décriroient les points de cet arc en tournant autour de AC, de même que les perpendiculaires sur HM sont égales aux circonférences que décriroient les points de HM autour de AC, la somme des perpendiculaires d'une part est par conséquent égale à la somme des perpendiculaires de l'autre. On prouvera de même que les perpendiculaires élevées sur les arcs *hi*, *i*B, &c. sont égales aux perpendiculaires élevées sur les parties MQ, QP, &c. de la droite HR; mais les parties HM, MQ, QP, &c. de la droite HR étant égales entr'elles, la somme des perpendiculaires élevées sur HM est égale à la somme des perpendiculaires élevées sur MP ou sur QP, &c. donc les sommes des perpendiculaires élevées sur les arcs A*h*, *hi*, *i*B, &c. sont égales entr'elles; donc le centre de gravité commun à toutes ses sommes doit être dans le plan qui les partage en deux également, de sorte que les distances des sommes qui sont d'un côté de ce plan soient égales chacune à chacune aux distances des sommes qui sont de l'autre, mais ce plan est le plan vertical sur BP. Donc, &c.

Et ceci est encore vrai par rapport aux perpendiculaires élevées sur un arc quelconque B*h*, je veux dire que si on divise la partie correspondante MP de la droite HR, ou la partie correspondante *ca* du diametre en deux parties égales, & qu'ayant mené l'ordonnée *i*Q, on éleve sur cettte ordonnée un plan vertical, le centre de gravité commun des perpendiculaires élevées sur l'arc B*h* sera sur ce plan. Car si l'on conçoit l'arc B*h* divisé en petites parties égales, & que par les points de division on mene des ordonnées, on prouvera de la même façon que les sommes des perpendiculaires élevées sur les arcs correspondans à ces petites divisions seront égales aux sommes des perpendiculaires élevées sur MP, & par conséquent leur centre de gravité doit être dans le plan vertical *i*Q qui les divise en deux parties égales.

Il eſt viſible que ſi au lieu des perpendiculaires élevées ſur tous les points de la demi-circonférence ABC & de la droite HR, ou d'une partie de circonférence B*h* & de la droite correſpondante MP, on met les circonférences décrites par ces points autour de AC, le centre ſera toujours dans le plan perpendiculaire qui diviſe le diametre ou la partie correſpondante en deux également.

Et ſi au lieu d'élever ſur les points de la demi-circonférence ABC & de la droite HR des lignes égales aux circonférences que ces points décriroient autour de AC, on met les rayons de ces circonférences qui ſont entr'eux en même raiſon, il eſt évident que le centre de gravité commun de tous les rayons élevés ſur ABC ſera dans le plan vertical ſur BP, que le centre des rayons élevés ſur B*h* ſera dans le plan vertical ſur *i*Q, & ainſi des autres.

Il eſt clair que quand les droites élevées ſur tous les points de la demi-circonférence ABC ou d'un arc quelconque B*h*, ſont égales aux circonférences que décriroient la demi-circonférence ou l'arc B*h*, la ſomme de ces droites eſt la ſurface d'un onglet égal au ſolide rond que décriroit le demi-cercle ABC ou ſa portion *ahBc*, & que quand ces droites ſont égales aux rayons des circonférences, leur ſomme eſt la ſurface de l'onglet qui eſt le moment du demi-cercle ou de ſa portion. Donc le centre de gravité de la ſurface d'un onglet dont la baſe eſt un demi-cercle ou une portion de demi-cercle, & dont la pointe eſt ſur le diametre AC, ce centre dis-je eſt toujours dans le plan perpendiculaire ſur la baſe & qui coupe perpendiculairement, & en deux parties égales le diametre AC, ou la partie correſpondante *ca*.

254. *Dans tout onglet* ABCD (Fig. 177.) *dont la baſe eſt un demi-cercle ou une portion de demi-cercle coupée par des perpendiculaires au diametre & dont la pointe eſt ſur le diametre; le centre de gravité de la ſurface eſt dans le plan diviſeur* APQB.

Le plan diviſeur d'un onglet diviſe toutes ſes hauteurs en deux parties égales, comme il a été dit plus haut; donc ce plan diviſe toutes les perpendiculaires élevées ſur les points de la demi-circonférence ACB en deux également, mais ces perpendiculaires ſont les Elemens de la ſurface de l'onglet, donc les centres de gravité de ces Elemens ſont tous dans le plan diviſeur; car ſi l'on joint deux de ces centres P, Q, par une ligne droite, il eſt viſible que cette ligne ſera encore dans le plan diviſeur, & que

par conséquent le centre de gravité commun aux deux Elemens dont P & Q sont les centres est dans ce plan, que si de ce centre commun à ces deux-ci on tire une droite au centre de gravité d'un autre Element, cette droite sera encore dans ce plan, & le centre de gravité commun aux trois Elemens y sera aussi, & comme on trouvera toujours la même chose en continuant à chercher le centre de gravité commun aux trois premiers Elemens & à un quatriéme, &c. il s'ensuit que le centre commun à tous, ou le centre de la surface sera dans ce plan.

Donc le centre de gravité de la surface sera dans la section commune du plan diviseur & du plan perpendiculaire à la base, & qui coupe la pointe en deux parties égales, c'est-à-dire dans la figure 177. le centre de gravité de la surface sera sur la droite OQ.

Maintenant pour déterminer ce centre, supposons que l'onglet soit le moment du demi-cercle, les perpendiculaires qui composent la surface étant égales à leurs distances au diametre, seront la somme des sinus des arcs arihtmetiquement proportionnels; appellant donc s les sinus, R le rayon AO & $\frac{1}{2}P$ la demi-circonference ACB, la somme de tous les s sera $2R^2$ (*N.* 251.); car les perpendiculaires ou les sinus qui composent la surface ont toutes une épaisseur égale; & multipliant ces perpendiculaires par leurs distances, leurs momens par rapport à AB seront la somme de tous les s^2, mais tous les s^2 sont égaux au demi-cercle multiplié par le rayon (*N.* 251.), c'est-à-dire à $\frac{1}{4} PR \times R$ ou $\frac{1}{4} PR^2$, divisant donc ce moment par la grandeur $2R^2$ le quotient $\frac{1}{8}P$ sera la distance du centre de gravité de la surface de l'onglet au plan vertical sur la pointe AB.

Ainsi prenant sur la base OC du plan perpendiculaire OCD la partie OX égale à $\frac{1}{8}P$, & élevant sur X une perpendiculaire, le point où elle coupera la droite OQ sera le centre de gravité cherché.

Si l'onglet étoit plus grand ou moindre que le moment de sa base, la distance du centre de gravité de la surface au plan vertical sur AB seroit cependant toujours la même; car supposons, par exemple, que les perpendiculaires qui composent la surface fussent aux sinus comme 4 à 3, faisant $4 = r$ & $3 = s$, il est visible que comme s est à r, ainsi la somme des sinus seroit à la somme des perpendiculaires: Faisant donc $s, r :: 2R^2 \frac{2R^2 r}{s}$ nous au-

rions $\frac{2R^2r}{s}$ pour la grandeur de la surface ; ensuite pour avoir les momens des perpendiculaires, il faut faire attention que les distances étant égales de part & d'autre ces momens seroient comme sR est à rR, faisant donc sR, rR : : $\frac{1}{4}PR^2$, $\frac{PR^2 \times rR}{4sR}$, la somme des momens seroit $\frac{PR^2 \times rR}{4sR} = \frac{PR^2r}{4s}$ & divisant ce moment par la grandeur $\frac{2R^2r}{s}$ le quotient $\frac{sPR^2r}{8R^2rs} = \frac{P}{8}$ seroit la distance du centre de gravité de la surface au plan vertical sur AB. Or cette distance est la même que nous avons trouvée ci-dessus. Donc &c.

Si l'onglet étoit fait sur une portion B*hac* du demi-cercle (*Fig.* 176.) & qu'il en fût le moment, les perpendiculaires élevées sur l'arc B*h*, c'est-à-dire la surface seroit égale au rectangle *ca*MP, ainsi appellant x la partie *ca* du diametre & la droite *c*P, $=$ R la surface seroit xR. Or les momens des perpendiculaires qui composent la surface étant égaux aux quarrés des sinus élevés sur l'arc B*h*, leur somme seroit égale à la portion B*hac* du demi-cercle multipliée par le rayon (*N.* 251.), & comme cette portion peut se connoître aisément supposons-là égale à yz, donc la somme des momens seroit yzR, & divisant cette somme par la grandeur xR, le quotient $\frac{yz}{x}$ seroit la distance du centre de gravité de la surface au plan vertical sur la pointe *ac*, & ainsi des autres.

255. Soit l'onglet ABCDH (*Fig.* 178.) qui est le moment du cercle ABCD par rapport à la tangente RS parallele au diametre AC. Nous sçavons que cet onglet est la moitié d'un cylindre de même base & de même hauteur DH, & comme la surface d'un tel cylindre est égale à la circonference ABCD $=$ P multipliée par la hauteur DH $=$ 2R, la surface de l'onglet qui en est la moitié sera donc RP. Mais supposant que nous ne sachions pas ceci, voyons si notre Methode nous fera trouver la même chose. Il est évident que les perpendiculaires qui forment la surface élevée sur la demi-circonference ADC sont la somme des sinus du demi-cercle augmentés chacun de la grandeur du rayon, car ces perpendiculaires sont égales à leurs distances à la droite RS, donc ces perpendiculaires sont égales à tous les $s+$R. Il est encore visible que les perpendiculaires qui forment la surface élevée sur la demi-circonference ABC, sont la somme des rayons diminuée

de la somme des sinus ; ainsi ces perpendiculaires sont égales à tous les R — s. Ajoûtant donc cette somme à la précedente, la somme totale des perpendiculaires ou la surface entiere de l'onglet sera égale à tous les s + R + R — s, ou à tous les R + R ; mais la somme de tous les R à l'égard de la demi-circonference ADC est $\frac{1}{2}$PR, c'est-à-dire le rayon multiplié par le nombre des termes qui est la demi-circonference $\frac{1}{2}$P, & la somme de tous les R par rapport à la demi-circonference ABC est encore $\frac{1}{2}$PR, donc la somme de tous les R + R ou la surface entiere de l'onglet est $\frac{1}{2}PR + \frac{1}{2}PR = PR$, ainsi que nous l'avons trouvée cy-dessus.

Si nous multiplions toutes les perpendiculaires élevées sur la demi-circonference ADC par leurs distances à la droite RS, c'est-à-dire tous les R + s par les R + s les produits ou tous les $R^2 + 2sR + s^2$, seront les momens de ces perpendiculaires ; & multipliant de même toutes les perpendiculaires élevées sur la demi-circonference ABC par leurs distances, les produits ou tous les $R^2 - 2sR + s^2$ seront les momens de ces perpendiculaires, mais tous les R^2 sont égaux à $\frac{1}{2}PR^2$, tous les $2sR$ sont égaux au rectangle ARSC $= 2R^2$ multiplié par 2R, & par conséquent ils sont $4R^3$, & enfin tous les s^2 sont égaux au demi-cercle ADC $= \frac{1}{4}PR$ multiplié par le rayon ou à $\frac{1}{4}PR^2$; donc tous les $R^2 + 2sR + s^2$ valent $\frac{1}{2}PR^2 + 4R^3 + \frac{1}{4}PR^2 = \frac{3}{4}PR^2 + 4R^3$, & tous les $R^2 - 2sR + s^2$ valent $\frac{3}{4}PR^2 - 4R^3$; ajoûtant donc ensemble ces deux valeurs, la somme ou le moment de la surface de l'onglet sera $\frac{6}{4}PR^2 = \frac{3}{2}PR^2$, & divisant ce moment par la grandeur PR le quotient $\frac{3}{2}$R sera la distance du centre de gravité de la surface à la droite RS.

Du centre des gravités des Onglets faits sur les différentes parties d'un cercle.

256. Si le secteur ABO du cercle ABCP tourne autour du diametre BP, il décrira un secteur spherique ABO, dont le centre de gravité se trouvera en cette sorte. Fig. 179

Concevons que le secteur spherique soit coupé en une infinité de petites pyramides égales, qui ayent toutes leurs sommets au centre O, & leurs bases sur la surface décrite par l'arc AB, les centres des gravités de ces pyramides seront éloignés du centre O des trois quarts de leurs axes, comme il a été dit

ci-dessus; or les axes de ces pyramides sont égaux chacun au rayon, donc leurs centres de gravité sont tous éloignés du centre O des trois quarts du rayon; ainsi décrivant un cercle DEFP, dont le rayon DO soit égal aux trois quarts du rayon OA, la surface décrite par l'arc DE autour du diametre BP passera par tous les centres de gravité des pyramides, & regardant cette surface comme chargée de poids égaux dans toutes ses parties son centre de gravité sera le centre de gravité commun à tous ces poids. Or le centre de gravité de cette surface est 1°. Sur l'axe PB, 2°. Sur le plan qui est perpendiculaire au plan générateur DEG, & qui coupe la partie correspondante EG du diametre en deux également (*N.* 252.); divisant donc EG en deux parties égales en R, le point R sera le centre de gravité du secteur ABCO.

Les secteurs circulaires ABO, DEO étant semblables le rayon DO est au rayon AO, comme la fleche EG est à la fleche BS, ainsi EG est les trois quarts de BS, & ER moitié de EG, est les trois huitiémes de BS, or la distance du centre de gravité au centre O est égale à OE — ER, & OE $= \frac{3}{4}$ BO, de même que ER $= \frac{3}{8}$ BS, donc cette distance est $\frac{3}{4}$ BO — $\frac{3}{8}$ BS, c'est-à-dire le centre de gravité d'un secteur spherique est éloigné du centre de la sphere des trois quarts de son rayon moins les $\frac{3}{8}$ de sa fleche.

Maintenant pour trouver le centre de gravité de l'onglet égal au secteur spherique ou celui de l'onglet égal au moment de sa base, reprenons les cercles des figures 88, 89, & comme nous avons les onglets ou les momens de toutes leurs parties par rapport aux droites *ta*, TA, A*a* dans la Proposition XLI. cherchons de même les momens de ces onglets par rapport aux mêmes droites, en appellant les mêmes grandeurs des mêmes lettres dont nous nous sommes servis dans le courant de cette Proposition. Mais comme ces onglets peuvent avoir leurs pointes ou sur *ta* ou sur TA, ou sur A*a*, & qu'il seroit embarrassant dans le discours d'être obligé de dire toujours où est cette pointe, nous les distinguerons par articles en traitant 1°. Des momens des onglets qui ont leur pointe en A*a* par rapport à *ta*, & à TA, 2°. Des momens de ceux qui ont leurs pointes en *ta* & en TA par rapport à A*a*. 3°. Des momens de ceux qui ont leurs pointes en A*a* par rapport à A*a*, & enfin des momens de ceux qui ont leurs pointes en *ta* ou en TA par rapport à *ta* ou à TA.

Des

Des momens par rapport à ta ou à TA *des Onglets qui ont leur pointe en* A*a*.

257. L'onglet du secteur circulaire BAC (*Fig.* 88.) est $\frac{1}{3}uR^2$; or si l'on suppose cet onglet égal au secteur spherique produit par la circonvolution de la base autour du diametre, & qu'on coupe l'onglet & le secteur par une infinité de plans perpendiculaires aux diametres & à la base, les plans élementaires de l'onglet seront égaux chacun à chacun aux plans élementaires du solide, & leurs distances du plan vertical sur DC seront les mêmes, donc le moment de l'onglet & celui du secteur spherique seront égaux. Or nous avons trouvé que la distance du centre de gravité du secteur au centre de la sphere est $\frac{3}{4}AC - \frac{3}{8}AV$, $= \frac{3}{4}R - \frac{3}{8}u$, donc la distance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical sur DC est aussi $\frac{3}{4}R - \frac{3}{8}u$, & il faut prendre garde que cette distance est toujours la même, soit que l'onglet soit égal au secteur, ou qu'il soit simplement égal au moment de la base, à cause que les plans élementaires de l'un ou de l'autre onglet sont toujours dans la même distance au plan vertical sur DC. Multipliant donc l'onglet $\frac{1}{3}uR^2$ par cette distance le produit $\frac{1}{4}uR^3 - \frac{1}{8}u^2R^2$ sera le moment de l'onglet par rapport au plan vertical sur DC, & mettant au lieu de u^2 sa valeur $2uR - s^2$ ce moment sera $\frac{1}{8}s^2R^2$.

Or la distance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical sur DC étant $\frac{3}{4}R - \frac{3}{8}u$, sa distance au plan vertical sur TA sera $R - \frac{3}{4}R + \frac{3}{8}u$ ou $\frac{1}{4}R + \frac{3}{8}u$, & la distance au plan vertical sur *ta* sera $R + \frac{3}{4}R - \frac{3}{8}u = \frac{7}{4}R - \frac{3}{8}u$; donc son moment par rapport à TA sera $\frac{1}{12}uR^3 + \frac{1}{8}u^2R^2 = \frac{1}{3}uR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$, & par rapport à *ta* il sera $\frac{7}{12}uR^3 - \frac{1}{8}u^2R^2 = \frac{1}{3}uR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$.

L'onglet fait sur le demi-cercle AD*a* est $\frac{2}{3}R^3$, & comme son centre de gravité est dans le plan vertical sur DC à cause que ce plan le divise en deux parties égales, il s'ensuit que la distance de ce centre au plan vertical sur *ta* ou sur TA est R, ainsi le moment de l'onglet par rapport à l'un ou l'autre plan est $\frac{2}{3}R^4$.

L'onglet fait sur le quart de cercle ADC est $\frac{1}{3}R^3$ puisqu'il est la moitié de l'onglet précédent; or si au lieu de cet onglet on met le solide rond fait par la circonvolution de sa base, le centre de gravité de ce solide sera le même que celui de la surface spherique dont le rayon seroit $\frac{3}{4}$ CD (*N.* 256.), c'est-à-dire de la

surface spherique décrite par le quart de cercle xz & comme le centre de cette surface est le point r qui coupe son rayon zC en deux également, il s'ensuit que la distance de ce centre au centre C de la sphere est $\frac{3}{4}AC - \frac{1}{2}zC = \frac{3}{4}R - \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}R = \frac{3}{4}R - \frac{3}{8}R = \frac{3}{8}R$, donc la distance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical sur DC est aussi $\frac{3}{8}R$, & par conséquent sa distance au plan vertical sur TA est $R - \frac{3}{8}R = \frac{5}{8}R$, & sa distance au plan vertical sur ta, $R + \frac{3}{8}R = \frac{11}{8}R$. Multipliant donc la grandeur $\frac{1}{3}R^3$ par ces distances, le moment par rapport à DC est $\frac{1}{8}R^4$, par rapport à TA $\frac{5}{24}R^4$ & par rapport à ta, $\frac{11}{24}R^4$.

L'onglet du triangle BCV est $\frac{1}{6}s^2R - \frac{1}{6}s^2u$ si le triangle est du côté de A (*Fig.* 88.), & $\frac{1}{6}s^2u - \frac{1}{6}s^2R$ s'il est du côté de a. Or prenant au lieu de cet onglet le solide rond décrit par le triangle autour du diametre, ce solide sera un cone dont la distance du centre de gravité au centre de la sphere sera les trois quarts de l'axe CV. Ainsi quand le triangle est du côté de A cette distance est $\frac{3}{4}R - \frac{3}{4}u$, & quand il est du côté de a elle est $\frac{3}{4}u - \frac{3}{4}R$; donc la distance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical sur DC, est aussi $\frac{3}{4}R - \frac{3}{4}u$ ou $\frac{3}{4}u - \frac{3}{4}R$. Multipliant donc la grandeur $\frac{1}{6}s^2R - \frac{1}{6}s^2u$ par $\frac{3}{4}R - \frac{3}{4}u$ & $\frac{1}{6}s^2u - \frac{1}{6}s^2R$ par $\frac{3}{4}u - \frac{3}{4}R$, le produit sera pour l'un & l'autre cas $\frac{1}{8}s^2R^2 - \frac{1}{4}s^2uR + \frac{1}{8}s^2u^2$ & ce produit sera le moment de l'onglet par rapport au plan vertical sur DC.

Donc la distance du centre de gravité de cet onglet au plan vertical sur TA, sera dans le premier cas $R - \frac{3}{4}R + \frac{3}{4}u = \frac{1}{4}R + \frac{3}{4}u$, & dans le second $R + \frac{3}{4}u - \frac{3}{4}R = \frac{1}{4}R + \frac{3}{4}u$; ainsi dans le premier cas le produit de la grandeur par la distance ou le moment de l'onglet par rapport au plan vertical sur TA sera $\frac{1}{24}s^2R^2 + \frac{1}{12}s^2uR - \frac{1}{8}s^2u^2 = \frac{1}{24}s^2R^2 - \frac{1}{6}s^2uR + \frac{1}{8}s^4$, en mettant au lieu de u^2 sa valeur $2uR - s^2$; & dans le second cas ce moment sera $-\frac{1}{24}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2uR + \frac{1}{8}s^2u^2 = -\frac{1}{24}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2uR - \frac{1}{8}s^4$.

De même la distance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical sur ta sera dans le premier cas $R + \frac{3}{4}R - \frac{3}{4}u$, & dans le second $R - \frac{3}{4}u + \frac{3}{4}R$, c'est-à-dire qu'elle sera pour l'un & l'autre cas $\frac{7}{4}R - \frac{3}{4}u$. Ainsi dans le premier cas le produit de la grandeur par la distance ou le moment de l'onglet par rapport à ta sera $\frac{7}{24}s^2R^2 - \frac{10}{24}s^2uR + \frac{1}{8}s^2u^2 = \frac{7}{24}s^2R^2 - \frac{1}{6}s^2uR - \frac{1}{8}s^4$, & dans le second il sera $-\frac{7}{24}s^2R^2 + \frac{10}{24}s^2uR - \frac{1}{8}s^2u^2 = -\frac{7}{24}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2uR + \frac{1}{8}s^4$.

Le moment de l'onglet du triangle BCV étant retranché du

moment de l'onglet du ſecteur BCA lorſque le triangle eſt du côté de A, & ce moment étant ajoûté au moment de l'onglet du même ſecteur lorſque le triangle eſt du côté de a, le reſte ou la ſomme ſera le moment de l'onglet du demi-ſegment BAV. Ainſi ce moment par rapport à TA ſera $\frac{1}{3}uR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2uR - \frac{1}{8}s^4$, ou bien mettant u^2 dans les deux premiers termes au lieu de ſa valeur $2uR - s^2$ nous aurons $\frac{1}{6}u^2R^2 + \frac{1}{6}s^2uR - \frac{1}{8}s^4$; & par rapport à ta ce moment ſera $\frac{1}{3}uR^2 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2uR + \frac{5}{8}s^4 = \frac{1}{6}u^2R^2 + \frac{1}{6}s^2uR + \frac{1}{8}s^4$.

Mais la grandeur de l'onglet du demi-ſegment BAV dans le premier cas eſt égale à l'onglet du ſecteur BCA moins l'onglet du triangle BCV, & dans le ſecond elle eſt égale à la ſomme des onglets du ſecteur & du triangle. Faiſant donc la ſouſtraction, ou l'addition, nous aurons dans l'un & dans l'autre cas $\frac{1}{3}uR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2u$, ou $\frac{1}{6}u^2R + \frac{1}{6}s^2u$ pour la grandeur de l'onglet du demi-ſegment BAV; & diviſant les momens par rapport à TA, ta, par cette grandeur, le quotient $\frac{\frac{1}{6}u^2R^2 + \frac{1}{6}s^2uR - \frac{1}{8}s^4}{\frac{1}{6}u^2R + \frac{1}{6}s^2u} = R \frac{-3s^4}{4u^2R + 4s^2u}$ ſera la diſtance du centre de gravité de l'onglet par rappport à TA & le quotient $\frac{\frac{1}{6}u^2R^2 + \frac{1}{6}s^2uR + \frac{1}{8}s^4}{\frac{1}{6}u^2R + \frac{1}{6}s^2u} = R + \frac{3s^4}{4u^2R + 4s^2u}$ ſera la diſtance de ce centre à la droite ta.

Donc cette diſtance à la droite DC ſera $R + \frac{3s^2}{4u^2R + 4s^2u} - R = \frac{3s^2}{4u^2R + 4s^2u}$ & le moment de l'onglet par rapport à DC ſera $\frac{\frac{1}{6}u^2s^2R + \frac{1}{6}s^4u}{4u^2R + 4s^2u} = \frac{us^2R + s^4}{8uR + 8s^2}$, & la diſtance à la droite BV eſt $\frac{3s^2}{4u^2R + 4su} - R + u$ pour l'un & pour l'autre cas, car lorſque le triangle BCV eſt du côté de A, il faut pour avoir la diſtance du centre de gravité de l'onglet fait ſur le demi-ſegment BAV, au plan vertical ſur BV retrancher de la diſtance de ce centre au plan vertical ſur CD, la droite CV qui eſt alors $x = CA - AV = R - u$, & quand le triangle eſt du côté de a, la droite CV qu'il faut ajoûter eſt $x = VA - AC = u - R$, & par conſéquent la diſtance à la droite BV eſt toujours $\frac{3s^2}{4u^2R + 4s^2u} - R + u$, d'où l'on tirera aiſément le moment de l'onglet par rapport à BV.

Le moment du triangle BaV eſt $\frac{1}{6}s^2h$ ou $\frac{1}{3}s^2R - \frac{1}{6}u$ en mettant au lieu de h ſa valeur $2R - u$, & mettant le ſolide rond décrit par ce triangle autour du diametre Aa, ce ſolide ſera un

cone dont le centre de gravité est éloigné du sommet *a* de trois quarts de $aV = h$, c'est-à-dire d'un $\frac{3}{4}h = \frac{3}{2}R - \frac{3}{4}u$, donc la distance de ce centre au plan vertical sur TA est $2R - \frac{3}{2}R + \frac{3}{4}u = \frac{1}{2}R + \frac{3}{4}u$, donc aussi la distance du centre de gravité de l'onglet fait sur le triangle BAV à la droite *ta* est $\frac{3}{2}R - \frac{3}{4}u$, & à la droite TA, $\frac{1}{2}R + \frac{3}{4}u$. Ainsi multipliant la grandeur par la premiere distance, le produit $\frac{1}{2}s^2R^2 - \frac{1}{2}s^2uR + \frac{1}{8}s^2u^2$ sera le moment de l'onglet par rapport à *ta*; & multipliant par la seconde, le produit $\frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2uR - \frac{1}{8}s^2u^2$ sera le moment de l'onglet par rapport à TA; ou bien mettant au lieu de u^2 sa valeur $2uR - s^2$, le moment par rapport à *ta* sera $\frac{1}{2}s^2R^2 - \frac{1}{4}s^2uR - \frac{1}{8}s^4$, & par rapport à la droite TA, $\frac{1}{6}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2uR + \frac{1}{8}s^4$.

Si au moment de l'onglet fait sur le triangle B*a*V on ajoûte le moment de l'onglet fait sur le demi-segment BAV, la somme sera le moment de l'onglet fait sur le secteur BA*a* qui a son angle à la circonference, donc ce moment par rapport à *ta* sera $\frac{1}{6}u^2R^2 - \frac{1}{12}s^2uR + \frac{1}{2}s^2R^2$, ou mettant au lieu de u^2 sa valeur $2uR - s^2$, on aura $\frac{1}{3}uR^3 + \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2uR$, & par rapport à TA $\frac{1}{6}u^2R^2 + \frac{1}{12}s^2uR + \frac{1}{6}s^2R^2 = \frac{1}{3}uR^3 + \frac{1}{12}s^2uR$.

Divisant donc ces momens par la grandeur de l'onglet fait sur le secteur B*a*A qui est $\frac{1}{3}uR^2 + \frac{1}{6}s^2R$, le quotient $\frac{\frac{1}{3}uR^3 + \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2uR}{\frac{1}{3}uR^2 + \frac{1}{6}s^2R}$ $= R + \frac{\frac{1}{6}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2uR}{\frac{1}{3}uR^2 + \frac{1}{6}s^2R} = R + \frac{2s^2R - s^2u}{4uR + 2s^2}$ sera la distance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical sur *ta*; & le quotient $\frac{\frac{1}{3}uR^3 + \frac{1}{12}s^2uR}{\frac{1}{3}uR^2 + \frac{1}{6}s^2R} = \frac{\frac{1}{3}uR^3 + \frac{1}{6}s^2 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{12}s^2uR}{\frac{1}{3}uR^2 + \frac{1}{6}s^2R} = R - \frac{2s^2R + s^2u}{4uR + 2s^2}$ sera la distance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical sur TA.

L'onglet fait sur le triangle BAV est $\frac{1}{6}s^2u$, & comme le solide que sa base décriroit autour du diametre A*a* est un cone dont le centre de gravité est éloigné du sommet A des trois quarts de AV, le centre de gravité de l'onglet est aussi éloigné du plan vertical sur TA de $\frac{3}{4}u$, & par conséquent du plan vertical sur *ta* de $2R - \frac{3}{4}u$, & du plan vertical sur DC de $R - \frac{3}{4}u$. Multipliant donc la grandeur par la premiere distance $\frac{3}{4}u$, le produit $\frac{1}{8}s^2u^2 = \frac{1}{4}s^2uR - \frac{1}{8}s^4$ sera le moment de l'onglet par rapport au plan vertical sur TA, & multipliant la même grandeur par la distance $2R - \frac{3}{4}u$, le produit $\frac{1}{3}s^2uR - \frac{1}{8}s^2u^2 = \frac{1}{12}s^2uR + \frac{1}{8}s^4$ sera le mo-

ment par rapport à *ta*, enfin multipliant la même grandeur par la distance $R - \frac{3}{4}u$, le produit $\frac{1}{6}s^2uR - \frac{1}{8}s^2u^2 = -\frac{1}{12}s^2uR + \frac{1}{8}s^4$ sera le moment par rapport au plan vertical sur DC.

Si du moment de l'onglet fait sur le demi-segment BAV on ôte le moment de l'onglet fait sur le triangle BAV, le reste sera le moment de l'onglet fait sur le segment BA, ainsi le moment par rapport à TA sera $\frac{1}{6}u^2R^2 - \frac{1}{12}s^2uR = \frac{1}{3}uR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2uR$, & par rapport à *ta*, $\frac{1}{6}u^2R^2 + \frac{1}{12}s^2uR = \frac{1}{3}uR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{12}s^2uR$, & divisant ces momens par la grandeur $\frac{1}{6}u^2R = \frac{1}{3}uR^2 - \frac{1}{6}s^2R$, le quotient $\frac{\frac{1}{3}uR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2uR}{\frac{1}{3}uR^2 - \frac{1}{6}s^2R} = R - \frac{s^2u}{4uR - 2s^2}$, sera la distance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical sur TA; & le quotient $\frac{\frac{1}{3}uR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{12}s^2uR}{\frac{1}{3}uR^2 - \frac{1}{6}s^2R^2} = R + \frac{s^2u}{4uR - 2s^2}$ sera la distance au plan vertical sur *ta*, & on trouvera de la même façon les momens des autres onglets par rapport à *ta* ou TA.

Des momens par rapport à A*a* *des onglets qui ont leur pointe en* TA *ou en* *ta*.

258. Les momens de ces onglets seront faciles à trouver si l'on se rappelle ce que nous avons dit plus haut (*N.* 243.), à savoir que si deux onglets de même hauteur sont faits sur une même base, mais que leurs pointes soient sur différentes lignes qui fassent entr'elles un angle droit, le moment du premier par rapport au plan vertical sur la pointe du second est égal au moment du second par rapport au plan vertical sur la pointe du premier; cela posé.

L'onglet fait sur le demi-secteur BCA ayant sa pointe en *ta* est $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{3}sR^2$, & son moment par rapport à A*a* étant le même que celui de l'onglet fait sur le même demi-secteur ayant sa pointe en A*a* par rapport à *ta*, ce moment est par conséquent $\frac{1}{3}uR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$, & divisant ce moment par la grandeur le quotient $\frac{8uR^3 + 3s^2R^2}{12aR^2 + 8sR^2} = \frac{8uR + 3s^2}{12a + 8s}$ sera la distance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical sur A*a*.

De même l'onglet fait sur le même demi-secteur ACB ayant sa pointe en TA est $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{3}sR^2$; or son moment par rapport à A*a* étant le même que celui de l'onglet qui a sa pointe en A*a* par rapport à TA, est $\frac{1}{3}uR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$; divisant donc ce moment

par la grandeur le quotient $\frac{8uR^3 - 3s^2R^2}{12aR^2 - 8sR^2} = \frac{8uR - 3s^2}{12a - 8s}$ ſera la diſtance du centre de gravité de l'onglet à la droite A*a*.

L'onglet fait ſur le demi-cercle AD*a* ayant ſa pointe en *ta* eſt $\frac{1}{4}R^2P$, & ſon moment par rapport à A*a* étant le même que le moment par rapport à *ta* de l'onglet qui a ſa pointe en A*a*, eſt par conſéquent $\frac{2}{3}R^4$. Diviſant donc ce moment par la grandeur $\frac{1}{4}R^2P$, le quotient $\frac{8R^2}{3P}$ ſera la diſtance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical ſur A*a*, & il eſt aiſé de voir que ſi l'onglet a ſa pointe en TA la diſtance de ſon centre de gravité au plan vertical ſur A*a* ſera auſſi $\frac{8R^2}{3P}$.

Pour trouver l'onglet fait ſur le quart de cercle ADC ayant ſa pointe en *ta*, il faut prendre l'onglet fait ſur le demi-ſecteur BCA ayant auſſi la pointe en *ta*, c'eſt-à-dire $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{3}sR^2$, & ſuppoſant que ce demi-ſecteur ſoit égal au quart de cercle, il eſt évident qu'on aura $a = \frac{1}{4}P$ & $s = R$; ſubſtituant donc ces valeurs on aura pour l'onglet du quart de cercle $\frac{1}{8}PR^2 + \frac{1}{3}R^3$, & ſon moment par rapport à A*a* étant le même que le moment par rapport à *ta* de l'onglet qui a ſa pointe en A*a*, eſt par conſéquent $\frac{11}{24}R^4$. Diviſant donc ce moment par la grandeur le quotient $\frac{11R^2}{3P + 8R}$ ſera la diſtance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical ſur A*a*.

De même pour trouver l'onglet du même quart de cercle ayant ſa pointe en TA, on prendra l'onglet du demi-ſecteur BCA ayant auſſi ſa pointe en TA, & ſuppoſant le demi-ſecteur égal au quart de cercle, on aura $a = \frac{1}{4}P$ & $s = R$, ainſi l'onglet $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{3}sR^2$ ſera $\frac{1}{8}PR^2 - \frac{1}{3}R^3$, & comme le moment de cet onglet par rapport à A*a* eſt égal au moment par rapport à TA de l'onglet qui a ſa pointe en A*a*, ce moment ſera donc $\frac{5}{24}R^4$. Ainſi diviſant ce moment par la grandeur le quotient $\frac{5R^2}{3P - 8R}$ ſera la diſtance du centre de gravité au plan vertical ſur A*a*.

L'onglet fait ſur le demi-ſegment BAV ayant ſa pointe en *ta* eſt $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}suR + \frac{1}{3}s^2$, ou $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}suR + \frac{1}{3}s^3$, à cauſe de $e = a - s$; & ſon moment par rapport à A*a* étant égal au moment par rapport à *ta* de l'onglet qui a ſa pointe en A*a*, eſt par conſéquent $\frac{1}{3}uR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2uR + \frac{1}{8}s^4$; diviſant donc ce moment par la grandeur, le quotient $\frac{8uR^3 - 4s^2R^2 + 4s^2uR + 3s^4}{12aR^2 - 12sR^2 + 12suR + 8s^3}$

ſera la diſtance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical ſur Aa.

De même l'onglet fait ſur le demi-ſegment BAV ayant ſa pointe en TA eſt $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}suR - \frac{1}{3}s^3$ & ſon moment par rappor à Aa étant le même que le moment par rapport à TA de l'onglet qui a ſa pointe en Aa, eſt $\frac{1}{3}uR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2uR - \frac{1}{8}s^4$. Diviſant donc ce moment par la grandeur, le quotient $\frac{8uR^3 - 4s^2R^2 + 4s^2uR - 3s^4}{12aR^2 - 12sR^2 + 12suR + 8s^2}$ ſera la diſtance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical ſur Aa.

L'onglet fait ſur le demi-ſecteur BaA ayant ſa pointe en ta eſt $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{5}{6}sR^2 - \frac{1}{6}suR$, & le moment par rapport à ta de l'onglet qui a ſa pointe en Aa eſt $\frac{1}{3}uR^3 + \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2uR$; diviſant donc ce moment par la grandeur, le quotient $\frac{4uR^3 + 4s^2R^2 - s^2uR}{6aR^2 + 10sR^2 - 2suR}$ ſera la diſtance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical ſur Aa.

De même l'onglet fait ſur le demi-ſecteur BaA ayant ſa pointe en TA eſt $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{6}sR^2 + \frac{1}{6}suR$, & ſon moment par rapport à Aa étant le même que le moment par rapport à TA de l'onglet qui a ſa pointe en Aa eſt $\frac{1}{3}uR^3 + \frac{1}{12}s^2uR$; diviſant donc ce moment par la grandeur, le quotient $\frac{4uR^2 + s^2u}{6aR + 2sR + 2su}$ ſera la diſtance centre de gravité de l'onglet au plan vertical ſur Aa.

L'onglet fait ſur le triangle BAV ayant ſa pointe en ta eſt $\frac{2}{3}suR + \frac{1}{3}s^3$, & ſon moment par rapport à Aa étant le même que le moment par rapport à ta de l'onglet qui a ſa pointe en Aa, eſt $\frac{1}{12}s^2uR + \frac{1}{8}s^4$; diviſant donc le moment par la grandeur, le quotient $\frac{2s^2uR + 3s^4}{8suR + 8s^3}$ ſera la diſtance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical ſur Aa.

De même l'onglet fait ſur le triangle BAV ayant ſa pointe en TA eſt $\frac{2}{3}suR - \frac{1}{3}s^3$ & ſon moment par rapport à Aa étant le même que le moment par rapport à TA de l'onglet qui a ſa pointe en Aa, eſt $\frac{1}{4}s^2uR - \frac{1}{8}s^4$; diviſant donc ce moment par la grandeur, le quotient $\frac{6s^2uR - 3s^4}{16uR - 8s^3}$ ſera la diſtance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical ſur Aa.

L'onglet fait ſur le ſegment BA ayant ſa pointe en ta eſt $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{6}suR$, & le moment par rapport à Aa étant le même que le moment par rapport à ta de l'onglet qui a ſa pointe en Aa, eſt $\frac{1}{3}uR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{12}s^2uR$; diviſant donc ce moment par la

grandeur, le quotient $\frac{4uR^2 - 2s^2R + s^2u}{6aR - 6sR + 2su}$ ſera la diſtance du centre de gravité au plan vertical ſur A*a*.

De même l'onglet fait ſur le ſegment BA ayant ſa pointe en TA eſt $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}suR$, & ſon moment par rapport à A*a* étant le même que le moment par rapport à TA de l'onglet qui a ſa pointe en A*a* eſt $\frac{1}{3}uR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2uR$. Diviſant donc ce moment par la grandeur, le quotient $\frac{4uR^2 - 2s^2R - s^2u}{6aR - 6sR - 2su}$ ſera la diſtance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical ſur A*a*, & ainſi des autres.

*Des momens par rapport à A*a*, des Onglets qui ont leur pointe en A*a*.*

259. Si l'on conçoit que l'onglet fait ſur le demi-cercle AD*a* ayant ſa pointe en A*a* ſoit coupé par une infinité de plans perpendiculaires à ſa baſe, & qui paſſent tous par le centre C, cet onglet ſera coupé en une infinité de petites pyramides qui auront toutes leurs ſommets au même point C, & dont les baſes ſeront ſur la ſurface curviligne de l'onglet. Suppoſons donc que la pyramide DMSTC (*Fig.* 180.) repreſente l'une des pyramides qui compoſent l'onglet, le centre de gravité de cette pyramide ſera le point Q qui coupe ſon axe OC, en ſorte que CQ en eſt les $\frac{3}{4}$. Du point Q j'abbaiſſe une perpendiculaire QP ſur la baſe de l'onglet, & menant du point C par le point P le rayon CX, les triangles ſemblables CXO, CPQ, donnent CQ, CO :: CP, CX; or CQ eſt les $\frac{3}{4}$ de CO, donc CP eſt auſſi les trois quarts de CX, & la même choſe arrivera à l'égard de toutes les pyramides qui compoſent l'onglet; donc ſi de tous leurs centres on abbaiſſe des perpendiculaires ſur la baſe, les points où ces perpendiculaires couperont la baſe ſeront tous éloignés du centre C des $\frac{3}{4}$ du rayon, & par conſéquent ces points compoſeront une circonférence HRI dont le rayon CR ſera les $\frac{3}{4}$ du rayon CD, & les perpendiculaires élevées ſur ces points & compriſes entre la baſe de l'onglet & ſon plan incliné, compoſeront une ſurface courbe ſur laquelle ſeront tous les centres de gravité des pyramides, donc leur centre de gravité commun ſera le même que le centre de gravité de cette ſurface; car ces centres étant tous ſur le plan diviſeur qui coupe les Elemens de la ſurface

face chacun en deux également, sont par conséquent les mêmes que les centres de gravité de ces Elemens.

Or les Elemens de la surface élevée sur le demi-cercle HRI étant égaux à la somme des sinus des arcs arithmétiquement proportionnels de la demi-circonférence HRI, valent deux fois le quarré du rayon CR, & comme ce rayon est les $\frac{3}{4}$ du rayon CD, il s'ensuit que $CR=\frac{3}{4}R$, & $2CR^2=2\times\frac{9}{16}R^2=\frac{18}{16}R^2=\frac{9}{8}R^2$. Or les momens de ces Elemens étant égaux aux quarrés des sinus, valent le demi-cercle HRI multiplié par le rayon CR, & comme la demi-circonférence HRI de ce demi-cercle est les $\frac{3}{4}$ de la demi-circonférence ADa qui est $\frac{1}{2}P$, HRI sera donc $\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}P=\frac{3}{8}P$, & $\frac{1}{2}HRI=\frac{3}{16}P$. Multipliant donc $\frac{3}{16}P$ par le rayon $CR=\frac{3}{4}R$, le produit $\frac{9}{64}PR$ sera la valeur du demi-cercle HRI, laquelle étant multipliée par le rayon $CR=\frac{3}{4}R$, le produit $\frac{27}{256}PR^2$ sera le moment de la surface élevée sur HRI par rapport à HI. Divisant donc ce moment par la grandeur $\frac{9}{8}R^2$, le quotient $\frac{3}{32}P$ sera la distance du centre de gravité de la surface élevée sur HRI au diametre HI, & par conséquent il sera aussi la distance du centre de gravité de l'onglet au diametre Aa; & si l'on vouloit avoir le moment de cet onglet, on multiplieroit sa grandeur $\frac{2}{3}R^3$ par la distance $\frac{3}{32}P$, & le produit $\frac{6}{96}=PR^3=\frac{1}{16}PR^3$ seroit le moment par rapport à l'axe Aa ou au plan vertical élevé sur cet axe.

On peut trouver ceci d'une maniere beaucoup plus courte & moins embarrassante en cette sorte : je prens la grandeur $2R^2$ de la surface de l'onglet, & son moment $\frac{1}{4}PR^2$, je divise le moment par la grandeur, & le quotient $\frac{1}{8}P$ est la distance du centre de gravité de la surface au plan vertical sur Aa. Maintenant pour trouver la distance du centre de gravité de la surface élevée sur la demi-circonférence HRI, j'observe que cette surface & celle de l'onglet étant semblables entr'elles, de même que les onglets à qui elles appartiennent, leurs centres de gravité seront semblablement posés, & par conséquent les distances de ces centres au plan vertical sur Aa seront entr'elles comme d'autres lignes semblablement posées, ou comme les rayons CD, CH; or ces rayons sont entr'eux comme 4 à 3; faisant donc cette analogie $4.\ 3::\frac{1}{8}P,\ \frac{3}{4\times 8}P$, le quatriéme terme $\frac{3}{4\times 8}P=\frac{3}{32}P$ sera la distance du centre de gravité cherchée, & par conséquent celle du centre de gravité de l'onglet sera aussi $\frac{3}{32}P$.

Les onglets faits sur les quarts de cercles ADC, aDC étant

semblables & égaux, leurs centres de gravité sont également éloignés du plan vertical sur Aa. Donc si on les joint par une ligne droite, cette ligne sera parallele au plan vertical sur Aa, & le centre de gravité commun aux deux onglets sera sur cette ligne; or les deux onglets pris ensemble sont égaux à l'onglet fait sur le demi-cercle ADa, donc le centre de gravité de ce dernier onglet sera le même que le centre commun des deux premiers, & par conséquent il sera sur la parallele, & sa distance au plan vertical sur Aa sera la même que celle du centre particulier de chaque onglet. Ainsi l'onglet ADC étant $\frac{1}{3}R^3$, si l'on multiplie cette grandeur par la distance $\frac{3}{32}P$, le produit $\frac{3}{96}PR^3 = \frac{1}{32}PR^3$ sera le moment de l'onglet fait sur ADC par rapport à Aa, & ce moment sera aussi celui de l'onglet fait sur aDC.

L'onglet fait sur le secteur BCA (*Fig.* 88. 89.) est $\frac{1}{3}uR^2$, sa surface curviligne étant égale à la somme des sinus des arcs arithmétiquement proportionnels compris dans l'arc BA, vaut par conséquent uR, c'est-à-dire le rectangle de la partie AV du diametre multipliée par le rayon, & le moment de cette surface étant la somme des quarrés de ces sinus est égale à la portion BVA multipliée par le rayon; or la portion BVA est $\frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR + \frac{1}{2}su$, donc le moment de la surface par rapport à Aa est $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}suR$. Divisant donc ce moment par la grandeur uR, le quotient $\frac{a-s}{2u}R + \frac{1}{2}s$ sera la distance du centre de gravité de la surface curviligne de l'onglet au plan vertical sur Aa. Maintenant pour trouver le centre de gravité de la surface sur laquelle se trouvent les centres de toutes les pyramides qui composent l'onglet, & qui ont leurs sommets en C, je sçai que le rayon de l'arc sur laquelle cette surface est élevée est $\frac{3}{4}R$; ainsi le rayon de l'arc sur lequel est élevée la surface de l'onglet, est au rayon de l'arc sur lequel est élevée cette autre surface comme 4 à 3, donc les distances des centres de gravité de ces surfaces sont aussi comme 4 à 3. Je fais donc 4. 3 :: $\frac{a-s}{2u}R + \frac{1}{2}s$, $\frac{3a-3s}{8u}R + \frac{3}{8}s$, & le quatriéme terme $\frac{3a-3s}{8u}R + \frac{3}{8}s$ est la distance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical sur Aa. Et multipliant la grandeur $\frac{1}{3}uR^2$ par cette distance, le produit $\frac{1}{8}aR^3 - \frac{1}{8}sR^3 + \frac{1}{8}suR^2$ sera le moment de l'onglet par rapport à Aa, & on trouvera de la même façon les momens des onglets dont les bases sont des secteurs.

Il n'eſt pas néceſſaire de répeter ici que la diſtance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical ſur *ta* & TA (*Fig.* 88. 89.) ayant été trouvée ci-deſſus, & ſa diſtance au plan vertical ſur A*a* venant d'être trouvée, ce centre ſe trouve déterminé, puiſqu'on ſçait outre cela qu'il ſe trouve ſur le plan diviſeur de l'onglet, ainſi on le déterminera comme il a été enſeigné plus haut en plus d'un endroit.

L'onglet fait ſur le triangle BVC (*Fig.* 88. 89.) eſt une pyramide dont le ſommet eſt en C, ainſi ſuppoſant qu'elle ſoit égale à la pyramide VBCD (*Fig.* 181.) le plan DBV ſera ſa baſe, & l'axe de la pyramide paſſera par le centre de gravité de cette baſe. Diviſant donc le côté BD en deux également en N, & tirant de l'angle oppoſé V la droite VN dont nous prendrons les deux tiers de V en O, le point O ſera le centre de gravité du plan BDV, & l'axe de la pyramide paſſera par ce point en prenant le point C pour le ſommet de la pyramide, & le plan BDV pour ſa baſe. Or du point O abbaiſſant une perpendiculaire OR ſur la baſe de l'onglet, les triangles ſemblables VBN, VRO, donnent VO, VN :: VR, VB, mais VO eſt les deux tiers de VN, donc VR eſt auſſi les deux tiers de VB; & comme O eſt autant éloigné du plan vertical ſur A*a* que le point R, il s'enſuit que le centre de gravité O du plan BDV eſt éloigné du plan vertical ſur A*a* des deux tiers de BV.

Or le centre de gravité de la pyramide eſt au point Q qui coupe les trois quarts de l'axe AC; abbaiſſant donc une perpendiculaire QX ſur la baſe de l'onglet, & tirant du ſommet C par le point X la droite CXR, cette droite rencontrera la perpendiculaire OR, car les deux lignes QX, OR, étant perpendiculaires ſur la baſe ſont paralleles entr'elles; & par conſéquent ſi l'on fait gliſſer QX le long de QO toujours parallelement à elle-même, elle tombera enfin ſur RO, & il eſt viſible que pendant ſon mouvement elle décrira un plan qui ſera la continuation du triangle CRO; or les triangles ſemblables COR, CQX, donnent CQ, CO :: CX, CR; mais CQ eſt les trois quarts de CO, donc CX eſt les trois quarts de CR. Enfin du point X menant une droite XT parallelle à BV, les triangles ſemblables CRV, CXT donnent CX, CR :: XT, RV, mais CX eſt les trois quarts de CR, donc XT eſt les trois quarts de RV, & comme $RV = \frac{2}{3}BV$, $XT = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} BV = \frac{6}{12} BV = \frac{1}{2} BV$. Or le centre de gravité Q de la pyramide eſt autant éloigné du

plan vertical ſur Aa que le point X, à cauſe que XT eſt perpendiculaire ſur le diametre Aa; donc la diſtance du centre de gravité de la pyramide au plan vertical ſur Aa eſt $\frac{1}{2}$BV.

Revenant donc aux figures 88. 89. l'onglet fait ſur le triangle BVC eſt $\frac{1}{6}s^2R - \frac{1}{6}s^2u$ ſi le triangle eſt du côté de A, & $\frac{1}{6}s^2u - \frac{1}{6}s^2R$ ſi ce triangle eſt du côté de a. Multipliant donc ce moment par la diſtance $\frac{1}{2}BV = \frac{1}{2}s$, le produit $\frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{12}s^3u$ ſera le moment de l'onglet par rapport à Aa dans le premier cas, & le produit $\frac{1}{12}s^3u - \frac{1}{12}s^3R$ ſera le moment dans le ſecond.

Et dans le premier cas retranchant le moment de cet onglet, du moment de l'onglet fait ſur le ſecteur BCA, ou ajoutant les deux momens dans le ſecond cas, le reſte ou le produit $\frac{1}{8}aR^3 - \frac{1}{8}sR^3 + \frac{1}{8}suR^2 - \frac{1}{12}s^3R + \frac{1}{12}s^3u$ ſera pour l'un & l'autre cas le moment de l'onglet fait ſur le demi-ſegment BVA par rapport à Aa. Or la grandeur du demi-ſegment BVA eſt $\frac{1}{2}uR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2u$; diviſant donc le moment par la grandeur, le quotient $\frac{3aR^3 - 3sR^3 + 3suR^2 - 2s^3R + 2s^3u}{8uR^2 - 4s^2R + 4s^2u}$ ſera la diſtance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical ſur Aa.

L'onglet fait ſur le triangle BVa eſt une pyramide dont le ſommet eſt en a, & dont la baſe eſt le plan élevé perpendiculairement ſur BV, ainſi la diſtance de ſon centre de gravité au plan vertical ſur Aa eſt $\frac{1}{2}BV = \frac{1}{2}s$, ce qu'on prouvera comme ci-deſſus. Or la grandeur de cet onglet eſt $\frac{1}{6}s^2h$, ou bien $\frac{1}{3}s^2R$, $- \frac{1}{6}s^2u$ en mettant au lieu de h ſa valeur $2R - u$; multipliant donc la grandeur par la diſtance $\frac{1}{2}s$, le produit $\frac{1}{6}s^3R - \frac{1}{12}s^3u$ ſera le moment de l'onglet par rapport à Aa.

Et ajoûtant ce moment à celui de l'onglet fait ſur le ſegment BVA par rapport à Aa, la ſomme $\frac{1}{8}aR^3 - \frac{1}{8}sR^3 + \frac{1}{8}suR^2 + \frac{1}{12}s^3R$ ſera le moment de l'onglet fait ſur le ſecteur BaA par rapport à Aa.

L'onglet fait ſur le triangle BAV eſt $\frac{1}{6}s^2u$, & comme cet onglet eſt une pyramide qui a ſon ſommet en A, & dont la baſe eſt le plan élevé perpendiculairement ſur BV, la diſtance de ſon centre de gravité au plan vertical ſur Aa eſt $\frac{1}{2}s$. Multipliant donc la grandeur par la diſtance, le produit $\frac{1}{12}s^3u$ ſera le moment de l'onglet par rapport à Aa.

Et retranchant ce moment du moment de l'onglet fait ſur le demi-ſegment BVA, le reſte $\frac{1}{8}aR^3 - \frac{1}{8}sR^3 + \frac{1}{8}suR^2 - \frac{1}{12}s^3R$ ſera le moment de l'onglet fait ſur le ſegment BA par rapport à Aa,

& divisant ce moment par la grandeur qui est $\frac{1}{6}u^2R$, ou $\frac{1}{3}uR^2 - \frac{1}{6}s^2R$, en mettant au lieu de u^2 sa valeur $2uR - s^2$, le quotient $\frac{3aR^2 - 3sR^2 + 3suR - 2s^3}{8uR - 4s^2}$ sera la distance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical sur Aa, & ainsi des autres.

REMARQUE.

260. Si l'onglet fait sur le demi-cercle ADa ayant sa pointe en Aa est coupé par des plans perpendiculaires à la base & à la pointe, ces plans seront autant de triangles isosceles dont les bases & les hauteurs seront égales aux ordonnées du demi-cercle ou à ses Elemens. Ainsi ces triangles seront égaux à la moitié des quarrés des Elemens ou à la somme de tous les $\frac{1}{2}o^2$, en appellant chaque ordonnée o; or ces triangles ayant leurs sommets sur la pointe Aa, leurs centres de gravité seront éloignés du plan vertical sur cette pointe des deux tiers des mêmes ordonnées; multipliant donc les triangles $\frac{1}{2}o^2$ par les distances $\frac{2}{3}o$, les momens de ces triangles ou le moment de l'onglet sera la somme de tous les $\frac{2}{3}o \times \frac{1}{2}o^2$, ou $\frac{1}{3}o^3$. Or nous avons trouvé que ce moment est $\frac{1}{16}PR^3$, donc la somme de tous les $\frac{1}{3}o^3$ est égale à $\frac{1}{16}PR^3$, & multipliant par 3, la somme de tous les o^3 est égale à $\frac{3}{16}PR^3$, c'est-à-dire la somme de tous les cubes des ordonnées vaut $\frac{3}{16}PR^3$.

De même si l'onglet fait sur le demi-segment BVA ayant sa pointe en Aa est coupé par des plans perpendiculaires à la base & à la pointe, ces plans seront des triangles isosceles rectangles qui seront égaux à la moitié des quarrés des ordonnées à ce demi-segment, & les momens de ces triangles par rapport à Aa seront égaux aux tiers des cubes des ordonnées ou à tous les $\frac{1}{3}o^3$ des ordonnées comprises dans ce segment. Or nous avons trouvé que le moment de cet onglet par rapport à Aa est $\frac{1}{8}aR^3 - \frac{1}{8}sR^3 + \frac{1}{8}suR^2 - \frac{1}{12}s^3R + \frac{1}{12}s^3u$. Multipliant donc de part & d'autre par 3, nous aurons tous les o^3 des ordonnées comprises dans le segment sont égaux à $\frac{3}{8}aR^3 - \frac{3}{8}sR^3 + \frac{3}{8}suR^2 - \frac{2}{4}s^3R + \frac{2}{4}s^3u$.

Et si l'on vouloit la somme des cubes des ordonnées à une portion de demi-cercle comprise entre deux droites perpendiculaires à Aa, comme par exemple les cubes des ordonnées à la portion BVCD, on prendroit d'abord le moment de l'onglet fait sur le quart de cercle DCA par rapport à Aa qui est $\frac{1}{32}R^3P$, & retranchant de ce moment celui de l'onglet fait sur le demi-segment BVA, le reste $\frac{1}{32}R^3P - \frac{1}{8}aR^3 + \frac{1}{8}sR^3 - \frac{1}{8}suR^2 + \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{12}s^3u$ seroit le moment de l'onglet fait sur la portion BVCD.

par rapport à Aa ; or ce moment feroit égal à tous les $\frac{1}{3}o^3$ des ordonnées comprifes dans la portion BVCD, multipliant donc par 3, nous aurions tous les o^3 de cette portion, où tous les cubes des ordonnées dans cette portion égaux à $\frac{3}{32}R^3P - \frac{3}{8}aR^3 + \frac{3}{8}sR^3 - \frac{3}{8}suR^2 + \frac{1}{4}s^3R - \frac{1}{4}s^3u$, & ainfi des autres.

Des momens par rapport à ta ou TA, *des Onglets qui ont leurs pointes en ta ou* TA.

261. Si l'Onglet fait fur le demi-cercle ADa (*Fig.* 88. 89.) ayant fa pointe en ta, eft coupé par une infinité de plans perpendiculaires à fa bafe & paralleles à fa pointe, ces plans feront des rectangles dont les bafes feront les ordonnées au demi-cercle, ou fes Elemens perpendiculaires à Aa, & les hauteurs feront les Va correfpondans. Ainfi ces rectangles feront les produits des BV en Va, ou tous les BV × Va ; mais les diftances de ces rectangles à la droite TA feront tous les VA correfpondans, donc les momens de ces rectangles par rapport à TA feront tous les BV × Va × VA ; mais par la proprieté du cercle chaque Va × VA eft égal à fon $\overline{BV}^2$ correfpondant, donc tous les BV × Va × VA font égaux à tous les BV × BV^2, ou à tous les BV^3, c'eft-à-dire à la fomme des cubes des ordonnées. Donc le moment de l'onglet par rapport à TA eft égal à la fomme de tous les o^3, ou à $\frac{3}{16}PR^3$ (*N.* 260.)

Et il eft vifible que fi l'on prend l'onglet fait fur le demi-cercle ADa ayant fa pointe en TA, le moment de cet onglet par rapport à ta fera auffi $\frac{3}{16}PR$; car coupant cet onglet par des plans perpendiculaires à la bafe & paralleles à fa pointe, ces plans feront de même des rectangles dont les bafes feront les BV, les hauteurs les VA, & les diftances les Va. Et par conféquent les momens de ces rectangles par rapport à ta feront encore la fomme des BV × VA × Va, ou des o^3.

Divifant donc ce moment par la grandeur $\frac{1}{4}R^2P$, le quotient $\frac{3}{4}R$ marquera la diftance du centre de gravité de l'onglet ayant fa pointe en ta à la droite TA, & celle du centre de gravité de l'onglet ayant fa pointe en TA à la droite ta.

Si l'onglet fait fur le quart de cercle ADC ayant fa pointe en ta eft coupé par des plans perpendiculaires à fa bafe & paralleles à fa pointe, on prouvera de la même façon que fon moment par

rapport à TA eſt la ſomme de tous les o^3 des ordonnées de ce quart de cercle, ou le triple du moment par rapport à A*a* de l'onglet qui auroit ſa pointe en A*a*; or ce moment eſt $\frac{1}{32}PR^3$, donc tous les o^3 ſont $\frac{3}{32}PR^3$.

Or pour trouver la grandeur de cet onglet, il faut prendre celle de l'onglet fait ſur le ſecteur BCA ayant ſa pointe en *ta*, laquelle eſt $\frac{3a+2s}{6}R^2$, & ſuppoſant que cet onglet ſoit égal à l'onglet du quart de cercle, alors on aura $a = \frac{1}{4}P$, & $s = R$; mettant donc ces valeurs, on aura $\frac{\frac{3}{4}PR^2 + 2R^3}{6}$, ou $\frac{1}{8}PR^2 + \frac{1}{3}R^3$ pour la grandeur de l'onglet du quart de cercle. Diviſant donc le moment par la grandeur le quotient $\frac{9PR}{12P + 32R}$ ſera la diſtance du centre de gravité de l'onglet à la droite TA.

Le moment par rapport à *ta* de l'onglet fait ſur le quart de cercle ADC ayant ſa pointe en TA eſt auſſi $\frac{3}{32}PR^3$; & pour trouver ſa grandeur prenons l'onglet fait ſur le ſecteur BCA ayant ſa pointe en *ta*, lequel eſt $\frac{3a-2s}{6}R^2$, & ſuppoſant cet onglet égal à celui du quart de cercle, nous aurons $a = \frac{1}{4}P$, & $s = R$, donc l'onglet du quart de cercle ſera $\frac{\frac{3}{4}PR^2 - 2R^3}{6} = \frac{1}{8}PR^2 - \frac{1}{3}R^3$. Diviſant donc le moment par la grandeur le quotient $\frac{9PR}{12P - 32R}$ ſera la diſtance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical ſur *ta*.

Le moment par rapport à TA de l'onglet fait ſur l'autre quart de cercle DC*a* ayant ſa pointe en *ta* eſt encore $\frac{3}{32}PR^3$; or ſa grandeur eſt égale à celle de l'onglet fait ſur le demi-cercle moins celle de l'onglet fait ſur l'autre quart de cercle, & par conſéquent elle eſt $\frac{1}{4}R^2P - \frac{1}{8}R^2P - \frac{1}{3}R^3 = \frac{1}{8}R^2P - \frac{1}{3}R^3$. Diviſant donc le moment par la grandeur, le quotient $\frac{9PR}{12P - 32R}$ ſera la diſtance de cet onglet à la droite TA, & il eſt viſible que l'onglet de ce quart de cercle ayant ſa pointe en TA, a le même moment par rapport à *ta*, que l'onglet de l'autre quart de cercle ayant ſa pointe en *ta* par rapport à TA.

Et il eſt facile de trouver les momens de ces onglets par rapport au plan vertical ſur leur pointe; car par exemple, ſçachant que dans l'onglet fait ſur le demi-cercle AD*a* ayant ſa pointe en *ta*, la diſtance du centre de gravité au plan vertical ſur TA eſt $\frac{1}{4}R$, nous ſçaurons auſſi que la diſtance au plan vertical ſur

ta eſt $\frac{5}{4}$R ; & par conſéquent multipliant la grandeur $\frac{1}{4}R^2P$ par cette diſtance, le produit $\frac{5}{16}R^3P$ ſera le moment de l'onglet par rapport au plan vertical ſur ſa pointe.

Dans l'onglet fait ſur le ſegment BAV ayant ſa pointe en *ta*, le moment par rapport à TA eſt la ſomme des cubes des ordonnées à l'axe qui rempliſſent ce ſegment, & par conſéquent il eſt $\frac{3}{8}aR^3 - \frac{3}{8}sR^3 + \frac{3}{8}suR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{4}s^3u$. Diviſant donc ce moment par la grandeur $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}suR + \frac{1}{3}s^3$, le quotient $\frac{9aR^3 - 9sR^3 + 9suR^2 - 6s^3R + 6s^3u}{12aR^2 - 12sR^2 + 12suR + 8s^3}$ ſera la diſtance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical ſur TA ; donc ſa diſtance au plan vertical ſur *ta* eſt $2R - \frac{9aR^3 + 9sR^3 - 9suR^2 + 6s^3R - 6s^3u}{12aR^2 - 12sR^2 + 12suR + 8s^3}$.

Et ſi nous prenons l'onglet fait ſur le ſegment BAV ayant ſa pointe en TA, ſon moment par rapport au plan vertical ſur *ta* ſera encore $\frac{3}{8}aR^3 - \frac{3}{8}sR^3 + \frac{3}{8}suR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{4}s^3u$; & diviſant ce moment par la grandeur $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}suR - \frac{1}{3}s^3$, le quotient $\frac{9aR^3 - 9sR^3 + 9suR^2 + 6s^3R - 6s^3u}{12aR^2 - 12sR^2 + 12suR - 8s^3}$ ſera la diſtance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical ſur *ta* ; donc ſa diſtance au plan vertical ſur TA ſera $2R - \frac{9aR^3 + 9sR^3 - 9suR^2 + 6s^3R - 6^3u}{12aR^2 - 12sR^2 + 12suR - 8s^3}$.

L'onglet fait ſur le triangle BVC ayant ſa pointe en DC, eſt une pyramide dont le ſommet eſt en C, & dont la baſe eſt le produit de BV $= s$ par CV $= R - u$ ſi le triangle eſt du côté de A, ou $u - R$ s'il eſt du côté de *a* ; ainſi dans le premier cas la baſe de la pyramide eſt $sR - su$, & dans le ſecond $su - sR$. Or la hauteur de cette pyramide eſt auſſi la droite CV ; multipliant donc ſa baſe par le tiers de ſa hauteur, nous aurons dans l'un & l'autre cas $\frac{1}{3}sR^2 - \frac{2}{3}sRu + \frac{1}{3}su^2$ pour la grandeur de la pyramide. Or la diſtance de ſon centre de gravité au plan vertical ſur DC eſt $\frac{3}{4}$CV ou $\frac{3}{4}R - \frac{3}{4}u$ dans le premiet cas, & $\frac{3}{4}u - \frac{3}{4}R$ dans le ſecond ; nous aurons donc pour le moment de l'onglet par rapport à DC dans le premier cas $\frac{1}{4}sR^3 - \frac{3}{4}sR^2u + \frac{3}{4}sRu^2 - \frac{1}{4}su^3$, & dans le ſecond cas $-\frac{1}{4}sR^3 + \frac{3}{4}sR^2u - \frac{3}{4}sRu^2 + \frac{1}{4}su^3$.

Maintenant ſi nous prenons l'onglet fait ſur le ttiangle BVC ayant ſa pointe en *ta*, en ſuppoſant que le triangle ſoit du côté de A, la figure CBVMNH (*Fig.* 182.) repreſentera cet onglet ; or il eſt viſible que ſi on coupe cette figure par un plan HIL parallele à la baſe & qui paſſe par le ſommet de la moindre hauteur

teur CH, la partie CBVLIH sera un Prisme de même base que l'onglet, & dont la hauteur HC $=$ Ca sera le rayon, & la partie HILMN sera un onglet qui est le même que celui qui est le moment du triangle BCV par rapport à DC, & par conséquent le moment de cette partie par rapport à DC est $\frac{1}{4}sR^3 - \frac{3}{4}suR^2 + \frac{3}{4}sRu^2 - \frac{1}{4}su^3$; or la base du prisme étant égale au triangle CBV, sa base est $\frac{1}{2}sR - \frac{1}{2}su$, laquelle étant multipliée par la hauteur CH $=$ R donne pour la valeur du prisme $\frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{2}suR$, & comme la distance du centre de gravité de ce prisme au plan vertical sur DC est la même que celle du centre de gravité de la base à la droite DC, c'est-à-dire $\frac{2}{3}R - \frac{2}{3}u = \frac{2}{3}CV$, si l'on multiplie le prisme par cette distance, le produit $\frac{1}{3}sR^3 - \frac{2}{3}suR^2 + \frac{1}{3}su^2R$ sera le moment du prisme par rapport à DC, & ajoûtant à ce moment celui de l'onglet restant HLINM, la somme $\frac{7}{12}sR^3 - \frac{17}{12}suR^2 + \frac{13}{12}su^2R - \frac{1}{4}su^3$ sera le moment de l'onglet entier CN par rapport au plan vertical sur DC.

Or la grandeur de l'onglet CN étant égale à celle du prisme $\frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{2}suR$, plus celle de l'onglet HLINM $= \frac{1}{3}sR^2 - \frac{2}{3}sRu + \frac{1}{3}su^2$ est par conséquent $\frac{5}{6}sR^2 - \frac{7}{6}suR + \frac{1}{3}su^2$. Divisant donc le moment par la grandeur, le quotient $\frac{7sR^3 - 17suR^2 + 13su^2R - 3su^3}{10sR^2 - 14suR + 4su^2}$ sera la distance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical sur DC; donc sa distance au plan vertical sur ta sera R $+ \frac{7sR^3 - 17suR^2 + 13su^2R - 3su^3}{10sR^2 - 14suR + 4su^2}$, & sa distance au plan vertical sur TA sera R $- \frac{7sR^3 + 17suR^2 + 13su^2R - 3su^3}{10sR^2 - 14suR + 4su^2}$.

Pour abréger le calcul, mettons x au lieu de R $- u$, & alors nous aurons pour la base du prisme $\frac{1}{2}sx$, pour la grandeur $\frac{1}{2}sxR$, & pour son moment par rapport à DC $\frac{1}{3}sx^2R$. De même le triangle CBV sera $\frac{1}{2}sx$, & son moment par rapport à DC, c'est-à-dire l'onglet HLINM sera $\frac{1}{3}sx^2$, donc le moment de cet onglet sera $\frac{3}{4}x \times \frac{1}{3}sx^2 = \frac{1}{4}sx^2$, & la grandeur de l'onglet entier CN sera $\frac{1}{2}sxR + \frac{1}{3}sx$; enfin le moment de cet onglet par rapport au plan vertical sur DC sera $\frac{1}{3}sx^2R + \frac{1}{4}sx^3$. Divisant donc le moment par la grandeur, le quotient $\frac{4xR + 3x^2}{6R + 4x}$ sera la distance du centre de gravité de l'onglet CN au plan vertical sur DC, donc sa distance au plan vertical sur ta est R $+ \frac{4xR + 3x^2}{6R + 4x}$, & sa distance au plan vertical sur TA est R $- \frac{4xR + 3x^2}{6R + 4x}$.

Multipliant donc la grandeur par la distance au plan vertical sur *ta*, le moment par rapport à ce plan sera $\frac{1}{2}sxR^2 + \frac{1}{3}sx^2R + \frac{24sx^2R^2 + 34sx^3R + 12sx^4}{72R + 48x} = \frac{1}{2}sxR^2 + \frac{1}{3}sx^2R + \frac{24sxR^2 + 16sx^3R}{72R + 48x} + \frac{18sx^3R + 12sx^4}{72R + 48x} = \frac{1}{2}sxR^2 + \frac{1}{3}x^2Rs + \frac{1}{3}x^2Rs + \frac{1}{4}sx^3 = \frac{1}{2}sxR^2 + \frac{2}{3}sx^2R + \frac{1}{4}sx^3$.

Et multipliant la grandeur par la distance au plan vertical sur TA, le moment par rapport à ce plan sera $\frac{1}{2}sxR^2 - \frac{1}{4}sx^3$, ce qu'on trouvera en faisant la même opération que nous venons de faire.

Si nous prenons l'onglet fait sur le triangle BCV ayant sa pointe en TA, & que nous supposions que le triangle soit du côté de *a*, il est visible que son moment par rapport à TA sera encore $\frac{1}{2}sxR^2 + \frac{2}{3}sx^2R + \frac{1}{4}sx^3$, & par rapport à *ta* $\frac{1}{2}sxR^2 - \frac{1}{4}sx^3$, & par conséquent la distance au plan vertical sur TA sera $R + \frac{4xR + 3x^2}{6R + 4x}$; & la distance au plan vertical sur *ta* sera $R - \frac{4xR + 3x^2}{6R + 4x}$, ce qui n'a pas besoin de Démonstration.

Mais si en supposant que le triangle soit du côté de *a*, nous prenons l'onglet ayant sa pointe en *ta*, cet onglet sera représenté par la figure VBCNMR (*Fig.* 183.) & si nous achevons le prisme CH fait sur la hauteur & la base de cette figure, il est évident que ce prisme étant égal au prisme du cas précédent, sera encore $\frac{1}{2}sxR$ en appellant toujours x la droite CV, & comme pour rendre ce prisme égal à l'onglet VBCNMR, il faut lui retrancher la pyramide HIMNR qui se trouve encore égale au moment du triangle BVC par rapport à DC, c'est-à-dire à $\frac{1}{3}sx^2$, il s'ensuit que l'onglet VBCNMR vaut $\frac{1}{2}sxR - \frac{1}{3}sx^2$. Or le moment du prisme par rapport à DC est $\frac{2}{3}x \times \frac{1}{2}sxR = \frac{1}{3}sx^2R$, & le moment de la pyramide HIMNR par rapport au même DC est $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}sx^2 = \frac{1}{4}sx^3$; retranchant donc ce moment du precedent, le reste $\frac{1}{3}sx^2R - \frac{1}{4}sx^3$ sera le moment de l'onglet BVCNMR par rapport à DC. Divisant donc le moment par la grandeur, le quotient $\frac{4xR - 3x^2}{6R - 4x}$ sera la distance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical sur DC. Donc sa distance au plan vertical sur *ta* sera $R - \frac{4xR - 3x^2}{6R - 4x}$, & sa distance au plan vertical sur TA sera $R + \frac{4xR - 3x^2}{6R - 4x}$.

Ainsi multipliant la grandeur par la distance au plan vertical sur *ta*, le produit $\frac{1}{2}sxR^2 - \frac{1}{3}sx^2R - \frac{24sx^2R^2 - 34sx^3R + 12sx^4}{72R - 48x}$ $= \frac{1}{2}sxR^2 - \frac{2}{3}sx^2R + \frac{1}{4}sx^3$ sera le moment de l'onglet BVCNMR par rapport au plan vertical sur *ta*, & multipliant la grandeur par la distance au plan vertical sur TA, le produit $\frac{1}{2}sxR^2 - \frac{1}{4}sx^3$ sera le moment de l'onglet par rapport à TA.

Et il est visible que si nous prenons l'onglet fait sur le triangle BCV ayant sa pointe en TA, & supposant que le triangle soit du côté de A, son moment par rapport au plan vertical sur TA sera $\frac{1}{2}sxR^2 - \frac{2}{3}sx^2R + \frac{1}{4}sx^3$, & par rapport à *ta*, $\frac{1}{2}sxR^2 - \frac{1}{4}sx^3$, & la distance du centre de gravité au plan vertical sur TA sera $R - \frac{4xR - 3x^2}{6R - 4x}$, & la distance au plan vertical sur *ta* sera $R + \frac{4xR - 3x}{6R - 4x}$.

Pour renfermer donc tout en deux formules, le moment par rapport à *ta* de l'onglet ayant sa pointe en *ta* est $\frac{1}{2}sxR^2 \pm \frac{2}{3}sx^2R + \frac{1}{4}sx^3$, c'est-à-dire que le signe + est dans le second terme quand le triangle est du côté de A, & au contraire le signe — s'y trouve quand il est du côté de *a*, & par rapport à TA, ce moment est dans l'un & l'autre cas $\frac{1}{2}sxR^2 - \frac{1}{4}sx^3$.

De même le moment par rapport à TA de l'onglet ayant sa pointe en TA sera $\frac{1}{2}sxR^2 \pm \frac{2}{3}sx^2R + \frac{1}{4}sx^3$, c'est-à-dire + quand le triangle est du côté de *a*, & — quand il est du côté de A; & par rapport à *ta*, ce moment dans l'un & l'autre cas est $\frac{1}{2}sxR^2 - \frac{1}{4}sx^3$.

Nous avons trouvé ci-dessus les momens par rapport à *ta* & TA des onglets faits sur le demi-segment BVA (*Fig.* 88. 89.) ayant leurs pointes en *ta* ou en TA. Or si à ces momens nous ajoutons les momens correspondans des onglets faits sur le triangle BVC, lorsque la corde BV est du côté de A, ou que nous en retranchions les mêmes momens lorsque la corde BV est du côté de *a*, les sommes ou les restes seront les momens respectifs des onglets faits sur le secteur BCA ayant leurs pointes en *ta* ou en TA.

Ainsi l'onglet fait sur ce secteur ayant sa pointe en *ta*, son moment par rapport à TA sera $\frac{3}{8}aR^3 - \frac{3}{8}sR^3 + \frac{3}{8}suR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{4}s^3u \pm \frac{1}{2}sxR^2 \mp \frac{1}{4}sx^3$, & mettant au lieu de x sa valeur $R - u$ lorsque le triangle BVA est du côté de A, & $u - R$ lorsqu'il est du côté de *a*, & substituant ensuite dans les grandeurs qu'on

trouvera $2uR - s^2$ au lieu de u^2 ce moment sera $\frac{3}{8}aR^3 - \frac{1}{8}sR^3 + \frac{1}{8}suR^2$, & divisant ce moment par la grandeur $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{3}sR^2$ le quotient $\frac{9aR - 3sR + 3su}{12a + 8s}$ sera la distance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical sur TA. Donc sa distance au plan vertical sur *ta* sera $2R - \frac{9aR - 3sR + 3su}{12a + 8s} = \frac{15aR + 19sR - 3su}{12a + 8s}$, & multipliant la grandeur par cette distance, le produit $\frac{90a^2R^3 + 60asR^3 + 114asR^3 + 76s^2R^3 - 18asuR^2 - 12s^2uR^2}{144a + 96s} = \frac{5}{8}aR^3 + \frac{19}{24}sR^3 - \frac{1}{8}suR^2$ sera le moment de l'onglet par rapport au plan vertical sur *ta*.

De même, si au moment par rapport à TA de l'onglet fait sur le demi-segment BVA ayant sa pointe en TA, on ajoûte ou l'on retranche le moment correspondant de l'onglet fait sur le triangle BVC, la somme ou le reste sera le moment par rapport à TA de l'onglet fait sur le secteur BCA ayant sa pointe en TA ; or le moment de l'onglet fait sur le demi-segment BVA, est $\frac{5}{8}aR^3 - \frac{5}{8}sR^3 + \frac{5}{8}suR^2 - \frac{5}{12}s^3R - \frac{1}{4}s^3u$ comme on le connoîtra aisément en multipliant sa grandeur par la distance de son centre de gravité au plan vertical sur TA que nous avons trouvée ci-dessus ; ajoûtant donc ou retranchant de ce moment celui de l'onglet fait sur le triangle BCV, selon que ce triangle est du côté de A ou du côté de *a*. Le moment par rapport à TA de l'onglet fait sur le secteur BCA ayant sa pointe en TA sera $\frac{5}{8}aR^2 - \frac{5}{8}sR + \frac{5}{8}suR^2 - \frac{5}{12}s^3u - \frac{1}{4}s^3u \pm \frac{1}{2}sxR^2 \mp \frac{2}{3}sx^2R \pm \frac{1}{4}sx^3$, & mettant les valeurs de x, x^2, x^3, & ensuite la valeur $2uR - s^2$ des u^2 qu'on trouvera, ce moment sera $\frac{5}{8}aR^3 - \frac{5}{8}sR^3 + \frac{5}{8}suR^2 - \frac{5}{12}s^3R - \frac{1}{4}s^3u + \frac{1}{12}sR^3 - \frac{3}{4}suR^2 + \frac{5}{12}s^3R + \frac{1}{4}s^2u = \frac{5}{8}aR^3 - \frac{13}{24}sR^3 - \frac{1}{8}suR^2$. Et divisant ce moment par la grandeur $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{3}sR^2$, le quotient $\frac{15aR - 13sR - 3suR}{12a - 8s}$ sera la distance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical sur TA, & par conséquent sa distance au plan vertical sur *ta* sera $2R - \frac{15aR - 13aR - 3su}{12a - 8s} = \frac{9aR - 3sR + 3su}{12a - 8s}$; & multipliant la grandeur de l'onglet par cette distance le produit $\frac{3}{8}aR^3 - \frac{1}{8}sR^3 + \frac{1}{8}suR^2$ sera le moment de l'onglet par rapport à *ta*, & c'est effectivement le même que nous avons trouvé ci-dessus par rapport à TA pour l'onglet qui a sa pointe en *ta*.

L'onglet fait sur le triangle BAV (*Fig.* 88. 89.) ayant sa pointe

en TA eſt $\frac{2}{3}suR - \frac{1}{3}s^3$; & comme cet onglet eſt une pyramide dont le ſommet eſt en A, la diſtance de ſon centre de gravité au plan vertical ſur TA eſt $\frac{3}{4}u$, multipliant donc la grandeur par la diſtance, le produit $\frac{1}{2}su^2R - \frac{1}{4}s^3u$, ou $suR^2 - \frac{1}{2}s^2R - \frac{1}{4}s^3u$ ſera le moment par rapport à TA. Or la diſtance du centre de gravité au plan vertical ſur *ta* eſt $2R - \frac{3}{4}u$; donc le moment par rapport à ce plan eſt $\frac{4}{3}suR^2 - \frac{1}{2}su^2R - \frac{2}{3}s^3R + \frac{1}{4}s^3u = \frac{1}{3}suR^2 - \frac{1}{6}s^3R + \frac{1}{4}s^3u$.

Or dans l'onglet fait ſur le triangle BAV ayant ſa pointe en *ta*, le moment par rapport à TA étant le même que le moment par rapport à *ta* de l'onglet qui a ſa pointe en TA eſt par conſéquent $\frac{1}{3}suR^2 - \frac{1}{6}s^3R + \frac{1}{4}s^3u$; diviſant donc ce moment par la grandeur $\frac{1}{3}suR + \frac{1}{3}s^3$, le quotient $\frac{4suR^2 - 2s^3R + 3s^3u}{4suR + 4s^3} = \frac{4uR^2 - 2s^2R + 3s^2u}{4uR + 4s^2}$ ſera la diſtance du centre de gravité au plan vertical ſur TA ; donc la diſtance au plan vertical ſur *ta* ſera $2R - \frac{4uR^2 - 2s^2R + 3s^2u}{4uR + 4R^2}$ $= \frac{4uR^2 + 10s^2R - 3s^2u}{4uR + 4s^2}$, & multipliant la grandeur par cette diſtance le produit $\frac{1}{3}suR^2 + \frac{5}{8}s^3R - \frac{1}{4}s^3u$ ſera le moment par rapport à *ta*.

Les momens des onglets faits ſur le demi-ſegment BAV nous étant connus, ſi nous en ôtons les momens correſpondans des onglets faits ſur le triangle BAV, les reſtes ſeront les momens des onglets faits ſur le ſegment BA. Ainſi nous aurons $\frac{3}{8}aR^3 - \frac{3}{8}sR^3 + \frac{1}{24}suR^2 - \frac{1}{12}s^3R$ pour le moment par rapport à *ta* de l'onglet fait ſur le ſegment BA ayant ſa pointe en TA, & diviſant ce moment par la grandeur $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}suR$, le quotient $\frac{9aR^2 - 9sR^2 + suR - 2s^3}{12aR - 12sR - 4su}$ ſera la diſtance du centre de gravité au plan vertical ſur *ta*. Donc ſa diſtance au plan vertical ſur TA ſera $2R - \frac{9aR^2 - 9sR^2 + suR - 2s^3}{12aR - 12sR - 4su}$, ou $\frac{15aR^2 - 15sR^2 - 9suR + s^3}{12aR - 12sR - 4su}$, & multipliant la grandeur par cette diſtance, le produit $\frac{5}{8}aR^3 - \frac{5}{8}sR^3 - \frac{3}{8}suR^2 + \frac{1}{12}s^3R$ ſera le moment par rapport à TA.

Le moment par rapport à TA de l'onglet fait ſur le ſegment BA ayant ſa pointe en *ta* étant le même que le moment par rapport à *ta* de l'onglet qui a ſa pointe en TA, eſt par conſéquent encore $\frac{3}{8}aR^3 - \frac{3}{8}sR^3 + \frac{1}{24}suR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; diviſant donc par la grandeur $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{6}suR$, le quotient $\frac{9aR^2 - 9sR^2 + suR - 2s^3}{12aR - 12sR + 4su}$ ſera la diſtance du centre de gravité de l'onglet au plan ver-

tical ſur TA ; donc ſa diſtance au plan vertical ſur ta ſera $2R - \frac{9aR^2 - 9sR^2 + suR - 2s^3}{12aR - 12sR + 4su} = \frac{15aR^2 - 15sR^2 + 7uRs + 2s^3}{12aR - 12sR + 4su}$, & multipliant la grandeur par cette diſtance, le produit $\frac{5}{8}aR^3 - \frac{5}{8}sR^3 + \frac{7}{24}suR^2 + \frac{1}{12}s^3R$ ſera le moment par rapport à ta.

Pour avoir les momens des onglets faits ſur le ſegment Ba, il n'y a qu'à mettre dans ceux de BA les valeurs de a & de u, par rapport au ſegment Ba, qui ſont $a = \mathrm{a}$, & $u = h = 2R - u$; ainſi le moment par rapport à ta de l'onglet fait ſur le ſegment Ba ayant ſa pointe en ta ſera $\frac{5}{8}\mathrm{a}R^3 - \frac{5}{8}sR^3 - \frac{3}{8}shR^2 + \frac{1}{12}s^3R$, parce que cet onglet eſt poſé par rapport à ta, de même que l'onglet fait ſur BA ayant ſa pointe en TA eſt poſé par rapport à TA. Et diviſant ce moment par la grandeur $\frac{1}{2}\mathrm{a}R - \frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}suR$, la diſtance du centre de gravité au plan vertical ſur ta ſera $\frac{15\mathrm{a}R^2 - 15sR^2 - 9shR + 2s^3}{12\mathrm{a} - 12s - 4sh}$; on trouvera de même que le moment de cet onglet par rapport au plan vertical ſur TA eſt $\frac{3}{8}\mathrm{a}R^3 - \frac{3}{8}sR^3 + \frac{1}{24}shR^2 - \frac{1}{12}s^3R$, & ainſi du reſte.

L'onglet fait ſur le triangle BVa ayant ſa pointe en ta eſt $\frac{4}{3}sR^2 - \frac{2}{3}suR - \frac{1}{3}s^3$, & comme cet onglet eſt une pyramide dont le ſommet eſt en a, la diſtance de ſon centre de gravité au plan vertical ſur ta eſt $\frac{3}{4}Va = \frac{3}{4}h$, ou $\frac{3}{4} \times 2R - \frac{3}{4} \times u = \frac{3}{2}R - \frac{3}{4}u$, à cauſe de $h = 2R - u$. Multipliant donc la grandeur par la diſtance, le produit $2sR^3 - 2suR^2 - \frac{1}{2}s^3R + \frac{1}{2}su^2R + \frac{1}{4}us^3 = 2sR^3 - suR^2 - s^3R + \frac{1}{4}us^3$ ſera le moment de l'onglet par rapport à ta. Or la diſtance de ſon centre de gravité à la droite eſt TA $2R - \frac{3}{2}R + \frac{3}{4}u = \frac{1}{2}R + \frac{3}{4}u$. Multipliant donc la grandeur par la diſtance, le produit $\frac{2}{3}sR^3 + \frac{2}{3}suR^2 - \frac{1}{2}su^2R - \frac{1}{6}s^3R - \frac{1}{4}us^3 = \frac{2}{3}sR^3 - \frac{1}{3}suR^2 + s^3R - \frac{1}{4}us^3$ ſera le moment de l'onglet par rapport à TA.

L'onglet fait ſur le triangle BVa ayant ſa pointe en TA eſt $\frac{2}{3}sR^2 - \frac{1}{3}suR + \frac{1}{3}s^3$. Or le moment de cet onglet par rapport à ta, eſt le même que le moment par rapport à TA de l'onglet ayant ſa pointe en ta. Car l'un & l'autre moment ſont les produits des Elemens du triangle perpendiculaires à l'axe multipliés par leurs diſtances à ta, enſuite par leurs diſtances à TA. Donc le moment de cet onglet par rapport à ta eſt $\frac{2}{3}sR^3 - \frac{1}{3}suR^2 + \frac{2}{3}s^3R - \frac{1}{4}us^3$. Diviſant donc ce moment par la grandeur, le quotient $\frac{8R^2 - 4uR^2 + 4s^2R - \frac{3}{4}us^2}{8R^2 - 4uR + 4s^2}$ ſera la diſtance du centre de gravité de l'onglet à la droite ta, d'où on tirera tout le reſte à l'ordinaire.

Si on ajoute aux momens des onglets faits ſur le triangle BVa, les momens reſpectifs des onglets faits ſur le ſegment BVA, les ſommes ſeront les momens reſpectifs des onglets faits ſur le ſecteur BaA qui a ſon angle à la circonférence. Ainſi l'onglet fait ſur le ſecteur BaA ayant ſa pointe en ta, ſon moment par rapport à TA ſera $\frac{3}{8}aR^3 + \frac{7}{24}sR^3 + \frac{1}{24}suR^2 + \frac{1}{12}s^3R$, & diviſant ce moment par la grandeur $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{5}{6}sR^2 - \frac{1}{6}suR$, le quotient $\frac{9aR^2 + 7sR^2 + suR + 2s^3}{12aR + 20sR - 4su}$ ſera la diſtance du centre de gravité au plan vertical ſur TA. Donc ſa diſtance au plan vertical ſur ta ſera $2R - \frac{9aR^2 + 7sR^2 + suR + 2s^3}{12aR + 20sR - 4su} = \frac{15aR^2 + 33sR^2 - 9suR - 2s^3}{12aR + 20sR - 4su}$, & multipliant la grandeur par cette diſtance, le produit $\frac{5}{8}aR^3 + \frac{11}{8}sR^3 - \frac{3}{8}suR^2 - \frac{1}{12}s^3R$ ſera le moment par rapport à ta.

Or le moment par rapport à ta de l'onglet fait ſur le ſecteur BaA qui a ſa pointe en TA étant le même que le moment par rapport à TA de l'onglet qui a ſa pointe en ta, eſt par conſéquent $\frac{3}{8}aR^3 + \frac{7}{24}sR^3 + \frac{1}{24}suR^2 + \frac{1}{12}s^3R$. Diviſant donc ce moment par la grandeur $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{6}sR^2 + \frac{1}{6}suR$, le quotient $\frac{9aR^2 + 7sR^2 + suR + 2s^3}{12aR + 4sR + 4su}$ ſera la diſtance du centre de gravité de l'onglet à la droite ta. Donc la diſtance au plan vertical ſur TA ſera $2R - \frac{9aR^2 + 7sR^2 + suR + 2s^3}{12aR + 4sR + 4su} = \frac{15aR^2 + sR^2 + 7suR - 2s^3}{12aR + 4sR + 4su}$, & multipliant la grandeur par la diſtance, le produit $\frac{5}{8}aR^3 + \frac{1}{24}sR^3 + \frac{7}{24}suR^2 - \frac{1}{12}s^3R$ ſera le moment de l'onglet par rapport à TA, & ainſi des autres.

Des momens & des centres de gravité des onglets faits ſur la figure des ſinus verſes & ſur ſes parties.

262. Nous avons dit dans le Chapitre huitiéme que la baſe at (*Fig.* 100.) de la figure des ſinus verſes ADta étoit égale à la circonférence ADa du demi-cercle ADa, & que ſi l'on inſcrivoit ou circonſcrivoit au demi-cercle une infinité de triangles qui euſſent tous leur ſommet en a, & à la figure ADta une infinité de rectangles qui euſſent tous leurs baſe ſur la baſe at, la ſomme des rectangles ſeroit double de la ſomme des triangles ; d'où nous avons déterminé non-ſeulement la grandeur de la figure, mais encore celle de ſes parties ; & dans le même Chapitre nous avons encore trouvé les momens ou les onglets de la figure & de ſes parties par rapport aux droites TA, ta, Aa, Tt.

Or nous servant des mêmes dénominations que nous avons données à chaque grandeur, nous allons chercher les momens & les centres de gravité de ces onglets.

Des momens par rapport à ta, TA, *des onglets de la figure des sinus verses qui ont leurs pointes en ta*, & TA.

263. Concevons que le demi-cercle AD*a* soit coupé en une infinité de petits triangles circonscrits ou inscrits dont les sommets soient en *a*, & la figure AD*ta* en autant de rectangles, les hauteurs *a*O, *a*V, *a*C, &c. des triangles seront égales aux hauteurs *a*O, *a*V, *a*C, &c. des rectangles par la formation de cette figure; & comme les bases des uns & des autres étant infiniment petites peuvent être regardées comme étant égales, il s'ensuit que les rectangles sont doubles des triangles, comme nous l'avons dit dans le Chapitre cité.

Concevons encore que sur les triangles s'élevent des onglets qui soient leurs momens par rapport à la droite *ta*, & sur les rectangles des onglets qui soient leurs momens par rappor à *ta*, la somme des onglets des triangles sera égale à l'onglet qui est le moment du demi-cercle par rapport à *ta*, & la somme des onglets des rectangles sera égale à l'onglet qui est le moment de la figure AD*ta* par rapport à *ta*.

Les onglets faits sur les triangles seront des pyramides dont le sommet sera au point *a*, & dont les bases seront égales aux bases des triangles multipliées par leurs distances à la droite *ta*, & les onglets faits sur les rectangles seront des demi-Prismes qui auront les bases égales à celles des pyramides & les hauteurs aussi.

Supposons que l'une des pyramides soit représentée par la figure ABCED (*Fig.* 184.) & que le demi-prisme correspondant soit représenté par la figure MNSRTV (*Fig.* 184.) il est évident que la base BCED de la pyramide sera égale à la base RSVT du demi-prisme, puisque les droites BC, RS, sont égales, & les droites CE, ST le sont aussi, à cause qu'elles sont égales aux droites égales CA, SM; or la pyramide est égale au tiers d'un prisme qui auroit pour base la base BCED & pour hauteur la droite CA, & le demi-prisme MV est égal à la moitié du même prisme; donc la pyramide & le demi-prisme sont entr'eux comme $\frac{1}{3}$ à $\frac{1}{2}$, ou comme $\frac{2}{6}$ à $\frac{3}{6}$, ou comme 2 à 3, & comme cela arrivera à l'égard de toutes pyramides qui composent l'onglet du demi-cercle

cercle, & de tous les demi-prismes qui composent l'onglet de la figure des sinus, il s'ensuit que l'onglet du demi-cercle est les $\frac{2}{3}$ de l'onglet de la figure.

De plus, le centre de gravité de la pyramide est éloigné du sommet A des trois quarts de la hauteur CA; ainsi son moment est égal à la pyramide ou au tiers du prisme de même base & de même hauteur multipliée par les trois quarts de la hauteur; or le centre de gravité du demi-prisme MV est éloigné du plan vertical sur NM des deux tiers de la droite MS = CA, à cause que ce demi-prisme n'est autre chose que la somme d'un infinité de petits triangles rectangles égaux entr'eux & paralleles au triangle NRV, d'où il suit que les centres de ces triangles étant tous éloignés du plan vertical sur NM des deux tiers de SM, leur centre commun est dans la même distance; donc le moment du demi-prisme est égal à la moitié du prisme dont la pyramide est le tiers, multipliée par les $\frac{2}{3}$ de la hauteur MS ou CA. Appellant donc x le prisme dont la pyramide est le tiers, & z la hauteur MS ou CA, le moment de la pyramide sera à celui du demi-prisme comme $\frac{1}{3}x \times \frac{3}{4}z$ est à $\frac{1}{2}x \times \frac{2}{3}z$, c'est-à-dire comme $\frac{3}{12}xz$ est à $\frac{2}{6}xz$, ou $\frac{4}{12}xz$, ou enfin comme 3 est à 4. Et comme la même chose arrivera à l'égard de toutes les pyramides qui composent l'onglet du demi-cercle & de tous les demi-prismes qui composent l'onglet de la figure, il s'ensuit que le moment par rapport à ta de l'onglet du demi-cercle ADa (*Fig.* 100.) ayant sa pointe en ta, est au moment de l'onglet de la figure ADta ayant sa pointe en ta, comme 3 à 4.

Mais le moment par rapport à ta de l'onglet du demi-cercle ayant sa pointe en ta est $\frac{5}{16}R^3P$; faisant donc cette analogie 3. 4 :: $\frac{5}{16}R^3P$, $\frac{20}{48}R^3P$, le quatriéme terme $\frac{20}{48}R^3P$, ou $\frac{5}{12}R^3P$ sera le moment de l'onglet de la figure ADta par rapport au plan vertical sur ta, & divisant ce moment par la grandeur $\frac{3}{8}R^2P$ de l'onglet, comme nous l'avons trouvée dans le Chapitre cité, le quotient $\frac{10}{9}R$ sera la distance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical sur ta; donc sa distance au plan vertical sur TA sera $2R - \frac{10}{9}R = \frac{8}{9}R$, & multipliant la grandeur par cette distance, le produit $\frac{24}{72}R^3P = \frac{1}{3}R^3P$ sera le moment de l'onglet par rapport à TA.

Si nous prenons l'onglet qui a sa pointe en TA, il est évident que son moment par rapport à ta sera égal au moment par rapport à TA de l'onglet qui a sa pointe en ta; car si l'on prend

les Elemens de la baſe AD*ta* paralleles à *ta* ou TA, le moment par rapport à *ta* de l'onglet qui a ſa pointe en TA ſera égal aux produits de ces Elemens multipliés d'abord par les diſtances des Elemens à TA, & enſuite par les diſtances à *ta*; & le moment par rapport à TA de l'onglet qui a ſa pointe en *ta* ſera égal au produit des mêmes Elemens multipliés d'abord par leurs diſtances à *ta*, & enſuite par leur diſtance à TA ; or ces produits ſont égaux de part & d'autre, puiſqu'ils ſont faits par les mêmes multiplicateurs. Donc les momens ſont auſſi égaux.

Le moment par rapport à *ta* de l'onglet qui a ſa pointe en TA eſt donc $\frac{1}{3}R^3P$, or la grandeur de l'onglet eſt $\frac{5}{8}PR^2$; diviſant donc ce moment par la grandeur, le quotient $\frac{8}{15}R$ ſera la diſtance du centre de gravité de l'onglet à la droite *ta*; donc ſa diſtance à la droite TA eſt $2R - \frac{8}{15}R = \frac{22}{15}R$; donc multipliant la grandeur par cette diſtance le produit $\frac{110}{120}PR^3 = \frac{11}{12}PR^3$ ſera le moment de l'onglet par rapport à TA.

Le moment par rapport à *ta* de l'onglet fait ſur le ſecteur B*a*A ayant ſa pointe en *ta* eſt $\frac{5}{8}aR^3 + \frac{11}{8}sR^3 - \frac{3}{8}suR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; faiſant donc l'analogie, comme nous venons de dire, le moment par rapport à *ta* de l'onglet fait ſur la partie correſpondante B*ba*A de la figure, ayant ſa pointe en *ta*, ſera $\frac{5}{6}aR^3 + \frac{11}{6}sR^3 - \frac{1}{2}suR^2 - \frac{1}{9}s^3R$. Or la grandeur de cet onglet eſt $\frac{3}{4}aR + \frac{5}{4}sR^2 - \frac{1}{4}suR$; diviſant donc le moment par la grandeur, le quotient $\frac{30aR^3 + 66sR^3 - 18suR^2 - 4s^3R}{27aR^3 + 45sR^2 - 9suR}$ ſera la diſtance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical ſur *ta*. Donc ſa diſtance au plan vertical ſur TA ſera $2R - \frac{30aR^3 + 66sR^3 - 18suR^2 - 4s^3R}{27aR^2 + 45sR^2 - 9suR} = \frac{24aR^2 + 24sR^2 + 4s^3R}{27aR + 45sR - 9su}$, & par conſéquent le moment par rapport à TA ſera $\frac{2}{3}aR^3 + \frac{2}{3}sR^3 + \frac{1}{9}s^3R$.

Or ce dernier moment $\frac{2}{3}aR^3 + \frac{2}{3}sR^3 + \frac{1}{9}s^3R$ eſt auſſi le moment par rapport à *ta* de l'onglet fait ſur B*ba*A ayant ſa pointe en TA, & la grandeur de cet onglet eſt $\frac{5}{4}aR^2 + \frac{3}{4}sR^2 + \frac{1}{4}suR$; diviſant donc le moment par la grandeur, le quotient $\frac{24aR^2 + 24sR^2 + 4s^3}{45aR + 27sR + 9su}$ ſera la diſtance du centre de gravité de l'onglet à la droite *ta*. Donc ſa diſtance au plan vertical ſur TA ſera $2R - \frac{24aR^2 + 24sR^2 + 4s^3}{45aR + 27sR + 9su} = \frac{66aR + 30sR^2 + 18suR - 4s^3}{45aR + 27sR + 9su}$, & le moment par rapport à ce plan ſera $\frac{11}{6}aR^3 + \frac{5}{6}sR^3 + \frac{1}{2}suR^2 - \frac{1}{9}s^3R$.

L'onglet fait ſur le rectangle $aAKb$ ayant ſa pointe en ta eſt égal au rectangle multiplié par la diſtance de ſon centre de gravité à ta, laquelle diſtance eſt égale à $aC = R$; or la hauteur aA du rectangle eſt $2R$, & ſa baſe ab étant égale à l'arc correſpondant AB du demi-cercle ABa eſt par conſéquent a; donc le rectangle eſt $2aR$, & ſon moment ou l'onglet, eſt $2aR^2$: or la diſtance du centre de gravité de cet onglet au plan vertical ſur ta, eſt les deux tiers de aA, c'eſt-à-dire $\frac{2}{3} \times 2R$, $\frac{4}{3}R$; donc ſon moment par rapport à ce plan eſt $2aR^2 \times \frac{4}{3}R = \frac{8}{3}aR^3$, donc ſi l'on ôte de ce moment celui de l'onglet fait ſur la portion $aABb$ ayant ſa pointe en ta, le reſte ſera le moment par rapport à ta de l'onglet fait ſur la portion extérieure AKB, & ce moment ſera $\frac{11}{6}aR^3 - \frac{11}{6}sR^3 + \frac{1}{2}suR^2 + \frac{1}{9}sR$. Or la grandeur de cet onglet eſt $\frac{5}{4}aR^2 - \frac{5}{4}sR^2 + \frac{1}{4}suR$; diviſant donc le moment par la grandeur, le quotient $\frac{66aR^2 - 66sR^2 + 18suR + 4s^3}{45aR - 45sR + 9su}$ ſera la diſtance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical ſur ta; donc la diſtance au plan vertical ſur TA ſera $2R - \frac{66aR^2 - 66sR^2 + 18suR + 4s^3}{45aR - 45sR + 9su}$ $= \frac{24aR^2 - 24sR^2 - 4s^3}{45aR - 45sR - 9su}$, & le moment par rapport à ce plan ſera $\frac{2}{3}aR^3 - \frac{2}{3}sR^3 - \frac{1}{9}s^3R$.

Or ce moment eſt auſſi le moment par rapport à ta de l'onglet fait ſur la portion ABK ayant ſa pointe en TA, & la grandeur de cet onglet eſt $\frac{3}{4}aR^2 - \frac{3}{4}sR^2 - \frac{1}{4}suR$; diviſant donc l'un par l'autre, la diſtance du centre de gravité au plan vertical ſur ta ſera $\frac{24aR^2 - 24sR^2 - 4s^3}{27aR - 27sR - 9su}$, & la diſtance au plan vertical ſur TA ſera $2R - \frac{24aR^2 - 24sR^2 - 4s^3}{27aR - 27sR - 9su} = \frac{30aR^2 - 30sR^2 - 18suR + 4s^3}{27aR - 27sR - 9su}$, & le moment par rapport à ce plan, $\frac{5}{6}aR^3 - \frac{5}{6}sR^3 - \frac{1}{2}suR^2 + \frac{1}{9}s^3R$.

L'onglet fait ſur le rectangle $abBV$ ayant ſa pointe en ta eſt $2aR^2 - auR - \frac{1}{2}as^2$, & comme cet onglet eſt un demi-priſme dont le centre de gravité eſt éloigné du plan vertical ſur ta de deux tiers de aV ou de $\frac{2}{3}h = \frac{4}{3}R - \frac{2}{3}u$, ſon moment par rapport à ce plan eſt donc $\frac{8}{3}aR^3 - \frac{4}{3}auR^2 - \frac{2}{3}as^3R + \frac{2}{3}au^2R + \frac{1}{3}aus^2$ $= \frac{8}{3}aR^3 - \frac{4}{3}auR^2 - \frac{4}{3}as^2R + \frac{1}{3}aus^2$. Or ce moment étant retranché du moment reſpectif de l'onglet fait ſur la portion $bBAa$, le reſte $-\frac{11}{6}aR^3 + \frac{11}{6}sR^3 - \frac{1}{2}suR^2 - \frac{1}{9}s^3R + \frac{4}{3}auR^2 + \frac{4}{3}as^2R - \frac{1}{3}aus^2$ ſera le moment par rapport à ta de l'onglet fait ſur la portion BAV ayant ſa pointe en ta; mais la grandeur de cet onglet

est $-\frac{3}{4}aR^2+\frac{3}{4}sR^2+auR-\frac{1}{4}suR+\frac{1}{2}as^2$; divisant donc le moment par la grandeur, la distance du centre de gravité au plan vertical sur *ta* sera $\frac{-66aR^3+66sR^3-18suR^2-4s^3R+48auR^2+48as^2R-12aus^2}{-45aR^2+45sR^2+36auR-7suR+18as^2}$ donc la distance au plan vertical sur TA sera 2R moins cette fraction, ou bien en réduisant 2R en fraction $\frac{-24aR^3+24sR^3+24auR^2-12as^2R+4s^3R+12aus^2}{-45aR^2+45sR^2-9suR+36auR+18as^2}$, & le moment par rapport à ce plan sera $-\frac{2}{3}aR^3+\frac{2}{3}sR^3+\frac{2}{3}auR^2-\frac{1}{3}as^2R+\frac{2}{9}s^3R+\frac{1}{3}as^2u$.

Or ce moment est aussi le moment par rapport à *ta* de l'onglet fait sur BAV ayant sa pointe en TA, & la grandeur de cet onglet est $-\frac{3}{4}aR^2+\frac{3}{4}sR^2+auR+\frac{1}{4}suR-\frac{1}{2}as^2$; divisant donc le moment par l'onglet, le quotient $\frac{-24aR^3+24sR^3+24auR^2-12as^2R+4s^3R+12asu^2}{-27aR^2+27sR^2+36auR+9suR-18as^2}$ sera la distance du centre de gravité au plan vertical sur *ta* ; & la distance au plan sur TA sera en réduisant 2R en fraction, $\frac{-30aR^3+30sR^3+48auR^2+18suR^2-24as^2R-4s^3R-12as^2u}{-27aR^2+27sR^2+36auR+9suR-18as^2}$; & par conséquent le moment par rapport à ce plan sera $-\frac{5}{6}aR^3+\frac{5}{6}sR^3+\frac{4}{3}auR^2+\frac{1}{2}suR^2-\frac{2}{3}as^2R-\frac{1}{9}s^3R-\frac{1}{3}aus^2$.

Et on trouvera de la même façon les momens des onglets faits sur les autres parties : par exemple, on aura les momens des onglets faits sur la partie B*bt*, en ôtant des momens des onglets faits sur la figure entiere, ceux des onglets faits sur la portion *b*BA*a*, & les restes feront les momens cherchés ; de même si on vouloit les momens des onglets faits sur la portion *d*DA*a* correspondante au secteur DA*a* du demi-cercle, on prendroit les momens de la portion *b*BA*a*, & les supposant égaux aux momens cherchés, alors on auroit $a=\frac{1}{4}P$, & $s=u=R$; ainsi mettant dans les expressions de ces momens $\frac{1}{4}P$ au lieu de *a*, & R au lieu de *s* & de *u*, on auroit les momens cherchés.

Des momens par rapport à ta & TA, des onglets qui ont leur pointe en Aa, & des momens par rapport à Aa, de ceux qui ont leur pointe en ta & TA.

261. Si l'on coupe l'onglet fait sur la figure AD*ta* (*Fig.* 100.) ayant sa pointe en A*a* par une infinité de plans paralleles à la base, il est clair que ces plans iront en diminuant à mesure qu'ils s'éleveront davantage au-dessus de la figure ; car le premier sera

égal à la base ADta, le second sera égal à la base moins la petite portion zXAa, le second sera égal à la base moins la portion bBAa, & ainsi de suite jusqu'au dernier qui sera égal à la base moins la base, c'est-à-dire à zero. Donc ce qui manque à cet onglet pour être égal à un prisme de même base & de même hauteur est la somme des plans zXAa, bBAa, &c. jusqu'au dernier qui est égal à la base ADta. (Il faut concevoir en lisant ceci que les droites aA, zX, bB, &c. sont infiniment proches entr'elles.) Mais la somme des plans zXAa, bBAa, &c. forme un onglet renversé qui est le même que l'onglet fait sur la figure ADta ayant sa pointe en Tt. Donc ce qui manque à l'onglet qui a sa pointe en Aa pour être égal au prisme de même base & de même hauteur, est l'onglet qui a sa pointe en tT; & par conséquent le moment par rapport à ta ou à TA de l'onglet qui a sa pointe en Aa, est égal au moment correspondant du prisme moins le moment correspondant de l'onglet qui a sa pointe en tT; mais la figure ADta base du prisme étant double du demi-cercle est $\frac{1}{2}$RP, & le moment de cette base par rapport à ta est $\frac{1}{8}R^2P$ (*N.* 161.) Ainsi multipliant ce moment par la hauteur $\frac{1}{2}$P du prisme, laquelle exprime le nombre de ses Elemens, le produit $\frac{1}{16}R^2P^2$ sera la somme des momens par rapport à ta des plans Elementaires du prisme, c'est-à-dire le moment même du prisme par rapport à ta.

Maintenant pour trouver le moment correspondant de l'onglet renversé qu'il faut retrancher du moment du prisme pour avoir le moment de l'onglet qui a sa pointe en Aa, nous ferons attention que le moment de chacun des plans Elementaires zXAa, bBAa, &c. qui composent cet onglet renversé, est par rapport à ta, $\frac{1}{4}aR^2 + \frac{1}{4}sR^2 - \frac{1}{4}suR$, ou $\frac{1}{4}aR^2 + \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}shR$, en mettant au lieu de u sa valeur $2R - h$. Donc la somme des momens de tous ces plans ou le moment de l'onglet renversé par rapport à ta, est la somme de tous les $\frac{1}{4}aR^2 + \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}shR$.

Or tous les a étant les arcs du demi-cercle arithmetiquement proportionnels sont entr'eux comme la suite 0. 1. 2. 3, &c. & par conséquent leur somme est au plus grand $\frac{1}{2}$P multiplié par le nombre des termes qui est encore $\frac{1}{2}$P, comme 1 à 2. Donc cette somme est $\frac{1}{8}P^2$, & par conséquent tous les $\frac{1}{4}aR^2$ valent $\frac{1}{4} \times \frac{1}{8}P^2 \times R^2 = \frac{1}{32}P^2R^2$.

Tous les s étant la somme des sinus des arcs arithmétiquement proportionnels valent $2R^2$, donc tous les $\frac{1}{4}sR^2$ valent $\frac{1}{4} \times 2R^2 \times R^2 = \frac{2}{4}R^4 = \frac{1}{2}R^4$.

Tous les sh étant les produits des sinus droits des arcs arithmétiquement proportionnels du demi-cercle, multipliés par les sinus verses des arcs de complement valent $2R^3$ (*N.* 163. 164.) donc tous les $\frac{1}{4}shR$ valent $\frac{1}{4}\times 2R^3\times R = \frac{1}{2}R^4$.

Donc tous les $\frac{1}{4}aR^2 + \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}shR$, c'est-à-dire le moment par rapport à ta de l'onglet renversé est $\frac{1}{32}P^2R^2 + \frac{1}{2}R^4 + \frac{1}{2}R^4 = \frac{1}{32}P^2R^2 + 2R^4$. Retranchant donc ce moment de celui du prisme, le reste $\frac{1}{16}P^2R^2 - \frac{1}{32}P^2R^2 - 2R^4 = \frac{1}{32}P^2R^2 - 2R^4$ est le moment par rapport à ta de l'onglet qui a sa pointe en A*a*.

Divisant donc ce moment par la grandeur $\frac{1}{8}P^2R - 2R^3$, le quotient $\frac{3P^2R - 64R^3}{4P^2 - 64R}$ sera la distance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical sur ta, & par conséquent sa distance au plan vertical sur TA sera $2R - \frac{3P^2R - 64R^2}{4P^2 - 64R} = \frac{5P^2R + 64R^2}{4P^2 - 64R}$, & multipliant la grandeur par cette distance, le produit $\frac{5}{32}P^2R^2 + 2R^4$ sera le moment de l'onglet par rapport au plan vertical sur TA.

Le moment par rapport à A*a* de l'onglet qui a sa pointe en ta étant le même que le moment par rapport à ta de celui qui a sa pointe en A*a* est donc $\frac{1}{32}P^2R^2 - 2R^4$; or la grandeur de cet onglet est $\frac{3}{8}R^2P$, donc la distance du centre de gravité au plan vertical sur A*a* est $\frac{3P^2 - 64R^2}{12P}$, & la distance du centre de gravité au plan vertical sur T*t* est $\frac{1}{2}P - \frac{3P^2 - 64R^2}{12P} = \frac{3P^2 + 64R^2}{12P}$, & le moment par rapport à T*t* est $\frac{3}{32}P^2R^2 + 2R^4$.

Le moment par rapport à A*a* de l'onglet qui a sa pointe en TA étant le même que le moment par rapport à TA de celui qui a sa pointe en A*a* est $\frac{5}{32}P^2R^2 + 2R^4$, & la grandeur de l'onglet est $\frac{5}{8}PR^2$; donc la distance du centre de gravité au plan vertical sur A*a* est $\frac{5P^2 + 64R^2}{20P}$, & la distance au plan vertical sur T*t* est $\frac{1}{2}P - \frac{5P^2 + 64R^2}{20P} = \frac{5P^2 - 64R^2}{20P}$; d'où il suit que le moment par rapport à T*t* est $\frac{5}{32}P^2R^2 - 2R^4$.

Enfin le moment par rapport à ta de l'onglet qui a sa pointe en T*t* étant le même que le moment par rapport à T*t* de celui qui a sa pointe en ta est $\frac{3}{32}P^2R^2 + 2R^4$, & la grandeur de cet onglet est $\frac{1}{8}P^2R + 2R^3$. Donc la distance du centre de gravité à la droite ta est $\frac{3P^2R + 64R^3}{4P^2 + 64R^2}$, & la distance au plan vertical sur TA est $\frac{5P^2R^2}{32} + 2R^4$.

Le moment par rapport à *ta* de l'onglet fait sur [illegible] portion *b*BA*a* ayant sa pointe en A*a* est égal au moment correspondant d'un prisme de même base & de même hauteur, moins le moment d'un onglet renversé dont les plans élementaires paralleles à la base sont les portions *z*XA*a*, &c. jusqu'à la plus grande *b*BA*a*. Or le moment par rapport à *ta* de la base *b*BA*a* du prisme est $\frac{3}{4}aR^2 + \frac{5}{4}sR^2 - \frac{1}{4}suR = \frac{3}{4}aR^2 + \frac{3}{4}sR^2 + \frac{1}{4}shR$, multipliant donc ce moment par la hauteur du prisme qui est $ab = a$, le produit $\frac{3}{4}a^2R^2 + \frac{5}{4}sR^2a - \frac{1}{4}suaR$ sera la somme des momens des plans élementaires du prisme paralleles à la base, & par conséquent cette somme sera le moment même du prisme par rapport à *ta*.

Or les momens de chaque plan Elementaire de l'onglet renversé est $\frac{3}{4}aR^2 + \frac{3}{4}sR^2 + \frac{1}{4}shR$, donc la somme de leurs momens ou le moment de l'onglet renversé par rapport à *ta* est égale à tous les $\frac{3}{4}aR^2 + \frac{3}{4}sR^2 + \frac{1}{4}shR$.

Or tous les *a* étant la somme des arcs arithmetiquement proportionnels, dont le dernier & le plus grand est l'arc correspondant AB du demi-cercle que nous appellerons A pour le distinguer, sont par conséquent $\frac{1}{2}A^2$, donc tous les $\frac{3}{4}aR^2$ valent $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}A^2 \times R^2 = \frac{3}{8}A^2R^2$.

Tous les *s* jusqu'au plus grand AV, que nous nommerons S, étant la somme des sinus droits des arcs arithmetiquement proportionnels dont le plus grand est AB, valent VR en nommant V le plus grand sinus verse AV, donc tous les $\frac{3}{4}sR^2$ valent $\frac{3}{4}VR \times R^2 = \frac{3}{4}VR^3$

Tous les *sh* jusqu'au plus grand que nous appellerons SH, étant le produit des sinus droits multipliés par les sinus verses de arcs de complement valent $VR^2 + \frac{1}{2}s^2R$; donc tous les $\frac{1}{4}shR$ valent $\frac{1}{4}VR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$.

Donc tous les $\frac{3}{4}aR^2 + \frac{3}{4}sR^2 + \frac{1}{4}shR$ valent $\frac{3}{8}A^2R^2 + \frac{3}{4}RV^3 + \frac{1}{4}VR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$, & remettant les petites lettres au lieu des grandes, le moment de l'onglet renversé par rapport à *ta* sera $\frac{3}{8}a^2R^2 + uR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$, retranchant donc ce moment de celui du prisme le reste $\frac{3}{8}a^2R^2 + \frac{5}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asuR - uR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$ sera le moment par rapport à *ta* de l'onglet fait sur *b*BA*a* ayant sa pointe en A*a*; mais la grandeur de cet onglet est $\frac{1}{2}a^2R + asR - uR^2$, donc la distance du centre de gravité au plan vertical sur *ta* sera $\frac{3a^2R^2 + 10asR^2 - 2asuR - 8uR^3 - s^2R^2}{4a^2R + 8sRa - 8uR^2}$, donc la distance au plan

vertical [sur] TA sera la droite $2R$ moins cette fraction ; ou bien reduisant $2R$ en fraction, cette distance sera $\frac{5a^2R^2 + 6asR^2 + 2asuR - 8uR^3 + s^2R^2}{4a^2R + 8asR - 8uR^2}$ & le moment par rapport à ce plan sera $\frac{5}{8}a^2R^2 + \frac{3}{4}asR^2 + \frac{1}{4}asuR - uR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$.

Le moment par rapport à Aa de l'onglet fait sur la même portion $bBAa$ ayant sa pointe en ta, étant égal au moment par rapport à ta de l'onglet qui a sa pointe en Aa, est par conséquent $\frac{3}{8}a^2R^2 + \frac{5}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asuR - uR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$. Or cet onglet est $\frac{3}{4}aR^2 + \frac{5}{4}sR^2 - \frac{1}{4}suR$, donc la distance de son centre au plan vertical sur Aa est $\frac{3a^2R + 10asR - 2asuR - 8uR^2 - s^2R}{6aR + 10sR - 2su}$, d'où l'on tirera aisément la distance au plan vertical sur Tt & le moment par rapport à ce plan.

De même le moment par rapport à Aa de l'onglet fait sur la portion $bBAa$ ayant sa pointe en TA, étant le même que le moment par rapport à TA de l'onglet ayant sa pointe en Aa est par conséquent $\frac{5}{8}a^2R^2 + \frac{3}{4}asR^2 + \frac{1}{4}asuR - uR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$; or la grandeur de cet onglet est $\frac{5}{4}aR^2 + \frac{3}{4}sR^2 + \frac{1}{4}suR$, donc la distance du centre de gravité au plan vertical sur Aa est $\frac{5a^2R + 6asR + 2asu - 8uR^2 + s^2R}{10aR + 6sR + 2su}$ d'où le reste se tirera aisément.

Le moment par rapport à ta de l'onglet fait sur le rectangle $bKAa$, est égal au moment correspondant du prisme de même base & de même hauteur, moins le moment d'un onglet renversé, dont les plans elementaires paralleles à la base sont les rectangles $zQAa$, &c. jusqu'au plus grand $bKAa$. Or la base du prisme est $ba \times aA = 2aR$, & comme la distance de son centre de gravité à la droite TA est $\frac{1}{2}Aa = R$, le moment de cette base par rapport à ta est $2aR^2$; or le moment du prisme est égal à la somme des momens de ses plans élementaires paralleles à la base, donc il est égal à $2aR^2$ multiplié par la hauteur du prisme qui est encore $ba = a$, & par conséquent le moment du prisme par rapport à ta est $2a^2R^2$.

Mais le moment par rapport à ta de l'onglet renversé qu'il faut retrancher, étant égal à la somme des momens de ses plans élementaires paralleles à la base, est par conséquent égal à la somme des momens des plans $zQAa$, &c. jusqu'au dernier & plus grand $bKAa$. Or le moment de chacun de ces plans par rapport à ta est $2aR^2$, ainsi le moment de l'onglet renversé est égal à la somme de tous les $2aR^2$; mais tous les a étant en progression arithmetique,

metique, tous les a sont entr'eux comme les nombres 0. 1. 2. 3. &c. donc leur somme est au plus grand multiplié par le nombre des termes comme 1 à 2, c'est-à-dire en appellant A le plus grand, leur somme est $\frac{1}{2}A^2$. Donc tous les $2aR^2$ valent $\frac{1}{2} \times 2A^2R^2 = A^2R^2$ ou a^2R^2, en remettant au lieu de A la lettre a qui marque ici le plus grand arc. Otant donc du moment $2a^2R^2$ du prisme la somme a^2R^2, qui est le moment de l'onglet renversé, le reste a^2R^2 sera le moment par rapport à ta de l'onglet fait sur le rectangle bKAa ayant sa pointe en Aa.

Or si du moment de cet onglet nous retranchons le moment correspondant de l'onglet fait sur la portion bBAa ayant sa pointe en Aa, le reste $\frac{5}{8}a^2R^2 - \frac{5}{4}asR^2 + \frac{1}{4}asuR + uR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$ sera le moment par rapport à ta de l'onglet fait sur la portion BKA ayant sa pointe en Aa. Mais la grandeur de cet onglet est $\frac{1}{2}a^2R - asR + uR^2$, donc la distance de son centre de gravité au plan vertical sur ta sera $\frac{5a^2R^2 - 10asR^2 + 2asuR + 8uR^3 + s^2R^2}{4a^2R - 8asR + 8uR^2}$, & par conséquent sa distance au plan vertical sur TA sera 2R moins cette fraction, ou $\frac{3a^2R^2 - 6asR^2 - 2asuR + 8uR^3 - s^2R^2}{4a^2R - 8asR + 8uR^2}$ & son moment par rapport à TA sera $\frac{3}{8}a^2R^2 - \frac{3}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asuR + uR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$.

Or le moment par rapport à Aa de l'onglet fait sur BKA ayant sa pointe en ta, étant le même que le moment par rapport à ta de l'onglet qui a sa pointe en Aa, est par conséquent $\frac{5}{8}a^2R^2 - \frac{5}{4}asR^2 + \frac{1}{4}asuR + uR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$, & la grandeur de cet onglet est $\frac{5}{4}aR^2 - \frac{5}{4}sR^2 + \frac{1}{4}suR$; donc la distance du centre de gravité au plan vertical sur Aa est $\frac{5a^2R - 10asR + 2asu + 8uR^2\ s^2R}{10aR - 10sR + 2su}$, & la distance au plan vertical sur Tt sera $\frac{1}{2}$P moins cette fraction, d'où il sera aisé de tirer le moment par rapport au plan vertical sur Tt.

De même le moment par rapport à Aa de l'onglet fait sur BKA ayant sa pointe en TA, étant le même que le moment par rapport à TA de l'onglet ayant sa pointe en Aa, est par conséquent $\frac{3}{8}a^2R^2 - \frac{3}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asuR + uR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$; or la grandeur de cet onglet est $\frac{3}{4}aR^2 - \frac{3}{4}sR^2 - \frac{1}{4}suR$, donc la distance de son centre de gravité au plan vertical sur Aa sera $\frac{3a^2R - 6asR - 2asuR + 8uR^2 - s^2R}{6aR - 6sR - 2su}$, d'où on tirera facilement la distance au plan vertical sur Tt, & le moment par rapport à ce plan, & ainsi des autres.

Des Momens par rapport à Aa, des Onglets qui ont leurs pointes en Aa.

265. Le moment par rapport à Aa de l'onglet fait ſur la figure ADta, ayant ſa pointe en Aa, eſt égal au moment correſpondant d'un priſme de même baſe & de même hauteur, moins le moment d'un onglet renverſé dont les Elemens paralleles à la baſe ſont les portions zXAa, bBAa, juſqu'à la derniere & plus grande, laquelle eſt égale à la baſe ADta. Or la baſe ADta du priſme eſt $\frac{1}{2}$ RP & ſon moment par rapport à Aa eſt $\frac{1}{8}P^2R - 2R^3$, donc la ſomme des momens des Elemens du priſme paralleles à ſa baſe ſera $\frac{1}{8}P^2R - 2R^3$ multiplié par la hauteur $\frac{1}{2}$P du priſme, c'eſt-à-dire $\frac{1}{16}P^3R - PR^3$, ſera le moment du priſme par rapport à Aa.

Mais chaque plan élementaire de l'onglet renverſé qu'il faut retrancher du priſme, eſt aR + sR, & ſon moment par rapport à Aa eſt $\frac{1}{2}a^2R + asR - uR^2$, donc la ſomme des momens de ces plans ou le moment de l'onglet renverſé, eſt égal à la ſomme de tous les $\frac{1}{2}a^2R + asR - uR^2$. Or tous les a étant les arcs arithmetiquement proportionnels du demi-cercle, la ſomme de tous les a^2 juſqu'au dernier $\frac{1}{4}P^2$ eſt $\frac{1}{3} \times \frac{1}{8}P^3 = \frac{1}{24}P^3$ donc tous les $\frac{1}{2}a^2R$ valent $\frac{1}{48}P^3R$.

Tous les as étant la ſomme des arcs multipliés par leurs ſinus droits, ſont égaux au moment de la figure des ſinus droits atc (*Fig.* 100.) par rapport à la droite am (*N.* 165), donc ils valent $\frac{1}{2}R^2P$, & par conſéquent tous les asR valent $\frac{1}{2}R^3P$.

Tous les u étant la ſomme des ſinus verſes, ſont égaux à la figure ADta & valent $\frac{1}{2}$ RP, donc tous les $-uR^2$ valent $-\frac{1}{2}R^3P$.

Donc la ſomme de tous les $\frac{1}{2}aR^2 + asR - uR^2$ ou le moment de l'onglet renverſé par rapport à Aa eſt $\frac{1}{48}R^3R + \frac{1}{2}PR^3 - \frac{1}{2}PR^3 = \frac{1}{48}P^3R$. Otant donc ce moment decelui du priſme le reſte $\frac{1}{16}P^3R - PR^3 - \frac{1}{48}P^3R = \frac{1}{24}P^3R - PR^3$ ſera le moment par rapport à Aa de l'onglet fait ſur la figure ADta ayant ſa pointe en Aa. Or la grandeur de cet onglet eſt $\frac{1}{8}P^2R - 2R^3$, diviſant donc le moment par la grandeur le quotient $\frac{P^3 - 24PR^2}{3P^2 - 48R^2}$ ſera la diſtance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical ſur Aa; donc la diſtance au plan vertical ſur Tt ſera $\frac{1}{2}P - \frac{P^3 - 24R^2P}{3P^2 - 48R^2} = \frac{P^3}{6P^2 - 96R^2}$, multipliant donc la grandeur par cette diſtance le produit $\frac{1}{48}P^3R$ ſera le moment par rapport à Tt.

Or le moment par rapport à Aa de l'onglet qui a sa pointe en Tt, est le même que le moment par rapport à Tt de l'onglet qui a sa pointe en Aa donc ce moment est encore $\frac{1}{48}$ P³R, divisant donc ce moment par la grandeur de l'onglet qui est $\frac{1}{8}$ P²R + 2R³, le quotient $\frac{P^3R}{6P^2R+96R^3} = \frac{P^3}{6P^2+96R^2}$ sera la distance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical sur Aa, & par conséquent sa distance au plan vertical sur Tt sera $\frac{1}{2}P - \frac{P^3}{6P^2+96R^2} = \frac{P^3+24PR^2}{3P^2+48R^2}$, & multipliant la grandeur par cette distance le produit $\frac{1}{24}$ P³R + R³P sera le moment par rappott à ce plan.

On pourroit trouver de la même façon les momens par rapport à Aa des onglets faits sur les portions de la figure ADta, ayant leurs pointes en Aa; mais pour abreger, voici comment nous nous y prendrons.

L'onglet fait sur la portion bBAa ayant sa pointe en bB, est composé de plans Elementaires paralleles à la base, lesquels à commencer par le sommet sont la somme des portions zXAa, &c. jusqu'à la plus grande bBAa qui est la base. Or chacune de ces portions est aR + sR, & son moment par rapport à Aa est $\frac{1}{2}a^2$R + asR — uR²; donc le moment de l'onglet par rapport à Aa est la somme de tous les $\frac{1}{2}a^2$R + asR — uR².

Or tous les a^2 étant les quarrés des arcs arithmetiquement proportionnels, dont nous appellerons le plus grand A, leur somme est $\frac{1}{3}$A³, à cause que le nombre des termes est encore A, donc tous les $\frac{1}{2}a^2$R valent $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ A³R = $\frac{1}{6}$ A³R, ou $\frac{1}{6}a^3$R en remettant a au lieu de A.

Tous les as étant la somme des arcs multipliés par leurs sinus droits sont égaux au moment de la portion correspondante abr de la figure des sinus droits par rapport à am, leur somme est auR — aR² + sR² (*N.* 162.), donc tous les asR = auR² — aR³ + sR³. Tous les u étant la somme des sinus verses, sont égaux à la portion correspondante ABK & valent par conséquent aR — sR (*N.* 160.) donc tous les — uR² valent — aR³ + sR³.

Donc la somme des $\frac{1}{2}a^2$R + asR — uR² ou le moment par rapport à Aa de l'onglet fait sur bBAa ayant sa pointe en bB est $\frac{1}{6}a^3$R + auR² — 2aR³ + 2sR³.

Or le moment par rapport à bB de l'onglet fait sur bBAa ayant sa pointe en Aa étant le même que celui que nous venons de trouver, est par conséquent aussi $\frac{1}{6}a^3$R + auR² — 2aR³ + 2sR³;

& la grandeur de cet onglet eſt $\frac{1}{2}a^2R + asR - uR^2$; diviſant donc le moment par la grandeur, le quotient $\frac{a^3 + 6auR - 12aR^2 + 12R^2}{3a^2 + 6as - 6uR}$ ſera la diſtance du centre de gtavité de l'onglet au plan vertical ſur bB ; donc ſa diſtance au plan vertical ſur Aa ſera a moins cette fraction, où bien reduiſant a en fraction $\frac{2a^3 - 12auR + 6a^2s + 12aR^2 - 12sR^2}{3a^2 + 6as - 6uR}$, & multipliant la grandeur par cette diſtance le produit $\frac{1}{3}a^3R - 2auR^2 + a^2sR + 2aR^3 - 2sR^3$ ſera le moment de l'onglet par rapport à Aa : or la diſtance du centre de gravité au plan vertical ſur Tt ſera $\frac{1}{2}$P moins la diſtance au plan vertical ſur Aa, où bien en reduiſant $\frac{1}{2}$P en fraction $\frac{3a^2P + 6asP - 6uRP - 4a^3 + 24auR - 12a^2s - 24aR^2 + 24sR^2}{6a^2 + 12as - 12uR}$, & multipliant la grandeur par cette diſtance le produit $\frac{1}{4}a^2RP + \frac{1}{2}asRP - \frac{1}{2}uR^2P - \frac{1}{3}a^3R + 2auR^2 - a^2sR - 2aR^3 + 2sR^3$ ſera le moment de l'onglet par rapport à Tt, d'où l'on tirera aiſément les momens par rapport à Aa & à Tt, de l'onglet fait ſur bBAa ayant ſa pointe en Tt.

L'onglet fait ſur le rectangle bKAa ayant ſa pointe en bB eſt a^2R, car ſa baſe étant le produit de $ba = a$ par A$a = 2R$ vaut $2aR$, & comme ſon centre de gravité eſt éloigné de bB de la moitié de ba, ou de $\frac{1}{2}a$, il s'enſuit que le produit de ſa baſe par cette diſtance eſt $\frac{1}{2}a \times 2aR = a^2R$. Or les plans Elementaires qui compoſent cet onglet étant pris perpendiculairement à la baſe & à la pointe ſont des triangles rectangles égaux entr'eux, & dont le centre de gravité eſt éloigné du plan vertical ſur Aa d'un tiers de ba ou de $\frac{1}{3}a$, donc la diſtance du centre de gravité de l'onglet à ce même plan eſt auſſi $\frac{1}{3}a$, & par conſéquent le moment de cet onglet eſt $\frac{1}{3}a \times a^2R = \frac{1}{3}a^3R$ par rapport à ce même plan; ôtant donc de ce moment le moment reſpectif de l'onglet fait ſur bBAa ayant ſa pointe en bB, le reſte ſera le moment pat rapport à Aa de l'onglet fait ſur BKA ayant ſa pointe en BK ; ainſi ce moment ſera $\frac{1}{6}a^3R - auR^2 + 2aR^3 - 2sR^3$.

Or ce dernier moment eſt le même que le moment par rapport à BK de l'onglet qui auroit ſa pointe en Aa & la grandeur de celui-ci eſt $\frac{1}{2}a^2R - asR + uR^2$, diviſant donc le moment par la grandeur le quotient $\frac{a^3 - 6auR + 12aR^2 - 12sR^2}{6a^2 - 6as + 6uR}$ ſera la diſtance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical ſur BK, & la diſtance au plan vertical ſur Aa ſera $\frac{2a^3 + 12auR - 6a^2s - 12aR^2 + 12sR^2}{3a^2 - 6as + 6uR}$, donc le moment par rapport à ce plan ſera $\frac{1}{3}a^3R + 2auR^2$

$-a^2 sR - 2aR^3 + 2sR^3$, & de là on tirera aisément la distance au plan vertical sur Tt, le moment par rapport à ce plan, &c.

Des Momens des Onglets faits sur la figure atc des sinus droits. (Fig. 100.).

266. L'onglet fait sur la figure *atc* ayant sa pointe en *ta* est composé de plans élementaires perpendiculaires à sa base qui sont autant de triangles rectangles dont la somme est égale à la moitié de la somme des quarrés des sinus des arcs arithmetiquement proportionnels. Or les centres de gravité de ces triangles sont éloignés du plan vertical sur *ta* des $\frac{2}{3}$ de leurs bases, c'est-à-dire des $\frac{2}{3}$ des sinus, donc les momens de ces triangles sont la somme des demi-quarrés des sinus multipliés par les $\frac{2}{3}$ de ces mêmes sinus, c'est-à-dire que cette somme est égale à tous $\frac{1}{2}s^2 \times \frac{2}{3}s$ ou à tous les $\frac{1}{3}s^3$, mais tous les s^3 sont égaux à la somme des quarrés des ordonnées au demi-cercle AD*a* multipliée par le rayon (*N.* 125.), & les quarrés des ordonnées étant entr'eux comme les cercles que ces mêmes ordonnées décriroient, lesquels sont au plus grand multiplié par le nombre des termes ou par le diametre comme 2 à 3; ces quarrés dis-je sont au quarré du rayon DC multiplié par le diametre comme 2 à 3, & par conséquent leur somme est $\frac{4}{3}R^3$; multipliant donc $\frac{4}{3}R^3$ par le rayon R, le produit $\frac{4}{3}R^4$ sera égal à la somme de tous les s^3, & par conséquent tous les $\frac{1}{3}s^3$ ou le moment de l'onglet par rapport au plan vertical sur *ta* sera $\frac{4}{9}R^4$, & divisant ce moment par la grandeur de l'onglet qui est $\frac{1}{8}R^2P$, le quotient $\frac{32R^2}{9P}$ sera la distance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical sur *ta*; donc la distance au plan vertical sur *mc* sera *dc* moins cette fraction, c'est-à-dire R $-\frac{32R^2}{9P} = \frac{9PR - 32R^2}{9P}$, & multipliant la grandeur par cette distance le produit $\frac{1}{8}R^3P - \frac{4}{9}R^4$ sera le moment par rapport au plan vertical sur *mc*.

Si l'on coupe l'onglet fait sur la figure *atc* ayant sa pointe en T*t* par des plans paralleles à la base, ces plans seront les portions *azr*, *abr*, &c. jusqu'à la derniere qui sera la base *atc*; or le moment par rapport à *am* de chacun de ces plans est $auR - aR^2 + sR^2$ (*N.* 162.), donc le moment de l'onglet par rapport au plan vertical sur *am* sera la somme de tous les $auR - aR^2 + sR^2$.

Or tous les *au* étant les arcs arithmetiquement proportionnels

multipliés par leurs sinus verses valent $\frac{1}{8}P^2R + 2R^3$ (*N.* 165.); donc tous les *au*R valent $\frac{1}{8}P^2R^2 + 2R^4$. Tous les *a* étant les arcs arithmetiquement proportionnels, & le dernier étant $\frac{1}{2}P$ de même que le nombre des termes leur somme est $\frac{1}{8}P^2$, donc tous les $-aR^2$ valent $-\frac{1}{8}P^2R^2$.

Tous les *s* étant les sinus des arcs arithmetiquement proportionnels valent $2R^2$, donc tous les sR^2 valent $2R^4$.

Donc tous les $auR - aR^2 + sR^2$ qui forment le moment de l'onglet par rapport à *am* valent $\frac{1}{8}P^2R^2 + 2R^4 - \frac{1}{8}P^2R^2 + 2R^4 = 4R^4$.

Or la grandeur de l'onglet est $\frac{1}{2}PR^2$, divisant donc le moment par la grandeur, le quotient $\frac{8R^2}{P}$ sera la distance du centre de gravité au plan vertical sur *am*, & la distance au plan vertical sur *Tt* sera $\frac{1}{2}P - \frac{8R^2}{P}$, & multipliant la grandeur par cette distance le produit $\frac{1}{4}P^2R^2 - 4R^4$ sera le moment de l'onglet par rapport à *Tt*.

Et il est visible que le moment par rapport à *Tt* de l'onglet qui a sa pointe en *am*, étant le même que le moment par rapport à *am* de l'onglet qui a sa pointe en *Tt* vaut par conséquent $4R^4$, & que son moment par rapport à *am* vaut $\frac{1}{4}P^2R^2 - 4R^4$.

Dans l'onglet fait sur la figure *atc* ayant la pointe en *at*, la distance du centre de gravité au plan vertical sur *am* ou sur *Tt* est visiblement $\frac{1}{4}P$, multipliant donc la grandeur $\frac{1}{8}R^2P$ par $\frac{1}{4}P$, le produit $\frac{1}{32}R^2P^2$ sera le moment de l'onglet par rapport à l'un ou l'autre plan.

Or le moment par rapport à *at* de l'onglet qui a sa pointe en *am* ou en *Tt*, étant le même que le moment par rapport à *am* ou à *Tt* de l'onglet qui a sa pointe en *at*, ce moment est par conséquent aussi $\frac{1}{32}R^2P^2$; divisant donc par la grandeur $\frac{1}{2}PR^2$, le quotient $\frac{1}{16}P$ sera la distance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical sur *at*; donc sa distance au plan vertical sur *mc* sera $R - \frac{1}{16}P$, & multipliant la grandeur par cette distance le produit $\frac{1}{2}PR^3 - \frac{1}{32}P^2R^2$ sera le moment par rapport à ce plan.

Le moment par rapport à *ta* de l'onglet fait sur la portion *abr* ayant sa pointe en *ta*, est égal à la somme de tous les $\frac{1}{2}s^3$ compris dans cette portion. Or tous les s^3 sont égaux aux quarrés des ordonnées à la portion correspondante ABV du demi-cercle multipliés par le rayon, & les quarrés des ordonnées à cette

portion du demi-cercle ſont égaux au double du moment de cette portion par rapport au diametre, car ce moment eſt un onglet dont les plans élementaires perpendiculaires à la baſe & à la pointe ſont des triangles rectangles qui valent la moitié des quarrés de leurs baſes ou des ordonnées; donc tous les s^3 valent le double du moment de la portion du demi-cercle multiplié par le rayon, & tous les $\frac{1}{3}s^3$ valent le tiers de ce double. Or le moment de la portion du demi-cercle eſt $\frac{1}{3}uR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2u$ dont le double multiplié par R eſt $\frac{2}{3}uR^3 - \frac{1}{3}s^2R^2 + \frac{1}{3}s^2uR$, & par conſéquent le tiers $\frac{2}{9}uR^3 - \frac{1}{9}s^2R^2 + \frac{1}{9}s^2uR$ eſt la ſomme de tous les $\frac{1}{3}s^3$ ou le moment par rapport à *ta* de l'onglet fait ſur la portion *bra* ayant ſa pointe en *ta*. Or la grandeur de cet onglet eſt $\frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}suR$. Diviſant donc ce moment par la grandeur, le quotient $\frac{8uR^2 - 4s^2R + 4s^2u}{9aR - 9sR + 9su}$ ſera la diſtance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical ſur *ta*, donc la diſtance au plan vertical ſur *mc* ſera R — cette fraction ou $\frac{9aR^2 - 9sR^2 + 9suR - 8uR^2 + 4s^2R - 4s^2u}{9aR - 9sR + 9su}$, & multipliant la grandeur par cette diſtance le produit $\frac{1}{4}aR^3 - \frac{1}{4}sR^3 + \frac{1}{4}suR^2 - \frac{2}{9}uR^3 + \frac{1}{9}s^2R^2 - \frac{1}{9}s^2uR$ ſera le moment par rapport à *cm*.

L'onglet fait ſur la même portion *abr* ayant ſa pointe en *br* eſt compoſé de plans Elementaires paralleles à la baſe qui ſont égaux à la ſomme des portions *azr*, &c. juſqu'à la derniere & plus grande *abr* qui eſt la baſe (il faut concevoir ici de même qu'ailleurs que les droites *zr*, *br*, *dc*, &c. ſont infiniment proches). Or le moment par rapport à *am* de chacune de ces portions eſt $auR - aR^2 + sR^2$, donc la ſomme des momens des plans élementaires de l'onglet eſt égale à tous les $auR - aR^2 + sR^2$.

Or tous les *au* étant les produits des arcs arithmetiquement proportionnels compris dans la portion correſpondante ABV du demi-cercle multipliés par les ſinus verſes ſont égaux au moment $\frac{1}{2}a^2R - asR + uR^2$ de la portion ABK de la figure des ſinus verſes par rapport à A*a*, donc tous les *au*R valent $\frac{1}{2}a^2R^2 - asR^2 + uR^3$.

Tous les *a* juſqu'au plus grand que nous appellerons A valent $\frac{1}{2}A^2$, à cauſe qu'ils ſont arithmetiquement proportionnels, donc tous les $-aR^2$ valent $-\frac{1}{2}a^2R^2$.

Tous les *s* étant les ſinus des arcs arithmetiquement proportionnels de la portion BVA du demi-cercle valent *u*R, donc tous les sR^2 valent uR^3.

Donc tous les $auR - aR^2 + sR^2$ valent $2uR^3 - asR^2$, & c'est le moment par rapport à *am* de l'onglet fait sur *abr* ayant sa pointe en *br*. Or ce moment est le même que le moment par rapport à *br* de l'onglet fait sur la même portion ayant sa pointe en *am*, & la grandeur de ce second onglet est $auR - aR^2 + sR^2$, divisant donc le moment par la grandeur, le quotient $\frac{2uR^2 - asR}{au - aR + sR}$, sera la distance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical sur *br* dont sa distance au plan vertical sur *am* sera la distance $br = a$ moins cette fraction, ou $\frac{a^2u - a^2R + 2asR - 2uR^2}{au - aR + sR}$, & multipliant cette distance par la grandeur le produit $a^2uR - a^2R^2 + 2asR^2 - 2uR^3$ sera le moment par rapport à *am* de l'onglet ayant sa pointe en *am*; or la distance du centre de gravité de cet onglet au plan vertical sur T*t* sera la droite $at = \frac{1}{2}P$ moins la distance au plan vertical sur *am*, c'est-à-dire,

$\frac{auP - aRP + sRP - 2a^2u + 2a^2R - 4asR + 4uR^2}{2au - 2aR + 2sR}$, multipliant donc la grandeur par cette distance le produit $\frac{1}{2}auPR - \frac{1}{2}aR^2P + \frac{1}{2}sR^2P - a^2uR + a^2R^2 - 2asR^2 + 2uR^3$ sera le moment par rapport à T*t* & ainsi des autres.

REMARQUE.

267. Je ne redirai point de quelle maniere il faut trouver les centres de gravité des solides imparfaits produits par la circonvolution imparfaite des bases des onglets autour de leur pointe; mais je ferai remarquer que si le solide est produit par une demi-revolution, alors le moment de ce solide est double du moment de l'onglet dont le plan est incliné sur la base de 45 degrés.

Soit par exemple l'onglet FBR (*Fig.* 174.) dont nous supposons que le plan incliné fait avec la base un angle de 45 degrés. Si nous concevons que sa base BSP fasse une demi-revolution autour de l'axe BF, le solide qui en sera produit sera égal à la base multipliée par la demi-circonference que décrira le centre de gravité P; & l'onglet sera égal à la même base multipliée par le rayon NP de cette circonference; ainsi le solide sera à l'onglet comme $\frac{1}{2}$P à R, c'est-à-dire comme la demi-circonference au rayon; or la distance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical sur sa pointe est plus grande que la distance du centre de gravité du solide à son axe, à cause de la courbure de ses parties, & nous avons dit que pour trouver cette distance il faut faire cette analogie;

analogie; comme la demi-circonference que décriroit le centre de gravité de l'onglet autour de l'axe est au diametre qui est la corde de la demi-circonference, ainsi le rayon ou la distance du centre de gravité au plan vertical est à la distance du centre de gravité du solide à l'axe, $\frac{1}{2}P$, $2R :: R$, $\frac{4R^2}{P}$ donc la distance du centre de gravité de l'onglet au plan vertical est à la distance du centre de gravité du solide à l'axe comme R est à $\frac{4R^2}{P}$, ou comme $\frac{1}{2}$ P est à 2R car ces deux raisons sont égales. Or les momens des solides sont en raison composée de leurs grandeurs & de leurs distances; donc le moment de l'onglet est au moment du solide comme $\frac{1}{2} P \times R$ est à $2R \times \frac{1}{2}P$, ou comme $\frac{1}{2}PR$ à PR, ou comme 1 à 2.

REMARQUE II.

268. J'ai dit au commencement de ce Chapitre qu'on avoit quelquefois besoin du centre de gravité des solides pour connoître le centre de gravité de certaines surfaces planes, & je vais en donner ici un exemple.

Nous avons vû (*N.* 181. 182.) que la figure Aa (*Fig.* 118.) s'appelloit la figure des sinus droits des cordes arithmetiquement proportionnelles du demi-cercle, en prenant les Elemens perpendiculaires sur Aa, & que la grandeur de cette figure étoit $\frac{4}{3}R^2$. Maintenant pour trouver son centre de gravité par rapport à la droite Aa, nous sçavons que chaque Element perpendiculaire à cette droite est $\frac{c\sqrt{4R^2 - c^2}}{2R}$. Or le moment de ces Elemens est égal à la moitié de leurs quarrés, donc ce moment est égal à la somme de tous les $\frac{1}{2}\frac{c^2 \times \overline{4R^2 - c^2}}{4R^2} = \frac{c^2 \times \overline{4R^2 - c^2}}{8R^2} = \frac{4R^2c^2 - c^4}{8R^2}$, or tous les c étant les cordes arithmetiquement proportionnelles du demi-cercle dont la plus grande est 2R de même que le nombre des termes, la somme de tous les c^2 vaut $\frac{8}{3}R^3$, & par conséquent tous les $4R^2c^2$ valent $\frac{32}{3}R^5$, de même tous les $-c^4$ valent $\frac{32}{5}R^5$, donc tous les $4R^2c^2 - c^4$ valent $\frac{32}{3}R^5 - \frac{32}{5}R^5 = \frac{160}{15}R^5 - \frac{96}{15}R^5 = \frac{64}{15}R^5$, & tous les $\frac{4R^2c^2 - {}^4}{8R^2}$, valent $\frac{64R^5}{15 \times 8R^2} = \frac{64}{120}R^3 = \frac{8}{15}R^3$. Divisant donc ce moment par la grandeur $\frac{4}{3}R^2$, le quotient $\frac{8}{20}R = \frac{2}{5}R$ sera la distance du centre de gravité de la base à la droite Aa.

Pour trouver la distance à la droite AT, nous décrirons le quart de cercle aAE dont le rayon est double du rayon du demi-cercle

qui nous a servi à construire la figure Aqa des sinus correspondans aux cordes arithmetiquement proportionnelles, & prolongeant les Elemens de la figure Aqa jusqu'à la circonference du quart de cercle, les prolongemens de ces sinus seront les ordonnées du quart de cercle, & chacune de ces ordonnées sera $\sqrt{4R^2 - c^2}$, (*N*. 182.) & multipliant ces ordonnées par leurs distances Ao, Au, &c. à la droite AT, les produits seront la somme de tous les $c\sqrt{4R^2 - c^2}$, car nous avons vû dans l'endroit cité que les distances Ao, Au, &c. étoient égales aux cordes arithmetiquement proportionnelles, & par conséquent à tous les c. Or tous les $c\sqrt{4R^2 - c^2}$ sont les momens des ordonnées au quart de cercle aAE; donc si nous multiplions ces momens encore par les distances Ao, Au, &c. les produits ou la somme de tous les $c^2\sqrt{4R^2 - c^2}$ sera le moment de l'onglet fait sur le quart de cercle ayant sa pointe en AT. Mais le moment de la figure Aqa par rapport à AT est égal à ses Elemens multipliés par les distances Ao, Au, &c. c'est-à-dire à tous les $\frac{c^2\sqrt{4R^2 - c^2}}{2R}$, donc ce moment est égal au moment de l'onglet fait sur le demi-cercle divisé par 2R. Or si le rayon du quart de cercle aAE étoit égal au rayon du cercle générateur de la figure, le moment par rapport à AT de son onglet ayant sa pointe en AT seroit $\frac{1}{32}PR^4$, donc puisque le rayon étant double, la base est quadruple, & le moment seize fois plus grand; il s'ensuit que le moment de l'onglet fait sur le quart de cercle aAE est $\frac{16}{32}PR^3$. Ainsi divisant ce moment par 2R le quotient $\frac{16PR^3}{64R} = \frac{1}{4}PR^2$ sera le moment de la figure Aqa par rapport à AT; divisant donc ce moment par la grandeur $\frac{4}{3}R^2$ le quotient $\frac{3}{16}P$ sera la distance du centre de gravité de l'onglet à la droite TA.

On verra dans le Chapitre suivant d'autres exemples de ce que nous venons de dire dans cette remarque.



CHAPITRE XVI.

Du centre de gravité de la Spirale.

DEFINITION.

269. SI l'on conçoit que tandis qu'un rayon AC (*Fig.* 185.) se mouvant d'un mouvement uniforme autour du point fixe A, décrit la circonference CDEFC, un point mis en A parcoure aussi d'un mouvement uniforme le rayon, & parvienne en C lorsque le rayon AC acheve de décrire sa circonference, la courbe AQSC que ce point décrira par son mouvement s'appelle *Spirale* d'Archimede pour la distinguer des autres Spirales dont nous parlerons plus bas. Le point A en est le centre, la ligne AC s'appelle ligne de premiere revolution; & si l'on conçoit que cette ligne après la premiere revolution devienne double d'elle même, & que recommençant à se mouvoir elle décrive la circonference BGHI, tandis que le point parvenu en C continuant à se mouvoir de la même façon décrit la courbe PNLB, la courbe entiere AQSPNLB s'appellera seconde Spirale, la droite AB ligne de seconde revolution, & le cercle BGHI cercle de seconde revolution; & il est visible qu'en triplant, quadruplant, &c. la ligne AC on aura une troisiéme Spirale, une quatriéme, &c. à l'infini.

Pour décrire cette courbe, il faut diviser la circonference CDEF du cercle de la premiere revolution en plusieurs parties égales, & des points de division tirer des droites au centre, ensuite diviser le rayon AC en un même nombre de parties égales, & porter une de ces parties sur le rayon A*a* de A en X, deux sur le rayon A*b* de A en Z, trois sur le rayon AD de A en V & ainsi de suite, après quoi on fera passer par les points A, X, Z, V, &c. une courbe qui sera la premiere Spirale, & pour avoir la seconde, on divisera la partie CB en un même nombre de parties égales, & on continuera de la même façon.

Trouver la grandeur de l'espace compris par la ligne Spirale.

Concevez que la circonference du cercle générateur CDEF

ſoit diviſée en une infinité de parties ; & qu'ayant mené de chaque point de diviſion des rayons au centre A, on décrive de ce même centre des petits arcs qui paſſent par les points X, Z, V, &c. où les rayons coupent la ſpirale. Ces petits arcs formeront avec les rayons des petits ſecteurs de cercle ſemblables entr'eux à cauſe de l'égalité de leurs angles, & comme leurs rayons ſont arithmétiquement proportionnels, ces ſecteurs étant entr'eux comme les quarrés de leurs rayons, ils ſeront comme les quarrés o. 1. 4. 9, &c. des nombres naturels o. 1. 2. 3, &c. donc leur ſomme ſera au dernier multiplié par le nombre des termes comme 1. à 3. Mais les arcs des ſecteurs étant infiniment proche de la ligne ſpirale, la ſomme des ſecteurs compris dans la premiere ſpirale ſera égale à l'eſpace compris par cette ſpirale, & le plus grand ſecteur *nr*A ne ſera pas différent du ſecteur *h*AC du cercle, à cauſe de l'infinie proximité de leurs arcs. Donc puiſque ce ſecteur *h*AC multiplié par le nombre des termes qui eſt la circonférence du cercle générateur, eſt égal au cercle, & qu'au contraire la ſomme des ſecteurs n'eſt à ce produit que comme 1 à 3, il s'enſuit que l'eſpace ARSCA renfermé dans la premiere ſpirale vaut $\frac{1}{3}$ du cercle générateur.

Que ſi on demandoit la grandeur d'une portion quelconque AVR de cette premiere ſpirale, on décriroit du centre A, intervalle AR un arc de cercle R*xt* compris entre l'extremité R de la ſpirale & la ligne AC de premiere révolution, & l'on trouveroit que la portion AVR de la ſpirale ſeroit égale au tiers de la portion RXT du cercle décrit par le rayon AR. Car les ſecteurs compris dans la portion AVR ſeroient toujours au plus grand multiplié par le nombre des termes comme 1 à 3. Or le plus grand ſecteur eſt égal de part & d'autre, de même que le nombre des termes ; donc la portion RVA ſeroit à la portion R*xt*, comme 1 à 3. Et delà il ſeroit facile de trouver le rapport de cette portion à la ſpirale entiere ; car ſuppoſant que le rayon RA ſoit comme dans le cas preſent la moitié du rayon AC du cercle generateur, le cercle du rayon RA ne ſera donc que le quart du cercle générateur, à cauſe que les cercles ſont entr'eux comme les quarrés de leurs rayons ; donc le demi-cercle R*xt* n'en ſera que la huitiéme partie, & la portion RVA étant le tiers de cette partie, ſera par conſéquent la vingt-quatriéme du cercle générateur, mais la ſpirale entiere eſt le tiers de cercle ; donc la portion RVA eſt à la ſpirale entiere, comme $\frac{1}{24}$ à $\frac{1}{3}$,

ou comme $\frac{1}{24}$ à $\frac{8}{24}$, c'est-à-dire comme 1 à 8, ou comme le cube du rayon AR qui termine la portion AZR au cube du rayon AC de la premiere ſpirale, & ainſi des autres.

Maintenant pour trouver les grandeurs des autres ſpirales, prolongeons les rayons que nous avons menés des diviſions du cercle générateur au centre juſqu'à ce qu'ils coupent les circonférences des cercles, de ſeconde, troiſiéme, quatriéme révolution, &c. & du centre A décrivons des petits arcs qui paſſent par tous les points où ces rayons coupent la ſpirale ; il eſt viſible que les ſecteurs que ces arcs forment avec les rayons depuis l'origine A juſqu'à l'extremité B de la ſeconde ſpirale ſont toujours comme les quarrés 0. 1. 4. 9. 16, &c. à cauſe que leurs rayons ſont toujours en proportion arithmétique & leurs angles égaux ; donc la ſomme de ces ſecteurs eſt au plus grand 3A4 ou 5AB (l'un & l'autre de ces ſecteurs étant égaux à cauſe de l'infinie proximité de leurs arcs) multiplié par le nombre des termes, comme 1 eſt à 3 ; ainſi ſi le nombre des termes étoit égal au nombre des arcs de la circonférence BGHI, la ſomme des ſecteurs ſeroit le tiers de ce cercle, à cauſe que le cercle BGHI eſt égal à ſon ſecteur 5AB multiplié par le nombre des termes ou par le nombre d'arcs égaux que ſa circonférence contient. Mais le nombre des termes des ſecteurs eſt double, car leur ſomme n'eſt formée qu'après la ſeconde révolution, c'eſt-à-dire après que la ligne AB a fait deux fois ſa révolution autour du centre A ; donc la ſomme des ſecteurs eſt égale à deux fois le tiers du ſecond cercle, ou au tiers du double du ſecond cercle.

De même la ſomme des ſecteurs depuis le centre A juſqu'au cercle de la troiſiéme révolution ſera au plus grand multiplié par le nombre des termes comme 1 eſt à 3 ; donc ſi le nombre des termes étoit égal au nombre des arcs de la troiſiéme circonférence, la ſomme des ſecteurs ſeroit égal au tiers du troiſiéme cercle, à cauſe que ce cercle eſt égal à ſon ſecteur multiplié par le nombre de ſes arcs. Mais le nombre des termes des ſecteurs eſt triple, parce que leur ſomme n'eſt formée qu'après que la ligne de révolution a décrit trois révolutions ; donc la ſomme des ſecteurs eſt égale à trois fois le tiers du troiſiéme cercle, ou au tiers du triple du troiſiéme cercle.

Et on démontrera de la même façon que la ſomme des ſecteurs depuis l'origine A juſqu'au cercle de la quatriéme révolution,

eſt égale au tiers du quadruple de ce cercle, & ainſi de ſuite.

Or le rayon du ſecond cercle étant double du premier, ce ſecond cercle eſt donc quatre fois plus grand que le premier; & par conſéquent le double eſt huit fois plus grand, donc le premier cercle eſt au double du ſecond, comme 1 à 8, & la ſomme des ſecteurs depuis le centre A juſqu'à la circonférence du premier cercle, eſt à la ſomme des ſecteurs depuis A juſqu'à la circonférence du ſecond, comme $\frac{1}{3}$ de 1 eſt à $\frac{1}{3}$ de 8. De même, le rayon du troiſiéme cercle étant triple du rayon du premier, le premier cercle ſera au troiſiéme comme 1 à 9, & au triple comme 1 à 27; donc la ſomme des ſecteurs depuis le centre A juſqu'à la circonférence du premier cercle, eſt à la ſomme des ſecteurs depuis le même centre A juſqu'à la troiſiéme circonférence comme $\frac{1}{3}$ de 1 eſt à $\frac{1}{3}$ de 27; & on trouvera de même que la ſomme des ſecteurs depuis le centre A juſqu'à la premiere circonférence eſt à la ſomme des ſecteurs depuis le même A juſqu'à la quatriéme comme $\frac{1}{3}$ de 1 à $\frac{1}{3}$ de 64, & ainſi de ſuite. Donc les ſommes des ſecteurs depuis le centre A juſqu'à la premiere circonférence, juſqu'à la ſeconde, juſqu'à la troiſiéme, &c. ſont entr'elles comme $\frac{1}{3}1$, $\frac{1}{3}8$, $\frac{1}{3}27$, $\frac{1}{3}64$, &c. ou comme les cubes 1. 8. 27. 64, &c. des nombres naturels 1. 2. 3. 4, &c.

Mais il faut obſerver que quoique la ſomme des ſecteurs depuis le centre A juſqu'à la premiere circonférence ſoit égale à la premiere ſpirale, cependant la ſomme des ſecteurs depuis le centre A juſqu'à la ſeconde circonférence eſt plus grande que la ſeconde ſpirale; de même la ſomme des ſecteurs depuis le centre A juſqu'à la troiſiéme circonférence eſt plus grande que la troiſiéme ſpirale, & ainſi de ſuite; & pour déterminer cet excès faiſons attention que les ſecteurs qui ſe forment par les petits arcs inſcrits à la ſpirale entre la premiere circonférence & la ſeconde, comprennent les ſecteurs décrits entre le centre & la premiere circonférence, & par conſéquent ſi on veut avoir l'eſpace de la ſeconde ſpirale, il faut ôter de la ſomme des ſecteurs depuis A juſqu'à la ſeconde circonférence celle des ſecteurs depuis A juſqu'à la premiere, parce que cette ſeconde ſomme eſt compriſe deux fois dans la premiere. De même la ſomme des ſecteurs depuis A juſqu'à la troiſiéme circonférence contient deux fois la ſomme des ſecteurs de la ſeconde, & que

par conséquent si on veut avoir la troisiéme spirale, il faut retrancher de la somme des secteurs depuis A jusqu'à la troisiéme circonférence, celle des secteurs depuis A jusqu'à la seconde, & ainsi de suite. Donc si de chacune des sommes 1. 8. 27. 64. 125, &c. nous retranchons celle qui la precede, les restes 1. 7. 19. 37. 61, &c. seront les rapports des spirales, c'est-à-dire, les spirales seront entr'elles comme les différences des cubes 1. 8. 27. 64, &c. des nombres naturels.

D'où il suit que les différences des spirales ou les espaces compris entre le centre & la premiere circonférence, entre la premiere & la seconde, entre la seconde & la troisiéme, &c. seront comme 1. 6. 12. 18. 24, &c. car si de la seconde spirale 7 on ôte la premiere 1, le reste est 6; si de la troisiéme 19 on ôte la seconde 7, le reste sera 12, & ainsi des autres.

Si l'on coupe les spirales par une ligne droite HA, les sommes des secteurs depuis le point A jusqu'au point R où cette droite coupe la premiere spirale, depuis le point A jusqu'au point N où cette droite coupe la seconde spirale, depuis le point A jusqu'au point où elle coupe la troisiéme, & ainsi de suite: ces sommes, dis-je, seront entr'elles comme les cubes des parties AR, AN, &c. de cette droite comprises entre le point A & la premiere spirale, entre le point A & la seconde, &c. Pour rendre ceci bien intelligible, du centre A & des intervalles AR, AN, décrivons des arcs Rxt, N76, jusqu'à la ligne AB de révolution, & supposons que ces arcs soient des demi-cercles, la somme des secteurs depuis A jusqu'au point R sera comme nous avons vû ci-dessus le tiers du demi-cercle Rxt, & le $\frac{1}{24}$ du cercle generateur CDEF. Or quand la somme des secteurs est parvenue de A en N, le rayon A6 a décrit une fois sa circonférence, plus la moitié 67N; ainsi la somme des secteurs de A en N est $\frac{1}{3}$ des trois moitiés du cercle du rayon A6. Or le rayon A6 ou AN étant égal aux $\frac{3}{2}$ du rayon AC ou AE du cercle générateur, le cercle du rayon A6 sera donc égal à $\frac{9}{4}$ du cercle générateur, & par conséquent les $\frac{3}{2}$ du cercle du rayon A6 seront égales à $\frac{3}{2}$ de $\frac{9}{4}$, ou à $\frac{27}{8}$ du cercle generateur, & la somme des secteurs depuis le centre A jusqu'en N sera $\frac{1}{3}$ de $\frac{27}{8}$, ou $\frac{27}{24}$ du cercle generateur; donc la somme des secteurs de A en R, sera à la somme des secteurs de A en N, comme $\frac{1}{24}$ à $\frac{27}{24}$, ou comme 1 à 27, c'est-à-dire comme le cube de 1 au cube de 3, mais les rayons AR, AN sont entr'eux comme 1 à 3. Donc les

ſommes des ſecteurs ſont entr'elles comme les cubes des rayons AR, AN des cercles qui paſſent par les points R, N, ou la droite HN coupe la ſpirale.

Mais comme la ſomme des ſecteurs de A en N contient deux fois la ſomme des ſecteurs de A en R pour la même raiſon que nous avons dite ci-deſſus, ſi l'on veut ſçavoir le rapport de la premiere ſpirale imparfaite AR à la ſeconde ſpirale imparfaite AN, il eſt viſible qu'il faut retrancher la petite de la grande, & que par conſéquent elles ſeront entr'elles comme $\frac{1}{24}$ du cercle generateur à $\frac{26}{24}$ du même cercle, ou comme 1 à 26, ou enfin comme les différences des cubes des rayons.

Ce que nous venons de dire des ſommes des ſecteurs eſt encore vrai par rapport aux ſommes des ſecteurs coupées par différentes lignes droites. Par exemple, on prouvera de la même façon que la ſomme des ſecteurs compris depuis A juſqu'au point R de la premiere ſpirale eſt à la ſomme des ſecteurs compris depuis A juſqu'au point P de la ſeconde ſpirale comme le cube du rayon AR au cube du rayon AP, & ainſi des autres.

La regle generale pour les révolutions entieres eſt que les ſommes des ſecteurs ſont entr'elles comme les cubes des rayons des cercles de révolution, ou comme 1. 8. 27, &c. que les ſpirales ſont entr'elles comme les différences des cubes de leurs rayons, ou comme 1. 7. 19, &c. & enfin que les differences des ſpirales, c'eſt-à-dire les eſpaces compris entre le centre & la premiere circonférence, entre la premiere circonférence & la ſeconde, entre la ſeconde & la troiſiéme, &c. ſont entr'eux comme les différences des différences des cubes des rayons, ou comme 1. 6. 12. 18, &c.

Et pour les révolutions incompletes, ſoit qu'elles ſe terminent à une même ligne droite qui paſſe par le centre, ou qu'elles ſoient terminées par différentes lignes droites, la regle eſt que les ſommes des ſecteurs ſont entr'elles comme les cubes des rayons qui les terminent, que les ſpirales imparfaites terminées par ces rayons ſont entr'elles comme les différences des cubes de ces mêmes rayons, & qu'enfin les différences de ces ſpirales ſont entr'elles comme les différences des différences de ces rayons. Nous allons paſſer préſentement aux centres de gravité des ſpirales, mais auparavant nous ferons quelques remarques néceſſaires pour éclaircir mieux ce que nous en dirons.

REMARQUES.

270. *Les Secteurs dont les angles & les rayons sont différens, sont entr'eux en raison composée de leurs angles & des quarrés de leurs rayons.* Les Secteurs EOH, COB (*Fig.* 186.) ayant même angle, sont entr'eux comme les quarrés de leurs rayons EO, CO; mais les secteurs COB, AOB, ayant même rayon, sont entr'eux comme leurs angles COB, AOB, comme on le démontre dans les Elemens, & le secteur EOH est au secteur AOB en raison composée du secteur EOH au secteur COB, & du secteur COB au secteur ACB; donc le secteur EOH est au secteur AOB en raison composée des quarrés des rayons EO, CO, & des angles COB, AOB.

271. Si l'on divise la circonférence d'un cercle ADGL (*Fig.* 187.) en plusieurs parties égales, les arcs AB, AC, AD, &c. seront arithmétiquement proportionnels, & les sinus droits de ces arcs moindres ou plus grands que le quart de cercle seront les perpendiculaires BP, CQ, &c. menées de l'extremité de ces arcs sur le diametre AG. D'où il suit que les sinus des arcs du quart de cercle vont en augmentant depuis A jusqu'au centre O, & que ceux des arcs plus grands que le quart du cercle vont en diminuant depuis le centre O jusqu'à l'autre extremité G du diametre, & que par conséquent le sinus de la demi-circonférence ADG est zero. Or je dis que si l'on prend des arcs plus grands que la demi-circonférence, les sinus droits de ces arcs seront encore les perpendiculaires menées de leurs extremités sur le diametre; par exemple, le sinus de l'arc ADGH sera la droite SH; car de même que l'on dit que la droite SH est non-seulement le sinus droit de l'arc GH, mais qu'il est encore le sinus droit de l'arc AMH qui est le complement de l'arc GH à la demi-circonférence. De même aussi il faut dire que le sinus SH est non-seulement le sinus droit de l'arc AH, mais qu'il est encore de sinus de l'arc ADGH qui est le complement de l'arc AH à la circonférence entiere. De même, le sinus de l'arc ADGLB plus grand que la circonférence entiere est la droite BP, parce que cette droite est le sinus de l'arc BG qui est le complement de l'arc ADGLB a trois demi-circonférences; le sinus de l'arc ADGLADGH plus grand que trois demi-circonférences est la droite SH à cause que SH est le sinus de l'arc

HS qui est le complement de l'arc ADGLADCH a quatre demi-circonférences, & ainsi de suite.

Or il faut remarquer que les sinus des arcs arithmétiquement proportionnels jusqu'à la demi-circonférence sont dans le demi-cercle ADG, ceux des arcs arithmétiquement proportionnels depuis la demi-circonférence jusqu'à la circonférence entiere, sont dans l'autre demi-cercle ALG, ceux des arcs depuis la circonférence entiere jusqu'aux trois moitiés de la circonférence sont de nouveau dans le demi-cercle ADG, ceux des arcs depuis les trois moitiés de la circonférence jusqu'au double de la circonférence ALG sont dans le demi-cercle ALG, & ainsi de suite; de façon que si nous prenons la figure des sinus droits répetée plusieurs fois sur une même ligne AD (*Fig.* 189.) les sinus compris depuis A jusqu'en B seront les sinus des arcs arithmétiquement proportionnels jusqu'à la demi-circonférence, les sinus compris depuis B jusqu'en C seront les sinus des arcs arithmétiquement proportionnels depuis la demi-circonférence jusqu'à la circonférence entiere, & ceux-ci seront mis du côté opposé aux précédens. Les sinus depuis C jusqu'en D seront les sinus des arcs depuis la circonférence entiere jusqu'à trois moitiés de circonférence, & ceux-là seront mis du côté de ceux qui sont compris de A en B, & ainsi de suite alternativement. De plus, comme la droite AB est supposée égale à la demi-circonférence, la droite AC sera égale à la circonférence entiere, la droite AD aux trois moitiés, & ainsi de suite. Mais pour distinguer dans le calcul les sinus qui sont d'un côté d'avec les sinus qui sont de l'autre, nous marquerons du signe + ceux du premier demi-cercle, c'est-à-dire les sinus compris de A en B, ceux du troisiéme demi-cercle, ou les sinus compris de C en D, & ainsi de suite alternativement, & le signe — sera pour le sinus du second demi-cercle, c'est-à-dire les sinus compris de B en C pour ceux du quatriéme, du sixiéme, & ainsi de suite alternativement; on verra bientôt l'usage de ceci.

272. Une circonférence ADGL (*Fig.* 187.) étant divisée en plusieurs parties égales, & les perpendiculaires ou sinus droits AP, CQ, &c. étant menés, les droites AP, AQ, &c. jusqu'au rayon AO seront les sinus verses des arcs arithmétiquement proportionnels AB, AC, &c. du quart de cercle jusqu'au plus grand AD, les droites PG, QR, &c. jusqu'au rayon OG seront les sinus verses des complemens de ces arcs à la demi-circonfé-

rence ; & si de chacun de ces sinus verses, on ôte le rayon OG, les droites PO, QO, &c. qui vont en diminuant jusqu'au centre O seront les sinus des arcs BD, CD, &c. qui sont les complemens au quart de cercle des arcs arithmétiquement proportionnels du quart de cercle ; tout cela est évident à ceux qui connoissent les Elemens de Geométrie. Or je dis que les sinus droits PO, QO, &c. des complemens au quart de cercle des arcs arithmétiquement proportionnels du quart de cercle sont égaux chacun à chacun aux sinus droits ER, FS de l'autre quart de cercle DOG à commencer par les plus grands. Car l'arc EG dont le sinus ER est le sinus droit, est égal à l'arc BD, dont la droite PO est le sinus droit, à cause que l'arc DE qui manque à l'arc EG pour être égal au quart de la circonférence, est égal à l'arc BA qui manque à l'arc DB pour être aussi égal au quart de la circonférence ; donc le sinus droit ER de l'arc EG, est égal au sinus droit PO de l'arc DB, les arcs égaux ayant les sinus égaux ; & on prouvera de même que le sinus FS de l'arc FG est égal au sinus QO de l'arc DC, & ainsi des autres. Donc la somme des sinus des complemens au quart de cercle des arcs du quart de cercle arithmétiquement proportionnels est égale à la figure EFB (*Fig.* 189.) qui represente les sinus droits de l'autre quart de cercle.

Maintenant si nous prenons les arcs arithmétiquement proportionnels depuis le quart de circonférence (*Fig.* 187.) jusqu'à la demi-circonférence, c'est-à-dire les arcs AD, AE, AF, &c. & qu'au lieu de prendre les sinus verses OG, RG, SG, &c. de leurs complemens à la demi-circonférence, nous prenions les sinus OR, OS, &c. jusqu'au dernier OG, des excès DE, DF, &c. de ces arcs sur le quart de cercle, il est visible que ces sinus iront en augmentant, & qu'ils seront égaux chacun à chacun aux sinus droits du premier quart de cercle à commencer depuis A ; car par exemple, l'arc DE étant égal à l'arc AB, le sinus droit OR de l'arc DE doit être égal au sinus droit BP de l'arc BA, & ainsi des autres. Ainsi la portion BGH (*Fig.* 189.) sera la somme des sinus OR, OS (*Fig.* 187.) parce qu'elle est égale à la somme des sinus BP, CQ, &c. du premier quart de cercle, & cette portion BHG (*Fig.* 189.) sera mise du côté opposé à la portion EFB, parce que les sinus droits des complemens au quart de cercle des arcs du quart de cercle, ou les sinus PO, QO, &c. (*Fig.* 187.) sont du côté de A par rapport

au diametre DL, au lieu que les ſinus droits des excès ſur le quart de circonférence des arcs arithmétiquement proportionnels depuis le quart de circonférence juſqu'à la demi-circonférence, c'eſt-à-dire les ſinus OR, OS, &c. ſont placés du côté oppoſé par rapport au même diamétre DL.

Que ſi nous prenons les arcs arithmétiquement proportionnels depuis la demi-circonférence juſqu'aux trois quarts de circonférence, il eſt évident que les droites SH, RI, &c. (*Fig.* 187.) étant leurs ſinus droits, les droites SO, RO, &c. qui vont en diminuant ſeront les ſinus droits de leurs complemens aux trois quarts de circonférence, & que ces ſinus ſeront égaux chacun à chacun aux ſinus droits QM, PN, &c. du quatriéme quart de circonférence; donc la ſomme des ſinus SO, RO, &c. ſera égale à la portion GHC (*Fig.* 189.) & cette portion ſera miſe du même côté que la précédente BHG, parce que les ſinus SO, RO, &c. (*Fig.* 187.) ſont placés par rapport à DL du même côté que les ſinus OR, OS, &c. des arcs DE, DF, &c.

De même, ſi nous prenons les arcs arithmétiquement proportionnels depuis les trois quarts de circonférence entiere, les droites OQ, OP, &c. qui vont en augmentant ſeront les ſinus droits des excès ML, NL, &c. de ces arcs ſur les trois quarts de circonférence, & ces ſinus ſeront égaux chacun à chacun aux ſinus SH, RI, &c. du quart précédent; ainſi leur ſomme ſera égale à la portion CIL (*Fig.* 189.) & cette portion ſera miſe de l'autre côté, parce que les ſinus OQ, OP, &c. ſont du côté de A par rapport au diametre DL, & continuant de la même façon, on trouvera que la portion LID (*Fig.* 189.) eſt égale aux ſinus droits des complemens à cinq quarts de circonférence des arcs depuis la circonférence entiere juſqu'à cinq quarts de circonférence, & que cette partie ſera encore du même côté que la précédente, à cauſe que les ſinus PQ, QO, &c. ſont du côté de A, & ainſi de ſuite, en prenant alternativement les ſinus droits des complemens au quart ſupérieur, & les ſinus droits des excès à ce quart, & mettant toujours deux portions d'un même côté. Pour diſtinguer dans le calcul les portions qui ſont d'un côté d'avec celles qui ſont de l'autre, nous marquerons du ſigne + les ſinus qui ſont dans la portion FEB, & dans toutes celles qui ſont du même côté par rapport à la ligne AD, & le ſigne — ſera pour les ſinus des portions qui ſont de l'autre côté.

273. Dans la figure AD*ta* (*Fig.* 100.) les Elemens X*z*, B*b*, &c. de la portion D*da*A sont égaux chacun à chacun aux sinus verses O*a*, V*a*, &c. des complemens à la demi-circonférence des arcs arithmétiquement proportionnels AX, AB, &c. du quart de cercle ADC ; ôtant donc de ces Elemens les portions 3*z*, *mb*, &c. égales chacune au rayon du cercle, les restes X3, B*m*, &c. seront égaux chacun à chacun aux sinus droits OC, VC, &c. des complemens au quart de cercle des mêmes arcs arithmétiquement proportionnels du quart de cercle ; donc la somme de ces droites sera égale à la somme des sinus droits BV, F*f*, &c. de l'autre quart de cercle ; & par conséquent à la portion *dct* de la figure des sinus ou à la portion FEB (*Fig.* 189.) ce qu'il est bon d'observer.

274. Plusieurs grandeurs o. *m*. *n*. *p*. *q*. étant données, dont la premiere est zero, & les autres sont entr'elles en tel rapport que l'on voudra, si l'on demande de multiplier les termes de cette suite par ceux des nombres o. 1. 2. 3. 4. arithmétiquement proportionnels, il est évident que le produit sera $o + 1m + 2n + 3p + 4q$; & si au lieu de multiplier ces termes par o. 1. 2. 3. 4. on les multiplie chacun par le nombre des termes qui est ici 5. Il est encore clair que le produit sera $o5 + 5m + 5n + 5p + 5q$, or ce produit sera plus grand que le précédent, & pour déterminer ce qu'il en faut retrancher pour le rendre égal, j'observe qu'ayant multiplié le premier terme par 5, je l'ai pris cinq fois plus qu'il ne falloit, puisqu'il ne devoit être multiplié que par zero. Ainsi j'écris cinq zeros les uns au-dessous des autres, comme on voit ici. J'observe ensuite qu'ayant multiplié le second terme par 5, au lieu qu'il ne devoit être multiplié que par un, je l'ai pris quatre fois plus qu'il ne falloit ; j'écris donc quatre *m* à côté des zeros les uns sous les autres.

$$\begin{array}{lllll} o. & m. & n. & p. & q. \\ o. & 1. & 2. & 3. & 4. \\ \hline o + 1m & + 2n & + 3p & + 4q. & \\ o. & m. & n. & p. & q. \\ 5. & & & & \\ \hline o + 5m & + 5n & + 5p & + 5q. & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} o + m + n + p + q \\ o + m + n + p \\ o + m + n \\ o + m \\ o \end{array}$$

Par la même raison ayant pris *n* trois fois plus qu'il ne falloit, j'écris trois *n*, à côté des *m* les uns sous les autres, ensuite

deux p, parce que j'ai pris p deux fois plus qu'il ne falloit, & enfin un q, parce qu'il a été pris une fois plus qu'il ne falloit.

Ces grandeurs ainsi écrites forment un triangle dont les rangs paralleles à commencer par en bas sont le premier terme zero, la somme $0+m$ des deux premiers termes, la somme $0+m+n$ des trois premieres, la somme $0+m+n+p$ des quatre premiers, & enfin la somme $0+m+n+p+q$ de tous les termes. Appellant donc ces sommes *sommes croissantes des termes*, la regle sera que *si au lieu de multiplier les grandeurs proposées par les termes de la progression proposée* 0. 1. 2. 3. 4. *on les multiplie par le nombre des termes, il faudra retrancher du produit les sommes croissantes des grandeurs.*

Cette maniere d'opérer peut être utile en bien d'occasions, ainsi qu'on va voir dans les nombres suivans où nous allons faire l'application de ces remarques.

275. *Si l'on coupe la spirale* (Fig. 185.) *par une ligne quelconque* PA *qui passe par le centre* A, *la somme des secteurs compris dans la partie* AXV *de la premiere spirale coupée par cette droite, est à la premiere spirale entiere comme le cube de l'arc* D*b*C *du cercle générateur coupé par cette droite est au cube de sa circonférence.* Car la somme des secteurs est à la spirale entiere comme le cube du rayon AV est au cube du rayon AC, ou comme le cube de l'arc V9 au cube de l'arc DC, à cause que les arcs des secteurs semblables AV9, ADC sont entr'eux comme leurs rayons AV, AD; mais l'arc V9 est à l'arc DC, comme l'arc DC à sa circonférence; car supposé que l'arc V9 soit le quart de sa circonférence, son rayon AV ne sera que le quart du rayon AC par la formation de la spirale; ainsi l'arc DC sera quadruple de V9; & comme ce même arc ne sera aussi que le quart de sa circonférence, il s'ensuit que l'arc DC sera à sa circonférence comme le rayon AV au rayon AC. Puis donc qu'on aura DC, P :: AV, AC, on aura aussi $\overline{DC}^3$, P^3 :: $\overline{AV}^3$, $\overline{AC}^3$. La lettre P signifie la circonférence du cercle générateur : or ceci est vrai non-seulement pour les sommes des secteurs qui sont partie de la premiere spirale, mais encore pour les sommes des secteurs plus grandes que la premiere spirale. Par exemple, on prouvera de la même façon que la somme des secteurs depuis le centre A jusqu'au point N de la seconde spirale est à la premiere spirale comme le cube de l'arc correspondant EDC du

cercle de la premiere ſpirale eſt au cube de ſa circonférence, à cauſe que la ſomme des ſecteurs depuis A en N eſt à la premiere ſpirale comme le cube de AN au cube de AC, &c.

Trouver le centre de gravité des Spirales.

276. Nous appellerons P la circonférence du cercle générateur (*Fig.* 185.) R ſon rayon, *r* le rayon des circonférences plus grandes ou moindres que la circonférence du cercle générateur; *a* les arcs arithmétiquement proportionnels C*a*, C*b*, CD, &c. de cette circonférence, T chaque arc infiniment petit de cette circonférence, *t* l'arc infiniment petit correſpondant à T dans les circonférences moindres ou plus grandes, *s* les ſinus droits des arcs arithmétiquement proportionnels du cercle générateur, *u* leurs ſinus verſes, & *x* les ſinus de leurs complemens au quart de circonférence, ou de leurs excès ſur ce quart comme il a été dit ci-deſſus. Celà poſé,

Le cercle générateur ſera $\frac{1}{2}$RP, la premiere ſpirale ſera $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$RP $= \frac{1}{6}$RP, & toute portion plus grande ou moindre que la premiere ſpirale, comme par exemple la portion AXZV étant à cette premiere ſpirale comme le cube a^3 de l'arc correſpondant AD du cercle générateur au cube P^3 de ſa circonférence ſera par conſéquent $\frac{a^3R}{6P^2}$, ce qu'on trouvera en faiſant cette analogie P^3, a^3 :: $\frac{1}{6}$RP, $\frac{a^3R}{6P^2}$, c'eſt-à-dire le cube de la circonférence du cercle générateur eſt au cube de l'arc correſpondant à la portion, comme la premiere ſpirale eſt à la portion.

Or cette expreſſion $\frac{a^3R}{6P^2}$ nous ſervira à trouver la valeur de tel nombre de ſecteurs que l'on voudra; car par exemple, ſi on veut ſçavoir quelle eſt la ſomme des ſecteurs après la ſeconde révolution, on mettra dans $\frac{a^3R}{6P^2}$ la valeur de *a*, & l'on aura la ſomme cherchée, mais *a* dans cette ſuppoſition ſignifie 2P ou deux fois la circonférence du cercle générateur, parce que les *a* étant les arcs arithmétiquement proportionnels, le plus grand de ces arcs après la ſeconde révolution eſt double de cette circonférence, le rayon ayant fait deux révolutions autour de ſon centre. Mettant donc $8P^3$ au lieu de a^3, on a $\frac{8P^3R}{6P^2}$, ou $\frac{8}{6}$RP qui ſera la ſomme des ſecteurs après la ſeconde révolution; on

trouvera de même que les sommes des secteurs après la troisiéme, la quatriéme révolution, &c. seront $\frac{27}{6}$PR, $\frac{64}{6}$PR, &c.

De même, si on veut la somme des secteurs qui répond par exemple au tiers de la seconde révolution, alors a sera $\frac{4}{3}$P, parce que le rayon du premier cercle aura décrit quatre tiers de la premiere révolution, & qu'ainsi le plus grand arc sera les $\frac{4}{3}$ de sa circonférence; donc $a^3 = \frac{64}{9}P^3$, & mettant cette valeur dans $\frac{a^3R}{6P^2}$, on aura $\frac{64P^3R}{54P^2}$, ou $\frac{64}{54}$PR qui sera la somme des secteurs cherchée, & ainsi des autres.

Presentement pour trouver les centres de gravité, nous chercherons d'abord les momens par rapport à la droite CA, & pour cela nous ferons attention que les petits secteurs inscrits dans la spirale (*Fig.* 190.) étant semblables à cause de l'égalité de leurs angles, sont entr'eux comme les quarrés de leurs rayons, & comme ces rayons sont arithmétiquement proportionnels, de même que les arcs DN, DX, DZ, &c. du cercle générateur, les secteurs sont par conséquent entr'eux comme les a^2. Or ces secteurs pouvant être pris pour des triangles, à cause de l'infinie petitesse de leurs arcs, leurs centres de gravité seront les deux tiers de la ligne droite qui divise leurs angles en deux également, ou leurs deux tiers de leurs rayons, à cause que ces rayons étant infiniment proches, ne different point des droites qui divisent les secteurs en deux également. Prenant donc les deux tiers des rayons, & tirant des points de division des perpendiculaires sur la droite CD, ces perpendiculaires ab, cd, eA, fh, &c. seront les distances des centres de gravité des secteurs à la droite CD; or les angles aAB, cAb, eAb, fAb, &c. étant arithmétiquement proportionnels de même que les rayons aA, cA, eA, fA, &c. les distances ab, cd, eA, fh, &c. qui sont les sinus de ces angles par rapport à ces rayons, seront donc entr'elles en raison composée des sinus des angles arithmétiquement proportionnels ou des sinus des arcs DN, DX, DZ, &c. de la circonférence du cercle générateur, & des rayons aussi arithmétiquement proportionnels qui sont encore comme ces arcs DN, DX, DZ, &c. & par conséquent ils seront entr'eux comme les as; car la raison composée des raisons s, s, a, a, est as, as, mais les momens des secteurs par rapport à CD sont les produits des secteurs par leurs distances. Donc ces momens sont entr'eux comme les a^2 multipliés par les

les as, ou comme les a^3s, ou comme les $a^2s \times a$.

Supposant donc que les droites AN, AP, AF, &c. (*Fig.* 189.) soient égales aux arcs arithmétiquement proportionnels du cercle générateur, en sorte que la partie AB soit égale à la demi-circonférence, la partie AC à la circonférence entiere, la partie AD à trois demi-circonférences, & ainsi de suite, les sinus NM, PO, &c. compris de A en B seront les sinus des arcs arithmétiquement proportionnels de la demi-circonférence, les sinus compris de B en C seront les sinus des arcs arithmétiquement proportionnels depuis la demi-circonférence jusqu'à la circonférence entiere, les sinus compris de C en D seront les sinus des arcs arithmétiquement proportionnels depuis la circonférence entiere jusqu'aux trois moitiés de la circonférence, & ainsi de suite. De plus, tous les a^2s seront tous les sinus MN, PO, &c. multipliés par les quarrés a^2 de leurs distances AN, AP, &c. au point A, c'est-à-dire que tous les a^2s compris par exemple dans la portion AEF, seront le moment par rapport au plan vertical sur AK de l'onglet fait sur cette portion ayant sa pointe en AK, & ainsi de même des autres a^2s.

Prenant donc, pour nous fixer, la portion AEF qui répond au quart de la premiere révolution de la spirale, la somme de tous les a^2s, ou le moment par rapport à AK de l'onglet fait sur la portion AEF ayant sa pointe en AK est $a^2uR - a^2R^2 + 2asR^2 - 2uR^3$ (*N.* 266.) car cette valeur que nous avons trouvée pour la portion dont il s'agissoit dans l'endroit que nous venons de citer est la même pour la portion dont il s'agit présentement, à cause que a signifie toujours le dernier terme de tous les a qui se trouve ici égal à AF; or tous les a^2s doivent être multipliés par leurs a correspondans pour faire tous les $a^2s \times a$ ou les momens des secteurs de la spirale, & ces a correspondans forment la progression arithmétique 0. 1. 2. 3. 4, &c. Donc si je multiplie la somme de tous les a^2s par le nombre des termes de cette progression, ou par le plus grand a que j'appellerai A pour le distinguer des autres, le produit $a^2uRA - a^2R^2A + 2asR^2A - 2uR^3A$ sera plus grand qu'il ne faut, & pour corriger ce défaut, il faudra retrancher de ce produit les sommes croissantes de tous les a^2s (*N.* 275.) c'est-à-dire le moment de l'onglet fait sur ANM, celui de l'onglet fait sur APO, & ainsi de suite jusqu'au moment du dernier onglet fait sur AFE; or la valeur de chacun de ces momens est $a^2uR - a^2R^2 + 2asR^2$

$-2uR^3$, comme on vient de voir; donc ce qu'il faut retrancher du produit précédent est la somme de tous les $a^2uR - a^2R^2 + 2asR^2 - 2uR^3$.

Or tous les a^2u étant les sinus verses des arcs arithmétiquement proportionnels multipliés par les quarrés de ces arcs jusqu'au dernier que j'appellerai A sont égaux au moment par rapport à Aa (*Fig.* 100.) de l'onglet fait sur la portion ABK de la figure des sinus verses, en supposant que AK dans cette figure répond à notre plus grand A ; & par conséquent tous les a^2u valent $\frac{1}{3}A^3R + 2AuR^2 - A^2sR - 2AR^3 + 2sR^3$, donc tous les a^2uR valent $\frac{1}{3}A^3R^2 + 2AuR^3 - A^2sR^2 - 2aR^4 + 2sR^4$.

Tous les a^2 étant les quarrés des arcs arithmétiquement proportionnels valent $\frac{1}{3}A^3$, donc tous les $-A^2R^2$ valent $-\frac{1}{3}A^3R^2$.

Tous les as étant les sinus des arcs arithmétiquement proportionnels multipliés par leurs arcs sont égaux aux momens par rapport à am (*Fig.* 100.) de la portion adc de la figure des sinus droits ; donc ils valent $AuR - AR^2 + sR^2$, car cette valeur peut servir également pour la portion bra de cette figure, que pour la portion adc, à cause que la lettre a varie. Donc tous les $2asR^2$ valent $2AuR^3 - 2AR^4 + 2sR^4$.

Tous les u étant les sinus verses des arcs arithmétiquement proportionnels sont égaux à la portion ABK (*Fig.* 100.) de la figure des sinus verses, en supposant toujours que AK dans cette figure répond à notre dernier a, ainsi tous les u valent $AR - sR$, donc tous les $-2uR^3$ valent $-2AR^4 + 2sR^4$.

Donc tous les $a^2uR - a^2R^2 + 2asR^2 - 2uR^2$ valent $4AuR^3 - A^2sR^2 - 6AR^4 + 6sR^4$; ôtant donc cette valeur du produit ci-dessus $a^2uRA - a^2R^2A + 2asR^2A - 2uR^3A$, ou $A^3uR - A^3R^2 + 2A^2sR^2 - 2AuR^3$, le reste $A^3uR - A^3R^2 + 3A^2sR^2 - 6AuR^3 + 6AR^4 - 6sR^4$, ou $a^3uR - a^3R^2 + 3a^2sR^2 - 6auR^3 + 6aR^4 - 6sR^4$ sera la valeur de tous les a^3s. Ainsi les momens des secteurs seront au moment de leur somme, comme tous les a^3s sont à $a^3uR - a^3R^2 + 3a^2sR^2 - 6auR^3 + 6aR^4 - 6sR^4$, & ceci va nous servir à trouver la veritable valeur des secteurs, & celle de leur somme en cette sorte.

Le petit arc t de chaque secteur est une partie infiniment petite de sa circonférence, de même que l'arc correspondant T de la circonférence du cercle générateur est aussi une partie infiniment petite de cette circonférence. Par exemple, l'arc du

secteur AMP (*Fig.* 190.) est une partie infiniment petite de la circonference de son rayon AM ou AP, de même que l'arc correspondant OS est une partie infiniment petite de la circonference du cercle générateur; ainsi nous avons OS, MP :: CA, MA, mais par la proprieté de la spirale CA est à MA comme la circonference du cercle générateur est à l'arc correspondant OD (*N.* 276.), donc comme la circonference du cercle générateur est à son arc OD, ainsi son infinitiéme partie OS est à l'infinitiéme partie NP. Mettant donc les lettres qui représentent ces quantités, nous aurons P, a :: T, $\frac{aT}{P}$, & par conséquent $t = \frac{aT}{P}$.

La grandeur de chaque secteur est $\frac{1}{2} tr$, c'est-à-dire le produit de l'arc t par la moitié du rayon, & mettant la valeur de $t = \frac{aT}{P}$ nous aurons $\frac{1}{2} tr = \frac{arT}{2P}$; or les distances de leurs centres de gravité au centre A de la spirale sont $\frac{2}{3} r$ & les distances de ces mêmes centres à la droite CD, sont à $\frac{2}{3} r$ comme le sinus de l'arc compris entre $\frac{2}{3} r$ & la ligne de revolution est au rayon $\frac{2}{3} r$, ou comme le sinus de l'arc correspondant de la grande circonference est à son rayon, c'est-à-dire comme s à R; faisant donc R, s :: $\frac{2}{3} r$, $\frac{2sr}{3R}$, le quatriéme terme $\frac{2sr}{3R}$ sera la valeur de chacune des distances ab, cd, ef, &c. & multipliant chaque secteur par sa distance, le produit $\frac{1}{2} tr \times \frac{2sr}{3R}$ ou $\frac{2tsr^2}{6R}$ ou $\frac{tsr^2}{3R}$ sera le moment de chaque secteur par rapport à la droite CD.

Or nous avons trouvé que les momens des secteurs étoient à leur somme comme tous les a^3s, à $a^3u\text{R} - a^3\text{R}^2 + 3a^2s\text{R}^2 - 6au\text{R}^3 + 6a\text{R}^4 - 6s\text{R}^4$; faisant donc cette analogie comme tous les a^3s sont à $a^3u\text{R}$, &c. ainsi tous les $\frac{tsr^2}{3R}$ à un quatriéme terme; ce terme $\frac{a^3utsr^2 - a^3tsr^2\text{R} + 3a^2ts^2r^2\text{R} - 6autsr^2\text{R}^2 + 6atsr^2\text{R}^3 - 6ts^2r^2\text{R}^3}{3a^3s}$ sera le moment de la somme des secteurs du quart de la premiere circulation par rapport à CD; & mettant au lieu de t sa valeur, $\frac{aT}{P}$, nous aurons $\frac{a^4usr^2\text{T} - a^4sr^2\text{RT} + 3a^3s^2r^2\text{RT} - 6a^2usr^2\text{R}^2\text{T} + 6a^2sr^2\text{R}^3\text{T}}{3a^3s\text{P}}$ $\frac{-6as^2r^2\text{R}^3\text{T}}{3a^3s\text{P}} = \frac{a^3ur^2\text{T} - a^3r^2\text{RT} + 3a^2sr^2\text{RT} - 6aur^2\text{R}^2\text{T} + 6ar^2\text{R}^3\text{T}}{3a^2\text{P}}$ $\frac{-6sr^2\text{R}^3\text{T}}{3a^2\text{P}}$; & mettant aussi au lieu de r sa valeur $\frac{aR}{P}$ à cause que par la proprieté de la spirale nous avons r, R :: a, P (*N.* 276.)

çe qui donne $r = \frac{aR}{P}$, & négligeant en même tems la lettre T, parce qu'elle exprime l'Element de la premiere circonference, lequel non plus que l'unité n'augmente point les grandeurs qu'il multiplie, le moment de la fomme des fecteurs du quart de la premiere revolution fera en corrigeant l'expreffion

$$\frac{a^3uR^2 - a^3R^3 + 3a^2sR^3 - 6auR^4 + 6aR^5 - 6sR^5}{3P^3}.$$

Mais chaque fecteur étant $\frac{arT}{2P}$ ou $\frac{ar}{2P}$ en négligeant T, fi nous mettons la valeur de $r = \frac{aR}{P}$ chaque fecteur fera $\frac{a^2R}{2P^2}$; & comme ces fecteurs étant entr'eux dans la raifon des quarrés 0. 1. 4. 9. &c. font au dernier terme multiplié par le nombre des termes comme 1 à 3, la fomme des fecteurs fera $\frac{a^3R}{6P^2}$. Divifant donc le moment que nous venons de trouver par la grandeur, le quotient fera après avoir corrigé l'expreffion $\frac{2a^3uR - 2a^3R^2 + 6a^2sR^2 - 12auR^3}{a^3P}$ $\frac{+12aR^4 - 12sR^4}{a^3P}$ & ce fera la diftance du centre de gravité de la fomme des fecteurs du quart de la premiere revolution, à la droite CD.

Or dans le quart de la premiere revolution on a $a = \frac{1}{4}P$, $s = R$ & $u = R$, mettant donc ces valeurs dans le moment & dans la diftance que nous venons de trouver, nous aurons après avoir corrigé les expreffions $\frac{P^2R^4}{16P^3} - \frac{2R^6}{P^3}$ pour le moment, & $\frac{24P^2R^3}{P^4} - \frac{768R^5}{P^4}$ pour la diftance du centre de gravité à la droite CD.

Il eft évident que les expreffions que nous venons de trouver pour le moment de la fomme des fecteurs du quart de la premiere revolution, & pour la diftance de leur centre commun de gravité à la droite CD, ferviront auffi pour les fommes des fecteurs de telle revolution ou de telle partie de revolution qu'on voudra en mettant à la place des lettres changeantes a, u, s, leurs valeurs correfpondantes, mais il faut obferver à l'égard des s de changer le figne des termes où cette lettre fe trouve lorfqu'il s'agit des fecteurs des demi-revolutions 2e. 4e. 6e. 8e. &c. à caufe que les finus fe trouvent alors de l'autre côté par rapport à la droite CD, ainfi qu'il a été dit ci-deffus, ce que nous allons rendre plus clair dans le détail que nous allons faire où

nous laisserons subsister la lettre a pour mieux voir le rapport des momens des différentes parties.

Dans la premiere circulation entiere on a $s = o$, $u = o$; mettant donc ces valeurs dans les expressions du moment & de la distance, nous aurons $\frac{6aR^5 - a^3R^3}{3P^3}$ pour le moment de la somme des secteurs de la premiere revolution, & $\frac{12aR^4 - 2a^3R^2}{a^3P}$ pour la distance du centre de gravité commun à la droite CD, & qui se reduit à $\frac{12R^4 - 2a^2R^2}{a^2P}$. Or comme le second terme de cette fraction qui est négatif, c'est-à-dire $-2a^2R^2$ est plus grand que le positif $12R^4$, parce que $2a^2$ ou deux fois le quarré de la circonference est plus grand que $12R^2$, ou douze quarrés du rayon, il s'ensuit que cette fraction est une grandeur négative & que par conséquent le centre de gravité de la somme des secteurs est au-delà de la droite CD du côté de K.

Dans la seconde revolution entiere on a encore $s = o$, $u = o$, & par conséquent le moment de la somme des secteurs est encore $\frac{6aR^5 - a^3R^3}{3P^3}$, & la distance du centre de gravité à la droite CD, est aussi $\frac{12R^4 - 2a^2R^2}{a^2P}$ où l'on voit que le centre de gravité se trouvera encore du côté de K. Mais au lieu que la lettre a dans la premiere revolution est égale à P, dans celle-ci elle sera égale à 2P, parce que le rayon R décrit deux fois sa circonference, quand la seconde revolution est faite. Ainsi au lieu de a il faudroit mettre P dans les formules du moment de la distance, pour la somme des secteurs de la premiere revolution, 2P pour la somme des secteurs de la seconde, 3P pour celle de la troisiéme, & ainsi de suite.

Donc le moment de la somme des secteurs de la premiere revolution sera $\frac{6PR^5 - P^3R^3}{3P^3}$ ou $\frac{6R^5 - P^2R^3}{3P^2}$ & la distance du centre de gravité sera $\frac{12R^4 - 2P^2R^2}{P^3}$. Le moment de la somme des secteurs de la seconde revolution sera $\frac{12PR^5 - 8P^3R^3}{3P^3}$ ou $\frac{12R^5 - 8P^2R^3}{3P^2}$ & la distance du centre de gravité $\frac{12R^4 - 8P^2R^2}{4P^3}$, le moment de la somme des secteurs de la troisiéme revolution sera $\frac{18PR^5 - 27P^3R^3}{3P^3}$ ou $\frac{18R^5 - 27P^2R^3}{3P^2}$ & la distance du centre de

gravité sera $\frac{12R^4 - 18P^2R^2}{9P^3}$, & ainsi de suite, ce que l'on peut continuer facilement à l'infini pour peu qu'on fasse d'attention à ces formules. Car par exemple, en considérant la formule des momens on voit que la différence ne consiste que dans les coefficiens des termes du numerateur, c'est-à-dire pour la premiere revolution le coefficient du premier terme est 6; pour la seconde ce coefficient est 12, pour la troisiéme il est 18, & ainsi de suite dans la progression des grandeurs 6. 12. 18. 24. &c. de même le coefficient du second terme pour la premiere revolution est 1, pour la seconde il est 8, pour la troisiéme il est 27, & ainsi de suite dans la progression des cubes, 1. 8. 27. 64. &c. des nombres naturels.

Quant aux formules des distances on trouvera que le coefficient du premier terme du numerateur est toujours 12, que celui du second terme est pour la premiere revolution 2, pour la seconde 8, pour la troisiéme 18, ainsi de suite dans la progression des nombres 2. 8. 18. 32. 50. &c. qui sont les doubles des quarrés 1. 4. 9. 16. 25. &c. des nombres naturels, & que ces quarrés 1. 4. 9. 16. &c. sont les coefficients du dénominateur pour les revolutions 1. 2. 3. &c.

Or comme le moment de la somme des secteurs de la seconde revolution, contient deux fois le moment de la somme des secteurs de la premiere, que le moment de la somme des secteurs de la troisiéme contient deux fois le moment de la somme de la seconde, & ainsi de suite. Si du moment de la somme des secteurs de la seconde, on retranche le moment de la somme de la premiere, qu'ensuite du moment de la somme des secteurs de la troisiéme, on retranche le moment de la somme de la seconde, & ainsi de suite, on aura pour les momens de la premiere, seconde, troisiéme spirale, &c. $\frac{6R^5 - P^2R^3}{3P^2}$, $\frac{6R^5 - 7P^2R^3}{3P^2}$, $\frac{6R^5 - 19P^2R^3}{3P^2}$, & ainsi de suite, où l'on voit que la différence ne consiste que dans les coefficients du second terme du numérateur qui sont comme les différences 1. 7. 19. &c. des cubes 1. 8. 27. &c. des nombres naturels.

Et pour trouver les centres de gravité de ces spirales nous mettrons dans l'expression $\frac{a^3R}{6P^2}$ qui marque tel nombre de secteurs que l'on voudra, P au lieu de a pour la premiere revolution, 2P pour la seconde, 3P pour la troisiéme & ainsi de suite, &

nous aurons pour les ſommes des ſecteurs de la 1ᵉ. 2ᵉ. 3ᵉ. revolution, &c. $\frac{PR}{6}$, $\frac{8PR}{6}$, $\frac{27PR}{6}$, $\frac{64PR}{6}$, & ainſi de ſuite dans la progreſſion des cubes 1. 8. 27. &c. & comme la ſeconde de ces ſommes contient deux fois la premiere, que la troiſiéme contient deux fois la ſeconde, &c. retranchant la premiere de la ſeconde, la ſeconde de la troiſiéme, &c. nous aurons pour les grandeurs de la 1ᵉ. 2ᵉ. 3ᵉ. ſpirale, &c. $\frac{PR}{6}$, $\frac{7PR}{6}$, $\frac{19PR}{6}$, $\frac{37PR}{6}$, &c. dans la progreſſion des différences 1. 7. 19. &c. des cubes 1. 8. 27. &c. diviſant donc le moment de chaque ſpirale par ſa grandeur nous aurons pour les diſtances des centres de gravité de la 1ᵉ. 2ᵉ. 3ᵉ. ſpirale, &c. à la droite CD $\frac{12R^4 - 2P^2R^2}{P^3}$, $\frac{12R^4 - 14P^2R^2}{7P^3}$, $\frac{12R^4 - 38P^2R^2}{19P^3}$, &c. où l'on obſervera que le coefficient du premier terme du numérateur eſt toujours le même, & que celui du ſecond eſt double du coefficient du dénominateur, enfin que les coefficiens des dénominateurs ſont les différences 1. 7. 19. &c. des cubes 1. 8. 27. &c.

Pour trouver les diſtances des centres de gravité dans les revolutions imparfaites, par exemple du premier quart, des deux premiers quarts, des trois premiers, &c. mettons dans l'expreſſion $\frac{a^3R}{6P^2}$ qui marque une ſomme des ſecteurs quelconque $\frac{1}{4}P$ pour la ſomme des ſecteurs du premier quart, $\frac{1}{2}P$ ou $\frac{2}{4}P$ pour celle des deux premiers quarts, $\frac{3}{4}P$ pour celle des trois premiers, $\frac{4}{4}P$ ou P pour les quatre quarts, $\frac{5}{4}P$ pour les cinq quarts, &c. & les grandeurs des ſommes des ſecteurs feront $\frac{PR}{384}$, $\frac{8PR}{384}$, $\frac{27P}{384}$, $\frac{64PR}{384}$, $\frac{125PR}{384}$, &c. où les coefficiens des numérateurs ſont les cubes.

Prenons de même l'expreſſion $\frac{a^3uR^2 - a^3R^3 + 3a^2sR^3 - 6auR^4 + 6aR^5 - 6sR^5}{3P^3}$, & laiſſant ſubſiſter a nous aurons pour le premier quart $u = R$ & $s = R$, ainſi mettant ces valeurs, le moment ſera $\frac{3a^2R^4 - 6R^6}{3P^3}$.

Pour les deux quarts nous aurons $s = 0$, & $u = 2R$, à cauſe que le ſinus verſe d'un arc égal à la demi-circonférence eſt égal au diametre, &c. ſubſtituant donc ces valeurs, le moment ſera $\frac{a^3R^3 - 6aR^5}{3P^3}$,

Pour les trois quarts nous aurons $s=R$ & $u=R$, ainsi le moment sera $\frac{3a^2R^4-6R^6}{3P^3}$.

Pour les quatre quarts nous aurons $s=0$ & $n=0$, & par conséquent le moment sera $\frac{6aR^5-a^3R^3}{3P^3}$.

Où l'on voit que pour le premier quart, pour les trois premiers quarts, pour les cinq premiers, & ainsi de suite la formule sera toujours $\frac{3a^2R^4-6R^6}{3P^3}$, que pour les deux quarts, les six quarts, les dix quarts, & ainsi de suite la formule sera $\frac{a^3R^3-6aR^5}{3P^3}$, & enfin pour les revolutions entieres $\frac{6aR^5-a^3R^3}{3P^3}$.

Mettant donc pour le premier quart $\frac{1}{4}P$ au lieu de a, pour les deux premiers $\frac{1}{2}P$, pour les trois premiers $\frac{3}{4}P$, &c. les momens pour le premier quart, pour les deux premiers, pour les trois premiers, &c. seront $\frac{P^2R^4}{16P^3}-\frac{2R^6}{P^3}$, $\frac{P^3R^3}{24P^3}-\frac{PR^5}{P^3}$, $\frac{9P^2R^4}{16P^3}-\frac{2R^6}{P^3}$, $\frac{6PR^6-P^3R^3}{3P^3}$, $\frac{25P^2R^5}{16P^3}-\frac{2R^6}{P^3}$, & ainsi de suite.

Divisant donc ces momens par les grandeurs des sommes des secteurs correspondantes; les quotiens $\frac{24P^2R^3}{P^4}-\frac{768R^5}{P^4}$, $\frac{2P^3R^2}{P^4}-\frac{48PR^4}{P^4}$, $\frac{8P^2R^3}{P^4}-\frac{256R^5}{9P^4}$, $\frac{12PR^4}{P^4}-\frac{2P^3R^2}{P^4}$, $\frac{600P^2R^3}{P^4}-\frac{768R^5}{125P^4}$, &c. seront les distances des centres de gravité à la droite CD.

Or les momens que nous venons de trouver pour les quatre premiers quarts sont très-justes, & le moment pour la somme des secteurs des cinq premiers quarts est aussi tel qu'il faut; mais comme cette somme contient deux fois la somme du premier quart, si l'on veut avoir le moment de la spirale comprise dans ces cinq premiers quarts, on retranchera du moment $\frac{25P^2R^4}{16P^3}-\frac{2R^6}{P^3}$ de la somme des secteurs, le moment $\frac{P^2R}{16P^3}-\frac{2R^6}{P^3}$ de la somme des secteurs du premier quart de la spirale, & le reste $\frac{3P^2R^4}{2P^3}$ sera le moment de la spirale des cinq premiers quarts, de même retranchant de la grandeur $\frac{125PR}{384}$ de la somme des secteurs des cinq premiers quarts, la grandeur $\frac{PR}{384}$ de la somme des secteurs du premier quart, le reste $\frac{124PR}{384}$ ou $\frac{31}{96}$

PR

PR ſera la grandeur de la ſpirale des cinq premiers quarts. Diviſant donc le moment par la grandeur, le quotient $\frac{144P^2P^3}{31P^4}$ ſera la diſtance du centre de gravité de cette ſpirale à la droite CD, & on obſervera la même choſe à l'égard des ſpirales ſupérieures.

Au reſte, en évaluant les fractions qui marquent les diſtances, on trouvera que le centre de gravité eſt du côté de K, lorſque cette fraction ſera une grandeur négative & qu'elle ſera de l'autre côté, lorſqu'elle ſera une grandeur poſitive, car les ſignes plus & moins ſont faits pour cela.

Et ſi on veut trouver les momens des ſommes des ſecteurs qui ne ſe terminent pas préciſement aux quarts de revolution, on ſe ſervira de la formule $\frac{a^3uR^2 - a^3R^3 + 3a^2sR^3 - 6auR^4 + 6aR^5 - 6sR^5}{3P^3}$ en ayant attention de changer les ſignes des termes où ſe trouve la lettre s lorſque les ſommes des ſecteurs ſe termineront du côté de K par rapport à la droite CD, & on fera la même choſe dans l'expreſſion $\frac{2a^3uR - 2a^3R^2 + 6a^2sR^2 - 12auR^3 + 12aR^4 - 12sR^4}{a^3P}$ qui marque la diſtance des centres de gravité à la droite CD.

Il nous reſte à chercher la diſtance des centres de gravité à la droite KZ, & pour cela des centres de gravité a, c, e, f, t, &c. (*Fig.* 190.) des ſecteurs, concevons des droites ao, cn, fe, &c. menées perpendiculairement ſur la droite KZ; ces droites ſeront les diſtances de ces centres à KZ, & il eſt viſible que celles du premier quart ſont entr'elles comme les ſinus des complemens au quart de circonférence des angles arithmetiquement proportionnels aAb, cAb, &c. que celles du ſecond quart ſont comme les ſinus des excès ſur le quart de circonference des angles auſſi arithmetiquement proportionnels fAb, tab, &c. & que celles du troiſiéme quart ſont comme les ſinus des complemens à trois quarts de circonference des angles, ou pour mieux dire, des arcs arithmetiquement proportionnels depuis la demi-circonférence juſqu'aux trois quarts, & ainſi de ſuite, de ſorte que celles du quatriéme quart ſont comme les ſinus des excès ſur les trois quarts des arcs arithmetiquement proportionnels depuis les trois quarts de la circonference entiere, en prenant alternativement les ſinus des complemens & les ſinus des excès; or les rayons d'où tombent ces droites ou ſinus, c'eſt-à-dire les rayons aA, cA, eA, fA, &c. ſont auſſi arithmetiquement pro-

portionnels, donc les distances sont entr'elles en raison composée des sinus ou de complement ou d'excès des arcs arithmetiquement proportionnels DN, DX, DZ, &c. de la circonférence du cercle générateur, & des rayons aussi arithmetiquement proportionnels, lesquels sont entr'eux comme les mêmes arcs. Appellant donc x les sinus de complement ou d'excès des arcs arithmetiquement proportionnels DN, DX, DZ, &c. les distances seront en raison composée des x aux a ou comme les ax; mais les secteurs sont entr'eux comme les a^2, donc leurs momens sont entr'eux comme les $a^2 \times ax$, ou comme les a^3x.

Supposant donc que les droites FS, FT, FV, &c. (*Fig.* 189.) soient égales aux arcs arithmetiquement proportionnels DN, DX, DZ, &c. du cercle générateur, ensorte que FV soit égal au quart de circonférence, FG aux deux quarts, FC aux trois quarts, FL aux quatre, & ainsi de suite, les droites FE, RS, &c. jusqu'à B seront les sinus des complemens du premier quart, les droites comprises dans la portion BGH, seront les sinus des excès du second quart, les droites comprises dans la portion GHC seront les sinus des complemens du troisiéme quart, & ainsi de suite; donc ces droites seront égales aux x; & les a^3x seront égales à ces droites multipliées par les cubes de leurs distances FS, FT, FV, FX, &c. à la droite FG.

Or nous avons déja dit (*N.* 274.) que la portion FEB égale à la moitié de la figure des sinus, est aussi égale à la portion DAC de la figure des sinus verses (*Fig.* 100.) & nous avons vû (*N.* 160.) qu'une portion quelconque 3XAC, ou mBAC qui se termine sur la droite Aa vaut sR. Prenant donc pour nous fixer la portion FEB (*Fig.* 189.) qui repond au premier quart de revolution, tous les x compris dans cette figure vaudront sR en prenant s pour le sinus du plus grand arc, c'est-à-dire du quart de circonférence, & si nous multiplions cette somme sR par le plus grand arc que nous appellerons A pour le distinguer, le produit AsR sera plus grand que tous les ax, c'est-à-dire que tous les x multipliés par leurs a correspondans qui sont en progression arithmetique, c'est pourquoi il faudra retrancher du produit AsR les sommes croissantes des x, c'est-à-dire en concevant que les droites FE, SR, &c. soient infiniment proches, il faudra retrancher la portion FERS, la portion FEQT, &c. jusqu'à la derniere portion FEB. Or chacune de ces portions est sR; donc il faudra retrancher du produit AsR la somme des sR.

Mais tous les s ou tous les ſinus droits du quart de circonférence valent uR en prenant u pour le ſinus verſe du plus grand arc, donc tous les sR valent uR^2; & par conſéquent retranchant uR^2 du produit AsR, le reſte $AsR - uR^2$ ſera la valeur de tous les ax.

De même ſi nous multiplions par le nombre des termes ou par le plus grand arc A, la ſomme $AsR - uR^2$ de tous les ax le produit $A^2sR - uR^2A$ ſera plus grand que tous les $ax \times a$, ou que tous les ax multipliés par leur a, & il faudra retrancher de ce produit les ſommes croiſſantes des ax, mais chaque ſomme des ax eſt $asR - uR^2$ en mettant a pour l'arc correſpondant de chacune de ces ſommes, donc il faudra retrancher de $A^2sR - uR^2A$ la ſomme de tous les $asR - uR^2$.

Or tous les as étant les ſinus des arcs arithmetiquement proportionnels multipliés par leurs arcs ſont égaux au moment par rapport à am (*Fig.* 100.) de la portion adc de la figure des ſinus droits ou de la portion abr en ſuppoſant ab égal au plus grand arc, & par conſéquent tous les as valent $auR - aR^2 + sR^2$; donc tous les asR valent $auR^2 - aR^3 + sR^3$, tous les u étant les ſinus verſes des arcs arithmetiquement proportionnels ſont égaux à AKB (*Fig.* 100.) de la figure des ſinus verſes, en ſuppoſant AK égal au plus grand arc; donc tous les u valent $aR - sR$, & tous les $-uR^2$ valent $-aR^3 + sR^3$.

Donc tous les $asR - uR^2$ valent $auR^2 - 2aR^3 + 2sR^3$ retranchant donc cette valeur, du produit $A^3sR - uR^2A$ en mettant a au lieu de A, le reſte $a^2sR - 2auR^2 + 2aR^3 - 2sR^3$ ſera égal à la ſomme de tous les a^2x.

Et ſi nous multiplions la ſomme de tous les a^2x par le plus grand arc A, le produit $Aa^2sR - 2AauR^2 + 2AaR^3 - 2AsR^3$ ſera plus grand que tous les $a^2x \times a$, ou que tous les a^2x multipliés par leurs a, & il faudra retrancher de ce produit les ſommes croiſſantes des a^2x. Or chaque ſomme des a^2x eſt $a^2sR - 2auR^2 + 2aR^3 - 2sR^3$, en ſuppoſant que les a ſont les arcs correſpondans à ces ſommes, donc il faudra retrancher du produit tous les $a^2sR - 2auR^2 + 2aR^3 - 2sR^3$.

Or tous les a^2s étant les ſinus multipliés par les quarrés de leurs arcs ſont égaux au moment par rapport à am (*Fig.* 100.) de l'onglet fait ſur la portion abr de la figure des ſinus droits ayant ſon onglet en am, en ſuppoſant que br eſt égal à l'arc correſpon-

dant, donc tous les a^2s valent $a^2uR - a^2R^2 + 2asR^2 - 2uR^3$ (*N.* 266.). Donc tous les a^2sR valent $a^2uR^2 - a^2R^3 + 2asR^3 - 2uR^4$.

Tous les au étant les sinus verses des arcs arithmétiquement proportionnels multipliés par leurs arcs, sont égaux au moment par rapport à Aa de la portion AKB (*Fig.* 100.) en supposant AK égal au plus grand arc. Donc tous tous les au valent $\frac{1}{2}a^2R - asR + uR^2$ (*N.* 161.) donc tous les $-2auR^2$ valent $-a^2R^3 + 2asR^3 - 2uR^4$.

Tous les a étant les arcs arithmétiquement proportionnels valent $\frac{1}{2}a^2$, en prenant a pour le plus grand arc; donc tous les $2aR^3$ valent a^2R^3.

Tous les s étant les sinus des arcs arithmétiquement proportionnels valent uR en prenant u pour le sinus verse du plus grand arc; donc tous les $-2sR^3$ valent $-2uR^4$.

Donc tous les $a^2sR - 2auR^2 + 2aR^3 - 2sR^3$, valent $a^2uR^2 - a^2R^3 + 4asR^3 - 6uR^4$; & par conséquent les sommes croissantes des a^2x valent $a^2uR^2 - a^2R^3 + 4asR^3 - 6uR^4$. Retranchant donc ces sommes du produit $Aa^2sR - 2AauR^2 + 2AaR^3 - 2AsR^3$ en remettant a au lieu de A, le reste $a^3sR - 3a^2uR^2 + 3a^2R^3 - 6asR^3 + 6uR^4$ sera la valeur de tous les a^3x; ainsi les momens des secteurs seront à leur somme comme tous les a^3x sont à $a^3sR - 3a^2uR^3 + 3a^2R^3 - 6asR^3 + 6uR^4$.

Or la grandeur de chaque secteur est $\frac{1}{2}tr = \frac{arT}{2P} = \frac{a^2RT}{2P^2}$, comme il a été dit ci-dessus, & la distance de son centre de gravité à la droite KZ est à $\frac{2}{3}$R, comme le sinus de complement ou d'excès de l'arc correspondant du cercle générateur est à son rayon, c'est-à-dire qu'en faisant cette analogie R. x. $\frac{2}{3}r$. $\frac{2rx}{3R}$, le quatriéme terme $\frac{2rx}{3P}$ sera la distance du centre de gravité à la droite KZ, ou bien comme on a toujours P. a :: R. r, ce qui donne $r = \frac{aR}{P}$ mettant $\frac{aR}{P}$ au lieu de r, nous aurons $\frac{2ax}{3P} = \frac{2rx}{3R}$; ainsi multipliant chaque secteur par la distance de son centre de gravité, nous aurons $\frac{a^3xRT}{3P}$ pour le moment de chaque secteur par rapport à KZ, ou $\frac{a^3xR}{3P^3}$ en négligeant la lettre T, pour la raison que nous avons donnée plus haut.

Puis donc que les momens des secteurs sont à leur somme

comme tous les a^3x sont à $a^3sR - 3a^2uR^2 + 3a^2R^3 - 6asR^3 + 6uR^4$, nous ferons cette analogie : comme tous les a^3x sont à $a^3sR - 3a^2uR^2 + 3a^2R^3 - 6asR^3 + 6uR^4$, ainsi tous les $\frac{a^3xR}{3P^3}$ sont à un quatriéme terme $\frac{a^3sR - 3a^2uR + 3a^2R^4 - 6asR^4 + 6uR^5}{3P^3}$ qui sera le moment de la somme des secteurs du premier quart de révolution par rapport à KZ. Divisant donc ce moment par la grandeur de la somme des secteurs qui est $\frac{a^3R}{6P^2}$, le quotient $\frac{2a^3sR - 6a^2uR^2 + 6a^2R^3 - 12asR^3 + 12uR^4}{a^3P}$ sera la distance du centre de gravité de la somme des secteurs du premier quart de révolution à la droite KZ ; & il est visible que ces deux expressions du moment & de la distance serviront non-seulement pour la somme des secteurs du premier quart, mais encore pour la somme des secteurs de telle révolution que l'on voudra complette ou incomplette, en observant de mettre au lieu de a la valeur de l'arc correspondant, & de prendre le centre de gravité du côté de C par rapport à KZ, lorsqu'en évaluant le moment ou la distance, on trouve que leur valeur est négative, & de les prendre au contraire du côté opposé, lorsque la valeur est positive.

Par exemple pour le premier quart, on aura $a = \frac{1}{4}P$, $s = R$, $u = R$; mettant donc ces valeurs dans les expressions du moment & de la distance, on aura $\frac{PR^3 - 96PR^5 + 384R^6}{192P^3}$ pour le moment, & $\frac{2P^3R^2 - 192PR^4 + 768R^5}{P^4}$ pour la distance.

Pour les deux premiers quarts, on aura $a = \frac{1}{2}P$, $s = -R$, & $u = 2R$; pour les trois premiers quarts, on aura $a = \frac{3}{4}P$, $s = -R$, $u = R$; pour les quatre premiers $a = P$, $s = 0$, $u = 0$; pour les cinq premiers $a = \frac{5}{4}P$, $s = R$, $u = R$, & ainsi de suite. Observant de faire $s = -R$, lorsque les sommes des secteurs se terminent du côté de C par rapport à la droite RZ, & $s = R$ lorsqu'elles se terminent de l'autre côté, & mettant ces valeurs dans les expressions du moment & de la distance, on trouvera facilement le moment de telle somme de secteurs par rapport à RZ, que l'on voudra.

Ainsi pour la premiere circulation complette, on trouvera $\frac{P^2R^2}{P^3} = \frac{R^4}{P}$ qui sera le moment de la somme des secteurs ou de la premiere spirale par rapport à KZ, & la distance du centre de gravité à KZ sera $\frac{6R^3}{P^2}$.

Pour la somme des secteurs de la seconde révolution, le moment sera $\frac{4P^2R^4}{P^3}$, ou $\frac{4R^4}{P}$, & la distance $\frac{3R^3}{P^2}$; mais comme ce moment contient deux fois le moment de la premiere révolution, si de $\frac{4R^4}{P}$ nous retranchons le moment $\frac{R^4}{P}$, le reste $\frac{3R^4}{P}$ sera le moment de la seconde spirale, & divisant ce moment par la grandeur $\frac{7}{6}$PR de la seconde spirale, le quotient $\frac{18R^3}{7P^2}$ sera la distance du centre de gravité à la droite KZ; & on trouvera de la même façon les momens des autres spirales parfaites & imparfaites, ce qui est trop facile pour m'y arrêter davantage.

REMARQUE.

Touchant la Spirale.

277. les arcs des secteurs inscrits à la spirale étant infiniment proches de cette ligne, leur somme est égale à la ligne spirale. Mais ces arcs sont en progression arithmétique, à cause qu'ils sont entr'eux comme les rayons; donc leur somme à la fin de la premiere révolution est au plus grand multiplié par le nombre des termes comme 1 à 2. Or l'arc *nr* (*Fig.* 185.) du plus grand secteur de la premiere révolution n'est pas différent de l'arc *h*C du cercle générateur, à cause de l'infinie proximité de ces arcs; donc la somme des arcs de la premiere révolution, est égale à l'arc *h*C multiplié par la moitié du nombre des termes, c'est-à-dire par la moitié de la premiere circonférence, & par conséquent cette somme est égale à la moitié de la circonférence.

De même, la somme des arcs des secteurs de la seconde révolution est égale au plus grand arc ou à l'arc 5B du second cercle multiplié par la moitié du nombre des termes; mais le nombre des termes est double de celui de la premiere révolution, parce que le rayon a décrit deux révolutions, donc la somme des arcs est égale à l'arc 5B du second cercle multiplié par deux moitiés du nombre des termes; & par conséquent elle est égale à deux moitiés de la seconde circonférence.

Et on prouvera de même que les sommes des arcs de la troisiéme révolution, de la quatriéme, &c. sont les trois moitiés de la troisiéme circonférence, les quatre moitiés de la quatriéme, &c.

Mais les circonférences des cercles de 1re. 2e. 3e. révolution,

&c. étant entr'elles comme leurs rayons, font comme les nombres 1. 2. 3. 4, &c. donc les fommes des arcs correfpondantes à chaque révolution font entr'elles comme $\frac{1}{2}$ de 1, $\frac{2}{2}$ de 2, $\frac{3}{2}$ de 3, $\frac{4}{2}$ de 4, &c. ou comme 1. 4. 9. 16. 25, &c. c'eft-à-dire comme les quarrés des rayons.

Donc la premiere ligne fpirale, la feconde, la troifiéme, &c. à commencer toujours depuis le centre, &c. font entr'elles comme les quarrés de leurs rayons; & on prouvera facilement la même chofe des lignes fpirales des circulations imparfaites. Par exemple, la fomme des arcs du premier quart de révolution eft à la fomme des arcs des deux premiers quarts comme les quarrés du rayon AV au quarré du rayon AR. Car la fomme des arcs du premier quart de cercle eft égale à la moitié du quart de circonférence V9 que le rayon AV a décrit, & la fomme des arcs des deux premiers quarts de cercle eft égale à la moitié de la demi-circonférence R*xt* que fon rayon AR a décrit. Or le rayon AR étant double du rayon AV, la demi-circonférence R*xt* eft quadruple du quart de circonférence V9, donc la fomme des arcs du premier quart eft à la fomme des arcs des deux premiers comme la moitié du quart de circonférence eft à la moitié du quadruple de ce quart, & par conféquent comme 1 à 4, & ainfi des autres.

Si l'on ôte la premiere ligne fpirale de la feconde, la feconde de la troifiéme, la troifiéme de la quatriéme, &c. les différences des fpirales, c'eft-à-dire la premiere ligne fpirale, la partie de la feconde comprife entre la premiere circonférence & la feconde, la partie de la troifiéme comprife entre la feconde circonférence & la troifiéme, &c. feront entr'elles comme les différences 1. 3. 5. 7, &c. des quarrés 1. 4. 9, &c. ce qui eft évident.

278. Si l'on conçoit que la premiere ligne fpirale fe développe en ligne droite, les rayons de fes arcs deviendront paralleles entr'eux & perpendiculaires à la développée, parce que les rayons font perpendiculaires à leurs arcs. Ainfi fuppofant que la droite AB (*Fig.* 191.) foit égale à la fpirale développée, nous aurons la fpirale BA eft à la fpirale DA, comme le quarré du rayon BC au quarré du rayon DE, & ainfi des autres parties de la ligne AB; donc la courbe AEF qui paffera par les extrémités des rayons fera une parabole.

Si l'on infcrit dans cette parabole des petits rectangles, les

bases de ces rectangles seront égales aux rayons des arcs, & leurs hauteurs seront égales aux arcs ; donc ces rectangles seront doubles des secteurs, car chaque secteur étant un petit triangle dont la base est l'arc & la hauteur est le rayon, est par conséquent égal à la moitié du rectangle ; donc la somme des rectangles, ou l'espace compris dans la parabole est double de la somme des secteurs ou de l'espace compris dans la spirale.

Si du point C de la parabole on mene une tangente, on sçait que la partie AM de la sous-tangente sera égale à la partie AB, & par conséquent BA étant égal à la premiere ligne spirale ou à la demi-circonférence du cercle générateur, MB est égal à cette circonférence.

Si l'on conçoit que le diametre AB se raccourcisse tellement que toutes ses ordonnées se touchent par leurs extremités, les rectangles inscrits se changeront en triangles, ou pour mieux dire en secteurs qui seront les mêmes que ceux de la spirale, & la parabole se changera en spirale. Or il est visible que si pendant ce changement la tangente CM conserve toujours le même angle avec la droite BC, elle ne touchera la parabole changée en spirale qu'en ce même point C où elle la touchoit auparavant. Ainsi si l'on pouvoit connoître l'angle BCM, on pourroit mener une tangente à la spirale au point C (*Fig.* 185.) ; & prolongeant le diametre DF perpendiculaire au diametre CE jusqu'à la rencontre de la tangente, la partie de ce diametre prolongé comprise entre la tangente & le centre seroit égale à la circonférence du cercle générateur, car le triangle rectangle que feroit la tangente avec le diametre AC & sa sous-tangente, seroit semblable & égal au triangle BCM (*Fig.* 191.) dans lequel nous venons de voir que BM seroit égal à la circonférence du cercle. D'où l'on voit que l'on auroit la quadrature du cercle si l'on pouvoit mener une tangente au point C de la spirale, ou en tel autre point que l'on voudroit, par exemple au point R (*Fig.* 185.) ; car on prouveroit de la même façon que la partie du diametre DF prolongé comprise entre cette tangente & l'autre diametre EC qui lui est perpendiculaire, seroit égale à l'arc R*xt* du cercle du rayon RA, & ainsi des autres ; ce qui est facile à démontrer.

Des autres Spirales.

Si les rayons des secteurs inscrits, au lieu d'être entr'eux comme les arcs arithmétiquement proportionnels, étoient comme les

quarrés

quarrés de ces mêmes arcs, ou comme leurs cubes, ou comme les quatriémes puissances, &c. ou comme les racines quarrées ou cubiques, ou quatriémes, &c. on auroit autant de spirales différentes dont nous allons examiner les proprietés en peu de mots.

Si les rayons sont comme les quarrés des arcs arithmétiquement proportionnels, les secteurs étant entr'eux comme les quarrés de ces rayons, seront par conséquent comme les quatriémes puissances des arcs arithmétiquement proportionnels, & par conséquent leur somme à la fin de la premiere révolution sera au dernier multiplié par le nombre des termes, c'est-à-dire au cercle générateur comme 1 à 5. Ainsi la premiere spirale, c'est-à-dire l'espace compris sera le $\frac{1}{5}$ du cercle générateur.

La somme des secteurs depuis le centre jusqu'à la seconde révolution, sera aussi au dernier terme multiplié par le nombre des termes comme 1 à 5. Mais le nombre des termes sera double, parce que le rayon aura fait deux fois sa révolution ; donc la somme des secteurs sera $\frac{1}{5}$ du double du second cercle. On prouvera de la même façon que la somme des secteurs depuis le centre jusqu'à la troisiéme révolution sera $\frac{1}{5}$ du triple du second cercle, & ainsi de suite.

Or le second cercle est quadruple du premier, le troisiéme est 9 fois plus grand, &c. dans la raison des quarrés de leurs rayons ; donc les sommes des secteurs depuis le centre jusqu'aux révolutions 1re. 2e. 3e, &c. seront comme $\frac{1}{5}$ de 1, $\frac{1}{5}$ de 2 fois 4, $\frac{1}{5}$ de 3 fois 9, &c. ou comme $\frac{1}{5}$ de 1, $\frac{1}{5}$ de 8, $\frac{1}{5}$ de 27, &c. ou enfin comme 1. 8. 27, &c. c'est-à-dire comme les cubes des rayons des cercles ; & la même chose se pronvera pour les sommes des secteurs des révolutions imparfaites.

Si les rayons des secteurs sont comme les cubes des arcs arithmétiquement proportionnels, les secteurs seront comme les quarrés de ces cubes, ou comme les sixiémes puissances ; d'où il suit que la somme des secteurs de la premiere révolution sera au premier cercle comme 1 à 7, & qu'ainsi la somme depuis le centre jusqu'à la seconde révolution sera $\frac{1}{7}$ de deux fois le second cercle, la somme depuis le centre jusqu'à la troisiéme sera $\frac{1}{7}$ de trois fois le troisiéme cercle, &c. & par conséquent ces sommes seront comme $\frac{1}{7}$ de 1, $\frac{1}{7}$ de 8, $\frac{1}{7}$ de 27, &c. c'est-à-dire encore comme les cubes 1. 8. 27, &c. des rayons des cercles.

Si les rayons des secteurs sont comme les quatriémes puissances des arcs arithmétiquement proportionnels, les secteurs

feront comme les quarrés de ces quatriémes puiffances ; ou comme les huitiémes puiffances, & la fomme des fecteurs de la premiere révolution fera au cercle générateur comme 1 à 9. D'où on tirera aifément tout le refte comme ci-deffus, & l'on voit bien auffi que fi les rayons des fecteurs étoient comme les cinquiémes puiffances, les fixiémes, &c. la fomme des fecteurs de la premiere révolution feroit au cercle générateur comme 1 à 11, comme 1 à 13, comme 1 à 15, &c. ainfi les rapports de cette fomme au premier cercle, felon les différens dégrés, à compter depuis la fpirale d'Archimede, font $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{11}$, &c.

Si les rayons des fecteurs font les racines quarrées des arcs arithmétiquement proportionnels, dont l'expofant eft $\frac{1}{2}$, les fecteurs feront comme les quarrés de ces racines, c'eft-à-dire comme les arcs dont l'expofant eft 1, & par conféquent leur fomme à la fin de la premiere révolution fera au dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme 1 à 2. Ainfi cette fomme fera la $\frac{1}{2}$ du premier cercle, celle des fecteurs depuis le centre jufqu'à la feconde révolution, fera la $\frac{1}{2}$ du double du fecond cercle, ou comme la moitié de huit fois le premier, la fomme fuivante fera la $\frac{1}{2}$ du triple du fecond cercle, ou comme la moitié de 27 fois le premier, & ainfi de fuite ; donc ces fommes feront, comme $\frac{1}{2}1$, $\frac{1}{2}8$, $\frac{1}{2}27$, &c. ou comme 1. 8. 27, c'eft-à-dire encore comme les cubes des rayons, ce qui arrive généralement dans toutes les fpirales de quelque efpece qu'elles foient, & pour les révolutions parfaites ou imparfaites, c'eft pourquoi nous n'en parlerons plus.

Si les rayons font comme les troifiémes racines des arcs arithmétiquement proportionnels, leur expofant eft $\frac{1}{3}$, & les fecteurs étant comme les quarrés de ces cubes, ont pour expofant $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$, ou $\frac{2}{3}$, & leur fomme à la fin de la premiere révolution, eft au cercle générateur comme 1 à $\frac{2}{3}+1$, ou comme 1 à $\frac{5}{3}$, ou comme 3 à 5.

Si les rayons font comme les racines quatriémes des arcs arithmétiquement proportionnels, leur expofant eft $\frac{1}{4}$, celui des fecteurs $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$, ou $\frac{2}{4}$, & la fomme des fecteurs de la premiere révolution eft au dernier terme multiplié par le nombre des termes, c'eft-à-dire au cercle générateur, comme 1 à $\frac{2}{4}+1$, ou comme 1 à $\frac{6}{4}$, ou comme 4 à 6. Et on trouvera de même que fi les rayons font comme les racines cinquiémes, fixiémes, &c. la fomme des fecteurs de la premiere révolution fera au cercle générateur comme 5 à 7, comme 6 à 8, &c.

En général la somme des secteurs est au plus grand multiplié par le nombre des termes comme l'unité au double de l'exposant des rayons plus l'unité; car supposant l'exposant x, les secteurs étant comme les quarrés des rayons, auront pour exposant $x+x$, ou $2x$, & leur somme selon les regles que nous avons donnée dans l'*Arithmétique des Infinis* sera au dernier multiplié par le nombre des termes, comme 1 à l'exposant $2x$ augmenté de l'unité, c'est-à-dire comme 1 est à $2x+1$.

Or la premiere spirale de quelque dégré qu'elle soit étant trouvée, il est facile de trouver la seconde, la troisiéme, &c. car puisque les sommes des secteurs depuis le centre jusqu'à la fin de chaque révolution sont comme 1. 8. 27, &c. des rayons des cercles, ces sommes seront faciles à trouver dès qu'on connoîtra la premiere; après quoi retranchant la premiere somme de la seconde, la seconde de la troisiéme, &c. les restes seront les spirales qui seront entr'elles comme les différences 1. 7. 19, &c. des cubes 1. 8. 27, &c. des rayons. Venons maintenant aux centres de gravité de ces spirales.

Si l'on coupe la spirale d'Archimede par une ligne droite AM qui passe par le centre (*Fig.* 185.) le rayon AQ de la portion coupée AZVQ, est au rayon AO du cercle générateur comme l'arc correspondant ODC de ce cercle, est à sa circonférence, ainsi que nous l'avons prouvé ci-dessus (*N.* 275.) Or je dis que dans les autres spirales, le rayon AQ est au rayon AO comme l'arc correspondant ODC élevé à la puissance des rayons est à sa circonférence élevée à la même puissance; c'est-à-dire que si les rayons des secteurs sont entr'eux comme les quarrés ou les cubes, &c. ou comme les racines secondes, troisiémes, &c. des arcs arithmétiquement proportionnels, le rayon AQ sera au rayon AO comme le quarré ou le cube, &c. ou la racine quarrée ou cubique, &c. de l'arc ODC au quarré ou au cube, &c. ou à la racine quarrée ou cubique, &c. de sa circonférence. Car supposons, par exemple, que les rayons soient entr'eux comme les quarrés des arcs arithmétiquement proportionnels, les secteurs semblables QA*t*, OAC, donneront AQ, AO :: Q*xt*, ODC; or si l'arc ODC est par exemple les $\frac{2}{3}$ de sa circonférence, le rayon AQ ne sera pas les deux tiers du rayon OA comme dans la spirale d'Archimede, mais il en sera les $\frac{4}{9}$, parce que nous supposons que les rayons sont dans la raison des quarrés des arcs arithmétiquement proportionnels; donc le rayon AQ

fera au rayon AO comme $\frac{4}{9}$ à 1, & par conséquent comme le quarré de l'arc AO au quarré de sa circonférence, puisque l'arc AO étant à sa circonférence comme $\frac{2}{3}$ à 1, leurs quarrés sont comme $\frac{4}{9}$ à 1. Cela posé.

Appellant des mêmes noms les mêmes grandeurs, les petits secteurs inscrits sont $\frac{1}{2}tr$, ou $\frac{r^2T}{2R}$, en mettant au lieu de t sa valeur $\frac{rT}{R}$, à cause de R, r :: T, t. Or la distance du centre de gravité de chaque secteur au centre A est $\frac{2}{3}r$, & comme la distance de ce même centre à la droite CD (*Fig.* 190.), par exemple, la distance cd est à son rayon $cA = \frac{2}{3}R$ comme le sinus de l'arc correspondant XD à son rayon XA, ce qui donne cd, $\frac{2}{3}r$ :: s, R; & par conséquent $cd = \frac{2rs}{3R}$, si nous multiplions chaque secteur par sa distance, le produit $\frac{sr^3T}{3R^2}$, ou $\frac{sr^3}{3R^2}$, en négligeant T, sera le moment de chaque secteur par rapport à CD.

De même la distance du centre de gravité de chaque secteur à la droite KZ étant à son rayon $\frac{2}{3}r$ comme le sinus de complement ou d'excès de l'arc correspondant de la circonférence du cercle générateur à son rayon R, cette distance est donc $\frac{2rx}{3R}$, & le moment du secteur par rapport à KZ, est $\frac{r^3x}{3R^2}$; ainsi il ne s'agit que de trouver la somme de tous les $\frac{r^2}{2R}$ pour avoir la somme des secteurs pour telle circulation qu'on voudra, celle de tous les $\frac{sr^3}{3R^2}$ pour avoir la somme de leurs momens par rapport à CD, & celle de tous les $\frac{xr^3}{3R^2}$ pour avoir la somme de leurs momens par rapport à KZ, & ces trois formules $\frac{r^2}{2R}$, $\frac{sr^3}{3R^2}$, $\frac{xr^3}{3R^2}$, serviront pour toutes les spirales de quelque dégré qu'elles soient.

Par exemple, si les rayons des secteurs sont comme les arcs arithmétiquement proportionnels de la circonférence du cercle générateur, on aura $r = \frac{aR}{P}$, à cause que r, R :: a, P, & mettant cette valeur de r dans les formules précédentes, on aura $\frac{a^2R}{2P^2}$ pour la grandeur du secteur, $\frac{sa^3R}{3P^3}$ pour le moment par rapport à CD, & $\frac{xa^3R}{3P^3}$ pour le moment par rapport à KZ.

Si les rayons sont entr'eux comme les quarrés des arcs arith-

métiquement proportionnels, on aura $r = \frac{a^2 R}{P^2}$, à cause de r, R :: a^2, P^2. Mettant donc ces valeurs de r dans les formules, nous aurons $\frac{a^4 R}{2P^4}$ pour la grandeur du secteur, $\frac{sa^6 R}{3P^6}$ pour le moment par rapport à CD, & $\frac{xa^6 R}{3P^6}$ pour le moment par rapport à KZ.

Si les rayons sont entr'eux comme les cubes des arcs arithmétiquement proportionnels, nous aurons $r = \frac{a^3 R}{P^2}$ à cause de r, R :: a^3, P^3; donc la grandeur du secteur sera $\frac{a^6 R}{6P^6}$, le moment par rapport à CD sera $\frac{sA^9 R}{3P^9}$, & par rapport à KZ, $\frac{xa^9 R}{P^9}$, & ainsi des autres.

Or dans tous ces cas, la grandeur du secteur $\frac{a^2 R}{2P^2}$, ou $\frac{a^4 R}{2P^4}$, ou $\frac{a^6 R}{2P^6}$ se trouvera aisément, puisqu'on peut toujours trouver la somme de telles puissances qu'on voudra des arcs arithmétiquement proportionnels, & multiplier ensuite cette somme par R, puis la diviser par $2P^2$, ou $2P^4$, ou $2P^6$, &c. selon le dégré de la spirale.

Quant à la somme des momens par rapport à CD, c'est-à-dire à la somme de tous les $\frac{sa^3 R}{3P^3}$, ou de tous les $\frac{sa^6 R}{3P^6}$, ou de tous les $\frac{sa^9 R}{3P^9}$, &c. on la trouvera en cherchant d'abord la somme de tous les s, puis la somme de tous les sa, puis celle de tous les sa^2, puis celle de tous les sa^3, & ainsi de suite, en usant de la méthode dont nous nous sommes servis pour trouver les momens des secteurs par rapport à KZ; après quoi on multipliera la somme trouvée par R, & on divisera le produit par $3P^3$, ou par $3P^6$, ou par $3P^9$, &c. selon le dégré de la spirale.

Et on trouvera de la même façon la somme des momens des secteurs par rapport à KZ, c'est-à-dire la somme de tous les $\frac{xa^3 R}{3P^3}$, ou $\frac{xa^6 R}{3P^6}$, ou $\frac{xa^9 R}{3P^9}$, &c.

Mais si les rayons des secteurs sont entr'eux comme les racines quarrées des arcs arithmétiquement proportionnels, on auroit $r = R\sqrt{\frac{a}{P}}$, à cause de r, R :: $\sqrt{a}$, $\sqrt{P}$, & mettant ces valeurs dans les formules, la grandeur du secteur seroit $\frac{aR}{2P}$, le

moment par rapport à CD feroit $sR\sqrt{\frac{a^3}{p^3}}$, & par rapport à KZ, $xR\sqrt{\frac{a^3}{p^3}}$, & ainfi des autres.

Et dans ces cas on pourroit trouver la fomme des fecteurs par les Méthodes que nous avons fuivies, mais on ne pourroit pas trouver de la même façon la fomme des momens, à caufe du figne radical; & il faudroit chercher ce moment par d'autres calculs, tel qu'eft par exemple le calcul intégral dont nous parlerons dans un autre Ouvrage.

CHAPITRE XVII.

De la grandeur & des centres de gravité des Figures terminées par une ligne courbe & une ligne droite.

281. MON deffein n'eft pas de traiter ici de toutes les figures terminées par une courbe & une droite, mais fimplement de celles dont les Elemens font entr'eux dans un rapport connu, mais auparavant nous donnerons quelques principes néceffaires pour l'intelligence de ce que nous en devons dire.

282. Soient deux lignes AB, BC (*Fig.* 192.) qui fe coupent à angles droits, fi l'on éleve des perpendiculaires fur la premiere AB, ces perpendiculaires que nous appellerons toujours *y* font dites ordonnées à la droite AB, & les parties qu'elles coupent fur la droite AB, à compter du fommet B & que nous appellerons *x*, font dites les abfciffes de ces ordonnées. De même, les perpendiculaires fur l'autre droite BC feront appellées *x*, & leurs abfciffes, c'eft-à-dire les parties qu'elles coupent à compter du fommet B feront appellées *y*.

283. On fçait qu'il y a plufieurs dégrés différens de paraboles; la *quarrée* dont les quarrés des ordonnées font entr'eux comme les abfciffes, la cubique ou du troifiéme dégré dont les cubes des ordonnées font entr'eux comme les abfciffes, & ainfi de fuite. Or il eft bon de fçavoir qu'à l'exception de la parabole quarrée toutes celles des autres dégrés comprennent plufieurs efpeces, & voici comment on en connoîtra le nombre & les différences.

Dans la parabole quarrée, les quarrés des ordonnées étant entr'eux comme les abscisses, on a $yy = xa$ en appellant a le parametre, & en supposant que la droite AB (*Fig.* 192.) soit l'axe, & BC la tangente au sommet. Mais si des mêmes points où les ordonnées coupent la courbe, on mene des perpendiculaires sur BC, ces perpendiculaires seront égales aux abscisses x, & les parties qu'elles coupent sur la tangente seront égales aux ordonnées y; c'est pourquoi si l'on nomme les perpendiculaires y, & les coupées sur la tangente, x, on aura $xx = ay$; or ces deux expressions $yy = ax$, ou $xx = ay$ ne representent qu'une même parabole dont les points sont rapportés tantôt à l'axe, tantôt à la tangente, & l'on voit bien qu'il n'est pas possible de combiner d'une autre façon les trois lettres y, x, a, en supposant, comme il le faut supposer nécessairement, qu'il y aye toujours ou le quarré yy, ou le quarré xx, & jamais tous les deux à la fois. Donc il n'y a qu'une parabole du second dégré.

Dans la parabole cubique dont l'axe est la droite AB, on a $y^3 = a^2x$, & en supposant que la droite BC soit prise pour axe, on a $x^3 = a^2y$, & l'une & l'autre expression representent la même parabole rapportée tantôt à l'axe, tantôt à la tangente. Or les trois lettres y, x, a, peuvent se combiner encore d'une autre façon, en observant toujours qu'il n'y aye que le cube y^3 ou le cube x^3; car à l'égard de l'axe AB on peut faire $y^3 = ax^2$, & à l'égard de l'axe BC $x^3 = ay^2$; & l'on voit bien que cette parabole-ci est différente de l'autre, en ce que dans l'une, le cube des ordonnées est égal au rectangle de l'abscisse par le quarré du parametre, & dans l'autre, il est égal au quarré de l'abscisse multiplié par le parametre. Donc il y a deux différentes paraboles du troisiéme dégré, & l'on ne sçauroit en imaginer davantage, parce que les trois lettres y, x, a, ne peuvent pas se combiner d'une autre façon, en gardant les conditions requises.

Dans la parabole du quatriéme dégré, on a par rapport au diametre AB $y^4 = a^3x$, & par rapport au diametre BC, $x^4 = a^3y$. Or les trois lettres y, x, a, peuvent encore se combiner de deux différentes façons; car on peut faire $y^4 = aaxx$, ou $x^4 = aayy$, & $y^4 = ax^3$, ou $x^4 = ay^3$, ce qui constitue deux autres paraboles du même quatriéme. Donc il y a trois paraboles du quatriéme dégré, & on ne sçauroit en imaginer davantage, à cause que les trois lettres y, x, a, ne peuvent se combiner autrement. A proprement

parler il n'y en a que deux, car si l'on tire la racine quarrée de la parabole $y^4 = aaxx$, ou $a^4 = aayy$, on aura $y^2 = ax$, ou $x^2 = ay$, & par conséquent la parabole sera du second genre, & non pas du quatriéme.

Et on trouvera de même qu'il y a quatre différentes paraboles du cinquiéme dégré $y^5 = a^4x$, ou $x^5 = a^4y$; $y^5 = a^3x^2$, ou $x^5 = a^3y^2$; $y^5 = a^2x^3$, ou $x^5 = a^2y^3$; $y^5 = ax^4$, ou $x^5 = ay^4$; cinq différentes paraboles du sixiéme, & ainsi de suite ; de sorte que dans chaque dégré le nombre des différentes paraboles est égal à l'exposant du dégré moins l'unité. Ainsi dans la parabole du troisiéme dégré dont l'exposant est 3, le nombre des différentes paraboles est 2 ; dans le quatriéme dont l'exposant est 4, le nombre des paraboles est 3, &c.

Dans chaque parabole, nous appellerons exposant de la puissance de l'ordonnée le dégré auquel cette ordonnée est élevée dans l'expression qui représente cette parabole, & exposant de la puissance de l'abscisse le dégré auquel cet abscisse est élevée dans l'expression de la parabole ; ainsi dans la parabole $y^3 = ax^2$, le nombre 3 sera l'exposant de la puissance de l'ordonnée, & le nombre 2 l'exposant de la puissance de l'abscisse.

284. *Dans toute parabole l'exposant des ordonnées est égal à l'exposant de la puissance des abscisses divisé par l'exposant de la puissance des ordonnées.* Par exemple dans la parabole quarrée, on a $yy = ax$; tirant donc de part & d'autre la racine quarrée, on aura $y = \overline{ax}\, x^{\frac{1}{2}}$, c'est-à-dire les ordonnées sont entr'elles comme les racines quarrées des abscisses. Or l'exposant de ces racines est $\frac{1}{2}$, & cet exposant est une fraction dont le numérateur est l'exposant 1 de la puissance x, divisé par l'exposant 2 de la puissance y^2, donc, &c. De même dans la premiere parabole cubique, on a $y^3 = a^2x$, & tirant la racine cubique, on aura $y = \overline{a^2x}^{\frac{1}{3}}$, donc les y sont entr'eux comme les $\overline{a^2x}^{\frac{1}{3}}$, ou comme les $x^{\frac{1}{3}}$, & l'exposant $\frac{1}{3}$ est une fraction dont le numérateur 1 est l'exposant de la puissance x divisé par l'exposant 3 de la puissance y^3. Dans la seconde parabole cubique, on a $y^3 = ax^2$; donc $y = a^{\frac{1}{3}} \times x^{\frac{2}{3}}$; & par conséquent les y sont entr'eux comme les $x^{\frac{2}{3}}$. Or l'exposant $\frac{2}{3}$ a pour numérateur l'exposant 2 de la puissance x^2, & pour dénominateur l'exposant 3 de la puissance y^3 ; donc, &c. En général si l'exposant de la puissance des abscisses

abscisses est n, & celui de la puissance des ordonnées est m, l'exposant des ordonnées sera $\frac{n}{m}$.

285. *Toute parabole est au rectangle circonscrit comme l'exposant de la puissance de ses ordonnées est à ce même exposant plus l'exposant de la puissance des abscisses.* Supposons l'exposant de la puissance des abscisses n, celui de la puissance des ordonnées m, l'exposant des ordonnées sera donc $\frac{n}{m}$; or par les regles de l'Arithmétique des Infinis, la parabole est au rectangle circonscrit comme 1 est à $\frac{n}{m}+1$; réduisant donc 1 en fraction, on aura la parabole est au rectangle comme $\frac{m}{m}$ est à $\frac{n}{m}+\frac{m}{m}$, ou comme $\frac{m}{m}$ est à $\frac{n+m}{m}$, ou comme m à $n+m$; ainsi la parabole quarrée par exemple est au rectangle comme 1 à $\frac{1}{2}+1$, ou comme $\frac{2}{2}$ à $\frac{3}{2}$, ou comme 2 à 3, c'est-à-dire comme l'exposant 2 de la puissance y^2 est à $2+1=3$ qui est la somme de l'exposant 2 de la puissance y^2, & de l'exposant 1 de la puissance x. De même, la seconde parabole cubique $y^3=ax^2$ est au rectangle comme 1 à $\frac{2}{3}+1$, ou comme $\frac{3}{3}$ à $\frac{2+3}{3}$, ou comme l'exposant 3 de la puissance y^3 à la somme $2+3$ des exposans des puissances y^3, x^2.

286. *Dans toute parabole la distance du centre de gravité à la base est à la distance du centre de gravité au sommet encore comme l'exposant m à la somme m+n des deux exposans.* Car nous avons vû plus haut (*N.* 101.) que la premiere de ces distances étoit à l'autre comme 1 à l'exposant $\frac{n}{m}+1$, & par conséquent comme m à $n+m$.

Tout complement de parabole est au rectangle circonscrit comme l'exposant de la puissance des ordonnées à ce complement est à la somme de cet exposant & de celui de la puissance des abscisses. Dans toutes les expressions des paraboles où les y se trouvent dans un dégré plus élevé que les x, la parabole a sa concavité tournée du côté de l'axe AB (*Fig.* 192.) c'est-à-dire les ordonnées à la parabole sont les y ordonnés à cet axe, parce qu'ils sont élevés au même dégré que la parabole, & les x qui representent les abscisses représentent aussi les ordonnées du complement paralleles à l'axe AB; car il est évident que si des points où ces paralleles coupent la courbe, on mene des perpendiculaires à l'axe AB, les abscisses que ces perpendiculaires coupent seroient égales aux

ordonnées du complement, & par la même raison les abscisses que les ordonnées du complement font sur la tangente BC seront égales aux ordonnées de la parabole comprises entre l'axe & les ordonnées au complement. Or dans la parabole quarrée on a $y^2 = ax$, donc tous les x ou les ordonnées du complement sont entr'elles comme les quarrés y^2 dont l'exposant est 2, donc leur somme est à la derniere multipliée par le nombre des termes comme 1 à 3, ou comme 1 à 2+1, c'est-à-dire comme l'exposant 1 de la puissance des ordonnées au complement, est à l'exposant 2 de la puissance des ordonnées à la parabole plus le même exposant 1, de même dans la seconde parabole cubique $y^3 = ax^2$, les x^2 sont entr'eux comme les y^3; car puisque les x^2 multipliés par a, qui est une grandeur constante, sont égaux à y^3; si on les divise par a, les quotients x^2 seront comme les y^3, & tirant la racine quarrée les x seront comme les $y^{\frac{3}{2}}$ dont l'exposant est $\frac{3}{2}$, donc la somme des x sera au dernier terme multiplié par le nombre des termes comme 1 à $\frac{3}{2}+1$, ou comme $\frac{2}{3}$ à $\frac{3+2}{2}$, ou comme 2 à 3+2, & ainsi des autres. En général l'exposant de la puissance des y étant m, & celui de la puissance des x étant n, on aura toujours les x^n en même raison que les y^m, & tirant la racine n, les x seront en même raison que les $y^{\frac{m}{n}}$ dont l'exposant est $\frac{m}{m}$; ainsi la somme des x sera au dernier terme multiplié par le nombre des termes comme 1 à $\frac{m}{n}+1$ ou comme $\frac{n}{n}$ est à $\frac{m+n}{n}$ ou comme n à $m+n$. Venons maintenant à ce que nous nous sommes proposés dans ce Chapitre.

287. Soit une ligne AB (*Fig.* 193.) divisée en ses Elemens; si l'on fait sur chacun de ces Elemens, comme une puissance quelconque de la ligne AB, est à une semblable puissance de l'abscisse AC, ainsi la même puissance ou un autre du reste CB de la ligne AB est à une semblable puissance de l'ordonnée CD, la ligne qui passera par les extrémités des ordonnées CD, sera une courbe qui partant du point A viendra rejoindre la ligne AB au point B, parce qu'il est visible par la construction que les ordonnées CD iront d'abord en augmentant, puis en diminuant, & l'on demande de trouver la grandeur de l'espace que remplissent ces ordonnées, & son centre de gravité, ce que nous allons faire en cette sorte.

Si nous faisons à l'égard de toutes les ordonnées de l'espace ADB, comme le reste CB est à la ligne entiere AB, ainsi l'ordonnée CD est à une quatriéme ligne CE, & de même à l'égard des autres ordonnées, nous aurons une autre espace ABR, dont les CE seront les ordonnées, & à cause de la proportion CB, AB :: CD, CE, nous aurons les rectangles CB × CE égaux aux rectangles AB × CD, c'est-à-dire les ordonnées CE de la figure ARB multipliées par leurs distances CB à la droite BR, sont égales aux ordonnées CD multipliées par AB ou par BR qui est égale à AB par la construction de la figure ARB. Or les ordonnées CE multipliées par leurs distances CB forment un onglet qui est le moment de la figure ARB par rapport à BR, & les ordonnées CD multipliées par AB forment un prisme dont la base est la figure ADB & la hauteur est la droite AB ou BR; donc l'onglet fait sur ARB est égal au prisme fait sur ADB.

Or supposant que la distance du centre de gravité de la figure ARB à la droite BR soit égale à la droite BO, l'onglet fait sur ARB & qui est représenté par la figure 194. sera égal à sa base ARB multipliée par BO, & si l'on fait sur ARB un prisme (*Fig.* 195.) dont la hauteur soit égale à BR, l'onglet sera à ce prisme comme la hauteur BO à la hauteur BR; mais le prisme fait sur ADB ayant la même hauteur AB ou BR est égal à l'onglet, donc ce prisme est au prisme fait sur ARB comme BO à BR ou AB; & comme les bases de ces deux prismes sont dans la même raison que les prismes à cause des hauteurs égales il s'ensuit que la figure ADB est à la figure ARB, comme BO à BA; donc si l'on connoît la figure ARB & la distance BO de son centre de gravité on connoîtra la grandeur de la figure ADB, & c'est ce que nous allons chercher.

Pour fixer l'imagination, nous supposerons qu'on aye fait $\overline{AB}^2$, $\overline{AC}^2 :: \overline{CB}^3, \overline{CD}^3$, & nous appellerons n l'exposant 2, m l'exposant 3; a la droite AB, x la droite AC, ce qui nous donnera $a-x=$ CB; h la droite CD, y la droite CE, & enfin u la droite BO, ce qui nous donnera AO $= a-u$.

Par la construction de la figure ARB, nous avons $a-x, a :: h, y$, & élevant tous les termes à la puissance dont l'exposant est m, nous aurons $\overline{a-x}^m, a^m :: h^m, y^m$, ou $a^m, y^m :: \overline{a-x}^m, h^m$, mais par la construstion de la figure ADR nous avons $a^n, x^n ::$

$\overline{a-x}^m$, h^m, donc nous avons $a^m, y^m :: a^n, x^n$, & par conséquent $a^m x^n = a^n y^m$, & divisant par a^n afin que y^m, dont la puissance est plus élevée que x^n, soit seule d'un côté nous aurons $y^m = \frac{a^m}{a^n} x^n$ ce qui est l'expression de quelqu'une des paraboles dont nous venons de parler, comme on le verra aisément en mettant les valeurs des exposans, car alors on aura $y^3 = a^{\frac{1}{2}} x^2$, ce qui fait voir que l'espace ARB est une parabole cubique dont les cubes y^3 des ordonnées CE sont entr'eux comme les quarrés x^2 des abscisses AC.

Si l'exposant n étoit plus grand que l'exposant m, alors dans l'équation $a^m x^n = a^n y^m$ nous dégagerions x^n, ce qui nous donneroit $x^n = \frac{a^n}{a^m} y^m$, & par là nous connoîtrions que les ordonnées à la parabole seroient les x, c'est-à-dire les droites élevées perpendiculairement sur AP, & par conséquent la figure ARB seroit le complement de la parabole.

Et si les deux exposans étoient égaux nous aurions $a^n x^n = a^n y^n$, & divisant par a^n nous aurions $x^n = y^n$ & $x = y$, ce qui nous feroit connoître que la figure ARB seroit un triangle équilateral.

Supposant donc toujours les exposans n, m, égaux à 2 & 3, la parabole ABR sera au quarré circonscrit comme l'exposant m de la puissance de ses ordonnées à la somme $m+n$ des exposans de la puissance des ordonnées & de la puissance des abscisses, & la distance BO du centre de gravité à la base sera à la distance AO de ce même centre, à la tangente au sommet A aussi comme m, est à $m+n$; ainsi nous aurons u, $a-u :: m$, $m+n$, ou $a-u$, $u :: m+n$, m & *composant* a, $u :: 2m+n$, m.

Or nous avons vû ci-dessus que la figure ARB est à la figure ADB comme a est à u, donc la figure ARB est à la figure ABD comme $2m+n$ est à m.

Mais le quarré circonscrit est à la figure ARB comme $m+n$ est à m, & ce quarré est à la figure ADB en raison composée de la raison du quarré à la figure ARB, & de celle de la figure ARB à la figure ADB. Donc le quarré est à la figure ADB en raison composée de $m+n$, m, & de $2m+n$, m; ou comme $2mm+3mn+nn$ est à mm, d'où l'on tire cette regle que *dans toutes ces especes de figures, le quarré fait sur la base* AB *est à la figure* ADB *en raison composée de la raison de la somme des deux exposans à l'exposant de la puissance de* BC, *&* *de la raison de la*

somme du double de l'exposant de la puissance de BC, *plus l'exposant de la puissance de* AC *à l'exposant de la puissance de* BC.

Pour appliquer ceci aux exposans 2 & 3 que nous avons supposé ci-dessus, la parabole ARB sera les $\frac{3}{5}$ du quarré circonscrit, c'est-à-dire en raison de 3 à 3 + 2, la figure ADB sera les $\frac{3}{8}$ de la figure ARB, ou en raison de 3 à 2 × 3 + 2, & la même figure ADB sera les $\frac{9}{40}$ du quarré circonscrit, ou en raison composée de la raison 3, 3 + 2, & de la raison de 3, 2 × 3 + 2, c'est-à-dire en raison composée des raisons 3. 5., 3. 8. dont la composée est 9. 40.

Or nous avons trouvé ci-dessus que la figure ARB est à la figure ADB, comme BA est à BO; faisant donc BA = 1, nous aurons $\frac{3}{5}, \frac{9}{40} :: 1, \frac{9}{24} = BO = \frac{3}{8}$.

Pour trouver le centre de gravité de la figure ADB, faisons à l'égard de chaque ordonnée CD, comme AB est à AC, ainsi CD a une quatriéme ligne CX que nous éleverons perpendiculairement sur AB au point correspondant C, & nous aurons une autre figure AXB dont les ordonnées seront appellées z; ainsi nous aurons $a, x :: h, z$, & $az = xh$, c'est-à-dire la somme des ordonnées CX de la figure AXB multipliées par la droite AB est égale à la somme des ordonnées de la figure ADB multipliées par leurs distances à la droite AP. Or les CX multipliées par AB forment un prisme dont la base est la figure AXB, & la hauteur la droite AB, & les ordonnées CD multipliées par leurs distances forment un onglet dont la base est la figure ADB, & la pointe est la droite AP. Supposant donc que la distance du centre de gravité de la figure ADB soit la droite AO, l'onglet sera égal à la base ADB multipliée par la droite AO, & cet onglet sera au prisme fait sur la même base ADB, & dont la hauteur sera la droite AB, comme la hauteur moyenne AO, à la hauteur AB; mais le prisme fait sur la base AXB ayant pour hauteur la droite AB, est égal à l'onglet, donc le prisme fait sur AXB, est au prisme fait sur ADB comme la droite AO est à la droite AB; & comme les hauteurs de ces deux prismes étant égales, les bases sont en même raison que les prismes, il s'ensuit que la figure AXB est à la base ADB, comme la droite AO est à la droite AB; ainsi si l'on connoît le rapport des deux espaces AXB, ADB, on connoîtra aussi la raison de AO à AB, & par conséquent la distance AO du centre de gravité la figure ADB sera connue.

Or par la construction de la figure AXB nous avons, $a, x :: h, z$, donc $az = hx$, & $\frac{az}{x} = h$, mais par la construction de la figure ADB, nous avons $a^n, x^n :: \overline{a-x}^m, h^m$; mettant donc dans cette équation la valeur de $h^m = \frac{a^m z^m}{x^m}$ nous aurons $a^n, x^n :: \overline{a-x}^m \frac{a^m z^m}{x^m}$, & multipliant les deux derniers termes par x^m, nous aurons $a^n, x^n :: \overline{a-x}^m \times x^m, a^m z^m$, & faisant le produit des extrémes & celui des moyens, nous aurons $a^{n+m} z^m = \overline{a-x}^m \times x^{n+m}$, d'où l'on tirera $a^{n+m}, x^{n+m} :: \overline{a-x}^m, z^m$, & mettant les valeurs des exposans $a^{2+3}, x^{2+3} :: \overline{a-x}^3 z^3$, c'est-à-dire la cinquiéme puissance de la droite AB est à la cinquiéme puissance de l'abscisse AC, comme le cube du reste CB de la droite AB est au cube de l'ordonnée CX; donc la figure AXB sera du nombre des figures dont il est ici question, & elle ne différera de la figure ADB qu'en ce que l'exposant des puissances de AB, AC, est dans la premiere 2, & dans la seconde $2+3$ ou 5.

Pour trouver la grandeur de la figure AXB nous prendrons la raison $n+m+m, m$ ou $n+2m, m$, & la raison $n+m+2m, m$, ou $n+3m, m$; & faisant la raison composée de ces deux raisons, nous aurons $nn+5mn+6mm, mm$ qui marquera le rapport du quarré circonscrit à la figure AXB ou du quarré $\overline{AB}^2$ à la figure AXB, ainsi ce quarré sera à la figure AXB comme $4+30+54$ est à 9, ou comme 88 à 9. Or le même quarré est à la figure ADB comme 40 à 9, ainsi qu'on a vû ci-dessus, donc la figure AXB est à la figure ADB comme $\frac{9}{88}$ à $\frac{9}{40}$ ou comme $\frac{360}{3520}$ est à $\frac{812}{3520}$ ou comme 40 à 88, ou comme 5 à 11; puis donc que nous avons vû ci-dessus que la distance AO est à la droite AB comme la figure AXB à la figure ADB, si on coupe AB en 11 parties égales & qu'on en prenne cinq de A en I on aura la distance du centre de gravité de la figure ADB à la droite AP & par conséquent le moment de cette figure par rapport à AP & à BR sera connu.

La méthode que nous venons d'enseigner par rapport à ces sortes de figures, est ingenieuse, & peut être fort utile pour trouver les grandeurs & les rapports des figures entr'elles, mais elle est défectueuse en ce qu'après avoir trouvé la distance du cen-

tre de gravité à la droite AP ou à la droite BR, on ne sçauroit trouver par la même voye la distance du même centre à la droite AB, au lieu qu'en employant la méthode de l'Arithmetique des Infinis, elle nous fait découvrir en même tems & la grandeur des figures & leurs momens par rapport à AB, de même que par rapport à AP, ainsi que nous allons voir.

Par la construction de la figure ADB nous avons a^2, x^2 :: $\overline{a-x}^3$, h^3; & tirant la racine cubique, nous avons $a^{\frac{2}{3}}$, $x^{\frac{2}{3}}$ :: $\overline{a-x}$, h. Donc $h = \frac{\overline{a-x} \times x^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}$, c'est-à-dire les ordonnées CD de la figure ADB sont comme les termes $\frac{\overline{a-x} \times x^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}$ d'une suite infinie.

Or a étant la grandeur constante AB, nous l'appellerons A, & les A dans les termes de cette suite seront la suite des égaux A, A, A, &c. dont le dernier A sera le nombre des termes; les x étant les abscisses arithmetiquement proportionnelles, nous les appellerons o, a, b, c, d, &c. jusqu'à la derniere A; donc les $x^{\frac{2}{3}}$ seront la suite o, $a^{\frac{2}{3}}$, $b^{\frac{2}{3}}$, $c^{\frac{2}{3}}$, $d^{\frac{2}{3}}$, & le diviseur $a^{\frac{2}{3}}$ sera $A^{\frac{2}{3}}$; ainsi les ordonnées h formeront la suite o, $\frac{Aa^{\frac{2}{3}} - a \times a^{\frac{2}{3}}}{A^{\frac{2}{3}}}$, $\frac{Ab^{\frac{2}{3}} - b \times b^{\frac{2}{3}}}{A^{\frac{2}{3}}}$, $\frac{Ac^{\frac{2}{3}} - c \times c^{\frac{2}{3}}}{A^{\frac{2}{3}}}$, &c. $\frac{A \times A^{\frac{2}{3}} - A \times A^{\frac{2}{3}}}{A^{\frac{2}{3}}}$ ou bien comme $a \times a^{\frac{2}{3}} = a^{1+\frac{2}{3}} = a^{\frac{5}{3}}$, les termes de cette suite seront o, $\frac{Aa^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{5}{3}}}{A^{\frac{2}{3}}}$, $\frac{Ab^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{5}{3}}}{A^{\frac{2}{3}}}$, &c. $\frac{A^{\frac{5}{3}} - A^{\frac{5}{3}}}{A^{\frac{2}{3}}}$. Evaluant donc cette somme selon les regles ordinaires en négligeant

$$\begin{array}{ll} o & o \\ Aa^{\frac{2}{3}} & - a^{\frac{5}{3}} \\ Ab^{\frac{2}{3}} & - b^{\frac{5}{3}} \\ Ac^{\frac{2}{3}} & - c^{\frac{5}{3}} \\ \&c. & \\ A^{\frac{5}{3}} & - A^{\frac{5}{3}} \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{3}{5} A \times A^{\frac{5}{3}} - \frac{5}{8} A \times A^{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5} A^{\frac{8}{3}} - \frac{3}{8} A^{\frac{8}{3}} = \frac{9}{40} A^{\frac{8}{3}}$$

d'abord le dénominateur de chaque terme, nous aurons $\frac{9}{40}A^{\frac{8}{3}}$, & divisant par le dénominateur $a^{\frac{2}{3}}$ nous aurons $\frac{9}{40}a^{\frac{8}{3}-\frac{2}{3}} = \frac{9}{40}A^{\frac{6}{3}} = \frac{9}{40}A^2$, c'est-à-dire la somme des ordonnées de la figure ADB est égale à $\frac{9}{40}$ du quarré de A, ainsi que nous l'avons trouvé ci-dessus.

Maintenant pour trouver le centre de gravité de cette figure, cherchons d'abord son moment par rapport à la droite AP, & comme ce moment est égal à la somme des ordonnées multipliées chacune par leurs distances à la droite AP, lesquelles distances sont les abscisses o, a, b, c, d, &c. A, nous aurons par conséquent la suite o, $\frac{Aa^{\frac{2}{3}}\times a - a^{\frac{5}{3}}\times a}{A^{\frac{2}{3}}}$, $\frac{Ab^{\frac{2}{3}}\times b - b^{\frac{5}{3}}\times b}{A^{\frac{2}{3}}}$, &c. ou o, $\frac{Aa^{\frac{5}{3}} - a^{\frac{8}{3}}}{A^{\frac{2}{3}}}$, $\frac{Ab^{\frac{5}{3}} - b^{\frac{8}{3}}}{A^{\frac{2}{3}}}$, &c. & évaluant cette somme, en négligeant le dénominateur de chaque terme, nous aurons $\frac{9}{88}A^{\frac{11}{3}}$, & cette somme étant divisée par le dénominateur A^3, le quotient $\frac{9}{88}A^{\frac{11}{3}-\frac{2}{3}} = \frac{9}{88}A^3$ sera le moment de la figure ADB par rapport à AP, & divisant ce moment par la grandeur $\frac{9}{40}A^2$, le quotient $\frac{40}{88}A = \frac{5}{11}A$ sera la distance du centre de gravité de la figure ADB à la droite AP, & par conséquent sa distance à la droite BR sera $\frac{6}{11}A$.

$$\begin{array}{l} o \quad o \\ Aa^{\frac{5}{3}} - a^{\frac{8}{3}} \\ Ab^{\frac{5}{3}} - b^{\frac{8}{3}} \\ Ac^{\frac{5}{3}} - c^{\frac{8}{3}} \\ \&c. \\ A^{\frac{8}{3}} - A^{\frac{8}{3}} \\ \hline \frac{3}{8}A^{\frac{11}{3}} - \frac{3}{11}A^{\frac{11}{3}} = \frac{9}{88}A^{\frac{11}{3}} \end{array}$$

Et comme le moment de cette figure par rapport à la droite AB, est un onglet dont les plans élementaires perpendiculaire à la base & à la pointe AB, sont des triangles qui valent la moitié des quarrés des ordonnées. Faisant les quarrés des ordonnées, nous aurons

$$\begin{array}{l} o \quad o \quad o \\ A^2a^{\frac{4}{3}} - 2Aa^{\frac{7}{3}} + a^{\frac{10}{3}} \\ A^2b^{\frac{4}{3}} - 2Ab^{\frac{7}{3}} + b^{\frac{10}{3}} \\ A^2c^{\frac{4}{3}} - 2Ac^{\frac{7}{3}} + c^{\frac{10}{3}} \\ \&c. \\ A^{\frac{10}{3}} - 2A^{\frac{10}{3}} + A^{\frac{10}{3}} \\ \hline \frac{3}{7}A^{\frac{13}{3}} - \frac{6}{10}A^{\frac{13}{3}} + \frac{3}{13}A^{\frac{13}{3}} = \frac{27}{455}A^{\frac{13}{3}} \end{array}$$

la

la ſuite qu'on voit ici, en négligeant d'abord le diviſeur commun de tous les termes qui eſt $A^{\frac{4}{3}}$, & évaluant cette ſuite nous aurons $\frac{27}{455} A^{\frac{13}{3}}$, & diviſant par $A^{\frac{4}{3}}$, nous aurons $\frac{27}{455} A^{\frac{9}{3}}$ pour la ſomme des quarrés des ordonnées; donc la moitié de cette ſomme ſera $\frac{27}{910} A^{\frac{9}{3}}$, & ce ſera le moment de la figure ADB par rapport à AB. Diviſant donc ce moment par la grandeur $\frac{9}{40} A^{\frac{6}{3}}$ le quotient $\frac{1080}{8190} A^{\frac{3}{3}} = \frac{36}{273}$ A ſera la diſtance du centre de gravité de la figure ADB à la droite AB, & ainſi de ſuite.

Je pourrois ajoûter ici grand nombre d'autres queſtions, mais comme elles ſeront faciles à reſoudre pour ceux qui auront compris les méthodes que nous avons enſeignées, nous mettrons fin à ce volume pour ne pas le groſſir inutilement.

J'ai déja averti dans ma Préface qu'en deux ou trois endroits de cet Ouvrage, j'avois donné le nom de tangente au côté du rectangle circonſcrit à la parabole, lequel eſt parallele à l'axe, & comme ce côté ne peut être tangente de la parabole que lorſque la parabole eſt infinie: j'ai dit qu'en prenant la parabole finie il falloit ſubſtituer au lieu du mot de *Tangente*, celui de *Côté* du rectangle circonſcrit parallele à l'axe. Or cette petite erreur m'ayant fait appercevoir d'un Problême que perſonne n'a encore reſolu, je crois qu'on ne ſera pas faché d'en trouver ici la ſolution.

Une demi parabole BEC (Fig. 196.) *étant donnée, trouver le ſolide qu'elle décrit en tournant autour de la droite* AC, *tangente à l'extrémité de ſa baſe.*

Je nomme le parametre $= a$, l'abſciſſe EB $= x$, l'ordonnée BC $= y$, par la proprieté de la parabole on a AE $=$ EB $= x$, & par conſéquent AB $= 2x$, donc le triangle ABC $=$ AB $\times \frac{1}{2}$ BC $= 2x \times \frac{1}{2} y = xy$.

Du point C j'éleve CD perpendiculaire à la tangente AC, par la proprieté de la parabole la ſous-perpendiculaire BD eſt égale à $\frac{1}{2} a$, ainſi que nous l'avons démontré dans la *Théorie & Pratique du Geométre*, du point B je mene BF perpendiculaire ſur la tangente AC, & les triangles ſemblables ADC, ABF donnent AD, DC :: AB, BF, mais AD $= 2x + \frac{1}{2} a$ & DC $= \sqrt{yy + \frac{1}{4} aa}$, à cauſe du triangle rectangle DBC qui donne $\overline{BC}^2 + \overline{DB}^2 = \overline{DC}^2 = yy + \frac{1}{4} aa$, mettant donc dans AD, DC

: : AB, BF, les valeurs analytiques, j'ai $2x+\frac{1}{2}a$, $\sqrt{yy+\frac{1}{4}aa}$: : $2x$, $\frac{2x\sqrt{yy+\frac{1}{4}aa}}{2x+\frac{1}{2}a}=$ BF ; or la diſtance du centre de gravité du triangle ABC à ſa baſe AC eſt $\frac{1}{3}$ BF, donc cette diſtance eſt $\frac{2x\sqrt{yy+\frac{1}{4}aa}}{6x+\frac{3}{2}a}$, & multipliant la grandeur xy du triangle par cette diſtance, le produit $\frac{2xxy\sqrt{yy+\frac{1}{4}aa}}{6x+\frac{3}{2}a}$ ſera le moment du triangle par rapport à ſa baſe AC.

Pour trouver le moment de la demi-parabole par rapport à la même droite AC, je ſçais que le centre de gravité de cette demi-parabole eſt éloigné de l'axe EB de $\frac{3}{8}$ BC, & du ſommet E de $\frac{3}{5}$ EB (*N.* 103.) prenant donc EH $=\frac{3}{5}x$ & BS $=\frac{3}{8}y$, & menant HO parallele à BC & SO parallele à EB, le point O eſt le centre de gravité de la demi-parabole. Je mene par O la droite VR parallele à DC ; les triangles rectangles DBC, VHO donnent BC, DC : : HO, VO, donc y, $\sqrt{yy+\frac{1}{4}aa}$: : $\frac{3}{8}y$, $\frac{3}{8}\sqrt{yy+\frac{1}{4}aa}=$ VO, les mêmes triangles donnent BC, BD : : HO, HV, donc y, $\frac{1}{2}a$: : $\frac{3}{8}y$, $\frac{3}{16}a$; or les triangles ſemblables ADC, AVR, donnent AD, DC : : AV, VR, donc $2x+\frac{1}{2}a$ $\sqrt{yy+\frac{1}{4}aa}$: : $\frac{8}{5}x+\frac{3}{16}a$, $\frac{\overline{\frac{8}{5}x+\frac{3}{16}a}\times\sqrt{yy+\frac{1}{4}aa}}{2x+\frac{1}{2}a}=$ VR, & retranchant de VR la partie VO $=\frac{3}{8}\sqrt{yy+\frac{1}{4}aa}$, j'ai OR $=\frac{\overline{\frac{8}{5}x+\frac{3}{16}a}\times\sqrt{yy+\frac{1}{4}aa}}{2x+\frac{1}{2}a}-\frac{3}{8}\sqrt{yy+\frac{1}{4}aa}$, & reduiſant tout en même dénomination, j'ai OR $=\frac{\overline{\frac{8}{5}x+\frac{3}{16}a}\times\sqrt{yy+\frac{1}{4}aa}-\overline{\frac{6}{8}x-\frac{3}{16}a}\times\sqrt{yy+\frac{1}{4}aa}}{2x+\frac{1}{2}a}$ & corrigeant l'expreſſion, j'ai OR $=\frac{\frac{17}{20}x\times\sqrt{yy+\frac{1}{4}aa}}{2x+\frac{1}{2}a}=\frac{17x\sqrt{yy+\frac{1}{4}aa}}{40x+\frac{20}{2}a}$. Or OR eſt la diſtance du centre de gravité de la demi-parabole à la droite AC, & la grandeur de la demi-parabole eſt $\frac{2}{3}xy$, c'eſt-à-dire les deux tiers du rectangle circonſcrit xy ; multipliant donc la grandeur $\frac{2}{3}xy$ par la diſtance OR, le produit $\frac{34xxy\sqrt{yy+\frac{1}{4}aa}}{120+\frac{60}{2}a}$ eſt le moment de la demi-parabole par rapport à AC.

Mais nous avons trouvé que le moment du triangle par rap-

port à la même AC ; eſt $\frac{2xxy\sqrt{yy+\frac{1}{4}aa}}{6x+\frac{3}{2}a}$ ou $\frac{40xxy\sqrt{yy+\frac{1}{4}aa}}{120x+\frac{60}{2}a}$ en multipliant le numerateur & le dénominateur par 20, donc le moment de la parabole eſt au moment du triangle comme $\frac{34xxy\sqrt{yy+\frac{1}{4}aa}}{120x+\frac{60}{2}a}$ eſt à $\frac{40xxy\sqrt{yy+\frac{1}{4}aa}}{120x+\frac{60}{2}a}$, ou comme 34 à 40, ou comme 17 à 20.

Donc le ſolide fait par la circonvolution du complement AEC au triangle eſt au ſolide fait par le triangle comme 6 à 40 ou comme 3 à 20 & pour trouver le ſolide fait par la figure mixtiligne EQC, voici comme je fais.

Je mene la perpendiculaire EZ, & les triangles ſemblables ADC, AEZ, donnent AD, DC :: AE, EZ, donc $2x+\frac{1}{2}a$, $\sqrt{yy+\frac{1}{4}aa} :: x$, $\frac{x\sqrt{yy+\frac{1}{4}aa}}{2x+\frac{1}{2}a}$ = EZ, or la diſtance du centre de gravité du triangle AEQ à la droite AC eſt $\frac{1}{3}$ EZ, donc cette diſtance eſt $\frac{x\sqrt{yy+\frac{1}{4}aa}}{6x+\frac{3}{2}a}$, mais la grandeur du triangle AEQ eſt $\frac{1}{2}$ AE × EQ $=\frac{1}{2}x\times\frac{1}{2}y=\frac{1}{4}xy$, multipliant donc la grandeur par la diſtance, le produit $\frac{xxy\sqrt{yy+\frac{1}{4}aa}}{24x+\frac{12}{2}a}$ eſt le moment du triangle AEQ par rapport à AC, & multipliant le numerateur & le dénominateur par 5, ce moment ſera $\frac{5xxy\sqrt{yy+\frac{1}{4}aa}}{120x+\frac{60}{2}a}$. Donc le moment du triangle AEQ eſt au moment du triangle ABC comme 5 à 40, or le moment du complement AEC eſt au moment du triangle ABC comme 6 à 40. Donc le moment de la figure mixtiligne EQC eſt au moment du triangle ABC comme 1 à 40 & au moment de la demi-parabole comme 1 à 34.

Si par le ſommet A du triangle ABC on mene une droite MN perpendiculaire à l'axe, & qu'on conçoive que le triangle & la parabole tournent autour de cette ligne, enſorte que l'axe AB lui ſoit toujours perpendiculaire, la diſtance du centre de gravité du triangle à cette droite eſt égale à $\frac{2}{3}$ AB $=\frac{2}{3}\times 2x=\frac{4}{3}x$; or la grandeur du triangle eſt xy, donc ſon moment par rapport à MN eſt $\frac{4}{3}xxy$.

La diſtance du centre de gravité de la demi-parabole à la même ligne MN eſt égale à AE $+\frac{3}{5}$ EB $=x+\frac{3}{5}x=\frac{8}{5}x$, or la gran-

deur de la demi-parabole eſt $\frac{2}{3}xy$, donc ſon moment par rapport à MN eſt $\frac{16}{15}xxy$, & par conſéquent ce moment eſt à celui du triangle comme $\frac{16}{15}xxy$ à $\frac{4}{3}xxy$, ou comme $\frac{16}{15}$ à $\frac{20}{15}$, ou comme 16 à 20.

Si l'on conçoit que le triangle tourne autour de ſa baſe BC, la diſtance de ſon centre de gravité à cette baſe eſt $\frac{1}{3}AB = \frac{1}{3} \times 2x = \frac{2}{3}x$, & multipliant la grandeur xy par cette diſtance, le produit $\frac{2}{3}xxy$, eſt le moment du triangle par rapport à BC.

La diſtance du centre de gravité de la demi-parabole à la baſe BC eſt $\frac{2}{5}EB = \frac{2}{5}x$; multipliant donc la grandeur $\frac{2}{3}xy$ par la diſtance, le produit $\frac{4}{15}xxy$ eſt le moment de la demi-parabole par rapport à BC, donc ce moment eſt à celui du triangle comme $\frac{4}{15}$ à $\frac{2}{3}$, ou comme $\frac{4}{15}$ à $\frac{10}{15}$, ou comme 4 à 10.

Enfin ſi l'on conçoit que le triangle tourne autour de l'axe, la diſtance de ſon centre de gravité à cet axe eſt $\frac{1}{3}BC = \frac{1}{3}y$, multipliant donc la grandeur par la diſtance, le produit $\frac{1}{3}xyy$ eſt le moment du triangle par rapport à EB, la diſtance du centre de gravité de la demi-parabole à l'axe eſt $\frac{3}{8}y$, & multipliant la grandeur $\frac{2}{3}xy$ par cette diſtance, le produit $\frac{6}{24}xyy$, eſt le moment de la demi-parabole par rapport à l'axe; donc ce moment eſt à celui du triangle comme $\frac{6}{24}$ à $\frac{3}{8}$, ou comme $\frac{6}{24}$ à $\frac{9}{24}$, ou comme 6 à 9, ou 2 à 3.

FIN.

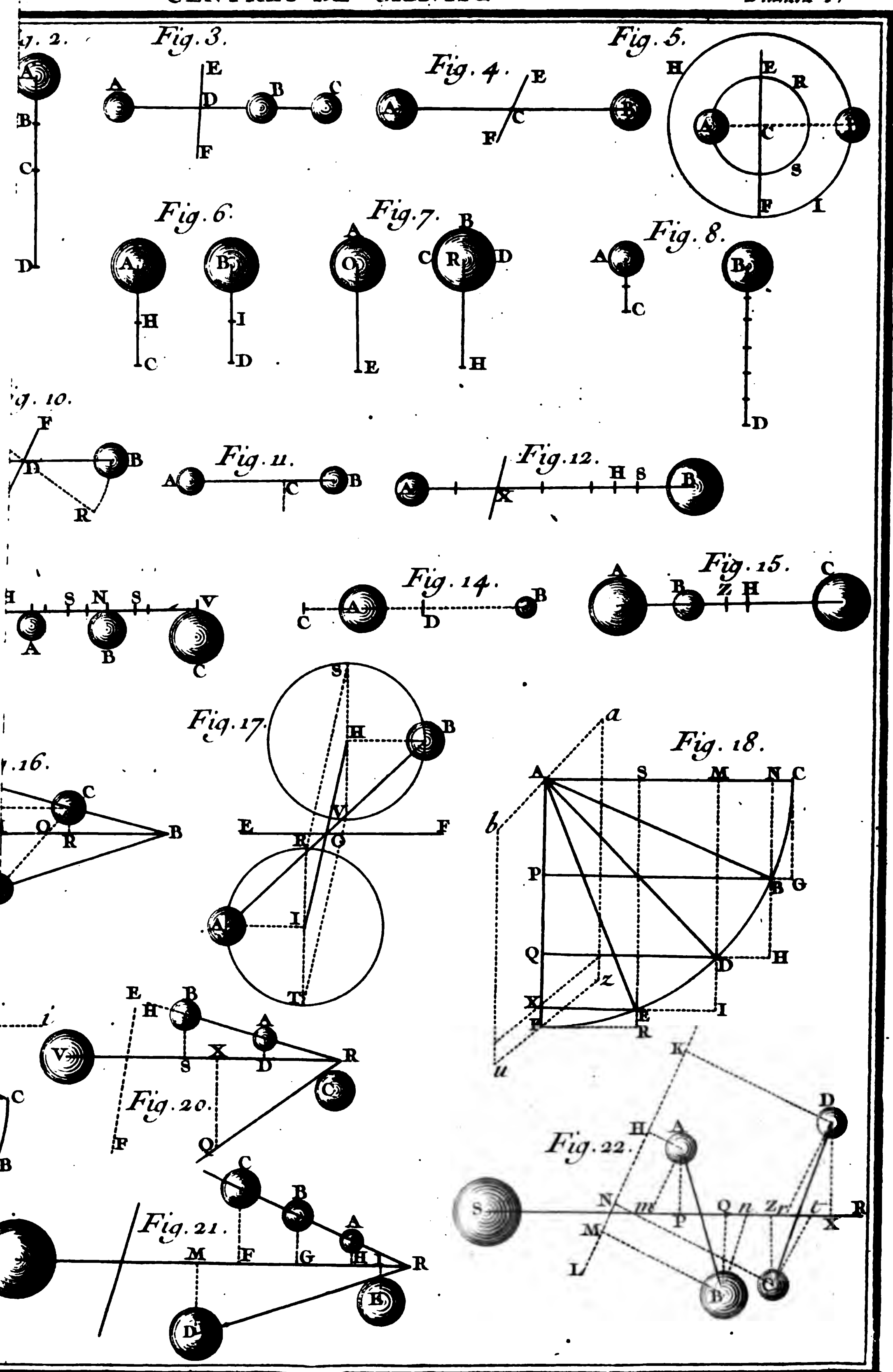
De l'Imprimerie de J. CHARDON.

TABLE
DES CHAPITRES
Contenus dans cet Ouvrage.

LIVRE PREMIER.

LIVRE SECOND.

Fin de la Table des Chapitres.


Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.